数理解析研究所講究録
第 1618 巻 2008 年 104-110

常微分方程式の固定端境界値問題とソボレフ不等式の最良定数

防衛大学校 情報工学科 渡辺 宏太郎 (Kohtaro Watanabe)
Department of Computer Science,
National Defense Academy

1 目的

常微分方程式の固定端境界値問題とソボレフ不等式の最良定数について講演時に述べさせていただきましたが，ここではもう少し対象を広げて，常微分方程式の固定端-ノイマン端，ディリクレ端-ノイマン端，自由端-ノイマン端境界値問題とソボレフ不等式の最良定数，またリャプノフ不等式との関連について述べたいと思います．発表の機会を与えて下さった齋藤三郎先生に感謝します．本研究は，亀高惟倫先生，永井敦氏，武村一雄氏，山岸弘幸氏との共同研究です．

1.1 リャプノフ不等式

$p\in C(a,b)$ とする．2 階線型微分方程式

$$u''+p(t)u=0,\quad (a\le t\le b) \tag{1}$$

を考える．式 (1) の $x(a)=x(b)=0$ をみたす非自明解 (古典解) が存在するならば，次のリャプノフ不等式

$$\|p\|_{L^1(a,b)}>\frac{4}{b-a} \tag{2}$$

をみたさなければならないことが知られている（[1] を参照）．よって，$\|p\|_{L^1(a,b)}\le 4/(b-a)$ ならば，式 (1) の固定端条件での非自明解の非存在を示すことができる有意義な判定条件になっている．この問題の拡張が様々になされているが [2]，特に Das-Vatsala[3] は $2M$ 階 2 点境界値問題に拡張している．すなわち，

定理 1 (Das-Vatsala[3]).

$$u^{(2M)}+(-1)^{M-1}p(t)u=0,\quad (a\le t\le b) \tag{3}$$

$$u^{(i)}(a)=0=u^{(i)}(b),\quad i=0,1,\dots,M-1 \tag{4}$$

の非自明解が存在するならば，p は

$$\|p\|_{L^1(a,b)}>\frac{4^{2M-1}(2M-1)\{(M-1)!\}^2}{(b-a)^{2M-1}} \tag{5}$$

をみたさなければならない．

後でわかるように，右辺の定数は，次のソボレフ不等式の最良定数 $C(C,C)$ の逆数になっている．

$$\left(\sup_{a\le x\le b}|u(x)|\right)^2\le C\int_a^b|u^M(x)|^2dx=C\cdot\|u\|^2_{H^M(a,b)}, \tag{6}$$

u はソボレフ空間 $H^M(a,b)$ の部分空間

$$H(C,C) := \{u \mid u, u^{(M)} \in L^2(a,b),\ u^{(i)}(a) = u^{(i)}(b) = 0\ (0 \le i \le M-1)\}$$

の元である. 以下では境界条件を様々に変化させ, Das-Vatsala の定理の拡張を行うとともに対応するソボレフ不等式の最良定数を求める. 定義域は簡単のため $[-1,1]$ とする. また, 考察する境界条件の組は

$$\begin{cases} \text{固定端-固定端} & B(C,C): u^{(i)}(-1) = u^{(i)}(1) = 0,\ (0 \le i \le M-1) \\ \text{固定端-ノイマン端} & B(C,N): u^{(i)}(-1) = u^{(2i+1)}(1) = 0,\ (0 \le i \le M-1) \\ \text{ディリクレ端-ノイマン端} & B(D,N): u^{(2i)}(-1) = u^{(2i+1)}(1) = 0,\ (0 \le i \le M-1) \\ \text{自由端-ノイマン端} & B(F,N): u^{(M+i)}(-1) = u^{(2i+1)}(1) = 0,\ (0 \le i \le M-1) \end{cases}$$

である. 次の結果を得た.

定理 2. 微分方程式

$$u^{(2M)} + (-1)^{M-1}p(t)u = 0, \quad (-1 \le t \le 1) \tag{7}$$

の各境界条件, $B(C,C)$: 固定端-固定端 : $B(C,N)$: 固定端-ノイマン端, $B(D,N)$: ディリクレ端-ノイマン端, $B(F,N)$: 自由端-ノイマン端の非自明解が存在するならば, p は

$$\|p\|_{L^1(-1,1)} > \begin{cases} 2^{2M-1}(2M-1)\{(M-1)!\}^2, & B(C,C)\text{ のとき } \textit{(Das-Datsala[3])} \\ \dfrac{(2M-1)\{(M-1)!\}^2}{2}, & B(C,N)\text{ のとき} \\ \dfrac{\pi^{2M}}{2^{2M}(2^{2M}-1)\zeta(2M)}, & B(D,N)\text{ のとき} \\ \dfrac{\Gamma(M)^2\Gamma(4M)}{2\cdot 4^{2M-1}\Gamma(2M-1)\Gamma(2M+1)}, & B(F,N)\text{ のとき, ただし, } M \le 5 \end{cases} \tag{8}$$

をみたす. ここで, ζ はリーマンゼータ関数.

対応するソボレフ不等式の最良定数に関する結果を述べるために, 次の関数空間を導入する ($H(C,C)$ は既に定義しているが).

定義 1.

$$\begin{cases} H(C,C) := & \{u \mid u, u^{(M)} \in L^2(-1,1),\ u^{(i)}(-1) = u^{(i)}(1) = 0\ (0 \le i \le M-1)\} \\ H(C,N) := & \{u \mid u, u^{(M)} \in L^2(-1,1),\ u^{(i)}(-1) = 0\ (0 \le i \le M-1), \\ & u^{(2i+1)}(1) = 0\ (0 \le i \le \lfloor (M-2)/2 \rfloor)\} \\ H(D,N) := & \{u \mid u, u^{(M)} \in L^2(-1,1),\ u^{(2i)}(-1) = 0\ (0 \le i \le \lfloor (M-1)/2 \rfloor), \\ & u^{(2i+1)}(1) = 0\ (0 \le i \le \lfloor (M-2)/2 \rfloor) \\ H(F,N) := & \{u \mid u, u^{(M)} \in L^2(-1,1),\ u^{(2i+1)}(1) = 0\ (0 \le i \le \lfloor (M-2)/2 \rfloor), \\ & \int_{-1}^{1} u(x)dx = 0\} \end{cases} \tag{9}$$

定理 3. ソボレフ不等式

$$\Big(\sup_{-1 \le x \le 1} |u(x)|\Big)^2 \le C \int_{-1}^{1} |u^M(x)|^2 dx = C \cdot \|u\|^2_{H^M(-1,1)} \tag{10}$$

の最良定数は

$$
\begin{cases}
C(C,C) = \dfrac{1}{2^{2M-1}(2M-1)\{(M-1)!\}^2}, & u \in H(C,C)\text{ のとき，[5]} \\
C(C,N) = \dfrac{2}{(2M-1)\{(M-1)!\}^2}, & u \in H(C,N)\text{ のとき} \\
C(D,N) = \dfrac{2^{2M}(2^{2M}-1)\zeta(2M)}{\pi^{2M}}, & u \in H(D,N)\text{ のとき，[4]} \\
C(F,N) = \dfrac{2\cdot 4^{2M-1}\Gamma(2M-1)\Gamma(2M+1)}{\Gamma(M)^2\Gamma(4M)}, & u \in H(F,N)\text{ のとき，ただし，}M \le 5
\end{cases}
\tag{11}
$$

である．

注意 1. 式 (8) の右辺に式 (11) の最良定数の逆数が現れる理由は，後の証明で述べるが，どちらの定数も境界値問題

$$
\begin{cases}
(-1)^M u^{(2M)}(x) = f(x), \quad (-1 \le x \le 1) \\
\textit{Boundary Conditions } B(C,C) \textit{ or } B(C,N) \textit{ or } B(D,N) \textit{ or } B(F,N)
\end{cases}
\tag{12}
$$

の *Green* 関数 $G(x,y)$ の対角線値の最大値 $\max_{-1\le y\le 1} G(y,y)$ で記述されるためである．よって，定理 *2* を証明することと定理 *3* を証明することは同値である．しかしながら，$G(y,y)$ の増減を調べることは境界条件によっては，必ずしも容易ではない *(*例えば，$B(C,N)$ の場合*)*．そこで，定理 *3* の $C(C,N), C(D,N), C(F,N)$ は $G(y,y)$ の増減を直接調べるのではなく，$G(y,y)$ の上界を与える関数を用意し，その関数の最大値と $G(y,y)$ の $[-1,1]$ における最大値が一致するという論法によって求めている *(Yamagishi[4]* は $C(D,N)$ を $G(y,y)$ の増減を直接調べ値を得ている*)*．ソボレフ不等式の最良定数を求めるという問題を経由せず，定理 *2* を直接証明することは，境界条件によっては難しいのではないだろうか？

注意 2. ソボレフ不等式の最良定数について，ディリクレ端-ディリクレ端，ノイマン端-ノイマン端等の場合については *[6]*，自由端-自由端については *[7]* を参照.

2 定理 2, 定理 3 の証明

2.1 定理 2 の証明

補題 1. $G(x,y)$ を (7) の境界条件 $B(C,C)$*(*または $B(C,N)$ または $B(D,N)$ または $B(F,N)$*)* をみたす *Green* 関数とする．このとき，

$$
\|p\|_{L^1(-1,1)} > \frac{1}{\max_{-1\le y\le 1} G(y,y)} \tag{13}
$$

が成り立つ.

Proof. Yang [2, Theorem 3.1] に従って記述する．まず，

$$
u(x) = \int_{-1}^{1} G(x,y)(-1)^M p(y)u(y)dy \tag{14}
$$

が成り立つ．上式の両辺に $|p(x)|u(x)$ をかけて積分すると

$$
\int_{-1}^{1} |p(x)|u^2(x)dx \le \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} |G(x,y)p(x)u(x)p(y)u(y)|dxdy \tag{15}
$$

が成り立つ．$G(x,y)$ は境界条件に応じて導入した関数空間 ($H(C,C)$ 等) の再生核になることがわかっているので ([5, 6, 7] とその参考文献を参照)

$$|G(x,y)| \leq \sqrt{G(x,x)}\sqrt{G(y,y)}$$

が成り立つ．よって式 (15) の右辺は

$$\leq \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\sqrt{G(x,x)}|p(x)u(x)|\sqrt{G(y,y)}|p(y)u(y)|dxdy$$
$$= \Big(\int_{-1}^{1}\sqrt{G(y,y)}|p(y)u(y)|dy\Big)^2 \leq \Big(\int_{-1}^{1}G(y,y)|p(y)|dy\Big)\Big(\int_{-1}^{1}|p(y)|u^2(y)dy\Big)$$

が成り立つ．$p\equiv 0$ のとき，解は自明解となるので $p\not\equiv 0$ である．従って

$$\int_{-1}^{1}|p(y)|u^2(y)dy > 0$$

よって

$$\int_{-1}^{1}G(y,y)|p(y)|dy \geq 1$$

が成り立つ．ゆえに

$$\int_{-1}^{1}|p(y)|dy \geq \frac{1}{\max_{-1\leq y\leq 1}G(y,y)} \tag{16}$$

ところで $G(x,y)$ は再生核の性質から

$$(1)\quad \partial_x^{2M}G(x,y) = 0 \qquad (-1<x,y<1,\quad x\neq y) \tag{17}$$

$$(2)\quad \text{Boundary Conditions } (B(C,C) \text{ etc.}) \tag{18}$$

$$(3)\quad \partial_x^iG(x,y)\Big|_{x=y+0} - \partial_x^iG(x,y)\Big|_{x=y-0} = \begin{cases} 0 & (0\leq i\leq 2M-2) \\ (-1)^M & (i=2M-1)\quad (-1<y<1) \end{cases} \tag{19}$$

をみたす ($B(F,N)$ の場合，少し異なるが，以下の議論に本質的な変更はない)．よって高々$2M-1$ 次の多項式で (3) から定数でないことがわかる．式 (16) で等号が成立するものとすると $\max_{-1\leq y\leq 1}G(y,y)$ を達成する y 以外の点で p は 0 でなければならない．$G(x,y)$ は多項式かつ定数でないのでそのような y は高々有限個の点の集合である．p の連続性から $p\equiv 0$ となるが，これは (7) が非自明解をもつという仮定に矛盾する． □

2.2 定理 3 の証明

$G(x,y)$ は定義 1 の各関数空間の再生核だから

$$u(y) = (\,u(x), G(x,y)\,)_M = \int_{-1}^{1}u^{(M)}(x)\,\partial_x^M G(x,y)\,dx \qquad (-1\leq y\leq 1) \tag{20}$$

$$G(y,y) = \int_{-1}^{1}\left|\partial_x^M G(x,y)\right|^2 dx \qquad (-1\leq y\leq 1) \tag{21}$$

が成り立つことに注意する．(20) に Cauchy-Schwarz 不等式を適用して

$$|\,u(y)\,|^2 \leq \int_{-1}^{1}|\,\partial_x^M\,G(x,y)\,|^2\,dx\int_{-1}^{1}\left|\,u^{(M)}(x)\,\right|^2 dx = G(y,y)\int_{-1}^{1}\left|\,u^{(M)}(x)\,\right|^2 dx$$

を得る．このことからソボレフ不等式 (10) の最良定数は $G(y_0,y_0):=\max_{-1\le y\le 1}G(y,y)$ であり，最良定数を達成する関数が $G(x,y_0)$ であることが示される．以上より定理 2 と定理 3 を示すには，共に $\max_{-1\le y\le 1}G(y,y)$ を求めればよいということがわかった．これを調べるために $G(x,y)$ の具体的な表現を知る必要がある．

$$K_j(x)\;=\;\begin{cases} x^{2M-1-j}\Big/(2M-1-j)! & (0\le j\le 2M-1)\\ 0 & (2M\le j)\end{cases}$$

を導入すると $H(C,C)$ の再生核は次のように表現される．

補題 2 ([5]). $H(C,C)$ の再生核は次の表現をもつ．

$$\begin{aligned}&G(x,y)\;=\\ &\quad\frac{(-1)^M}{2}\Bigg[\,K_0(\,|x-y|\,)+\\ &\quad\kappa^{-1}\left\{\left|\begin{array}{c|c} K_{i+j}(2) & K_i(1-y)\\ \hline K_j(1+x) & 0\end{array}\right|+\left|\begin{array}{c|c} K_{i+j}(2) & K_i(1+y)\\ \hline K_j(1-x) & 0\end{array}\right|\right\}\Bigg]\\ &\quad(-1<x,y<1)\end{aligned}\tag{22}$$

ここで κ は行列 $\Big(\;K_{i+j}\;\Big)(2)$ の行列式である．

この表現公式から (詳しい計算は [5] を参照下さい)

$$\begin{aligned}&G(y,y)\;=\\ &(-1)^M\kappa^{-1}\left|\begin{array}{c|c} K_{i+j}(2) & K_i(1-y)\\ \hline K_j(1+y) & 0\end{array}\right|_{0\le i,j\le M-1}\;=\\ &\binom{2(M-1)}{M-1}\frac{1}{K_0(2)}\,K_0(1+y)\,K_0(1-y)\;=\;C(C,C)\,(1-y^2)^{2M-1}\\ &(-1<y<1)\end{aligned}\tag{23}$$

を示すことができ，

$$\begin{aligned}&C(C,C)\;=\;\sup_{|y|\le 1}G(y,y)\;=\;G(0,0)\;=\\ &(-1)^M\kappa^{-1}\left|\begin{array}{c|c} K_{i+j}(2) & K_i(1)\\ \hline K_j(1) & 0\end{array}\right|_{0\le i,j\le M-1}\;=\\ &\frac{1}{2^{2M-1}\,(2M-1)!}\binom{2(M-1)}{M-1}\;=\;\frac{1}{2^{2M-1}\,(2M-1)\,((M-1)!)^2}\end{aligned}\tag{24}$$

を得る．次に，$H(C,N)$ の場合について考える．補題 2 と同様な計算により

$$\begin{aligned}&G(y,y)\;=\\ &(-1)^M\eta^{-1}\left|\begin{array}{c|c} K_{2i+j+1}(2) & K_{2i+1}(1-y)\\ \hline K_j(1+y) & 0\end{array}\right|_{0\le i,j\le M-1}\\ &(-1<y<1)\end{aligned}\tag{25}$$

を示すことができる．ただし，η は行列 $\left(K_{2i+j+1} \right)(2)$ の行列式である．しかしながら，この公式から，式 (23) のような一般の M に対する簡単な表現を見出すことはできない．実際,

$$G(y,y)=\begin{cases}\frac{-\left((1+y)^3\left(-5+3\,y\right)\right)}{24}, & M=2\\ \frac{-\left((1+y)^5\left(-139+175\,y-65\,y^2+5\,y^3\right)\right)}{7680}, & M=3\\ \frac{-\left((1+y)^7\left(-2113+4067\,y-2954\,y^2+966\,y^3-133\,y^4+7\,y^5\right)\right)}{2580480}, & M=4\end{cases}$$

となってしまう．そこで，直接 $G(y,y)$ の増減を調べることをしない以下のような方法をとることにする．次の補題を準備する (証明は [5, 6, 7] を参照).

補題 3.

$$\begin{cases} H_{a,b}(C,C) := \{u\,|\,u,u^{(M)}\in L^2(a,b),\ u^{(i)}(a)=u^{(i)}(b)=0\ (0\le i\le M-1)\}\\ H_{a,b}(D,D) := \{u\,|\,u,u^{(M)}\in L^2(a,b),\ u^{(2i)}(a)=u^{(2i)}(b)=0\ (0\le i\le \lfloor (M-2)/2\rfloor)\\ H_{a,b}(F,F) := \{u\,|\,u,u^{(M)}\in L^2(-1,1),\ \int_a^b u(x)x^i dx=0,\ (0\le i\le M-1)\} \end{cases} \tag{26}$$

の各再生核の対角線値 $G(y,y)$ の $[a,b]$ における最大値は次のように表現される．

$$\begin{cases} C_{a,b}(C,C) := \dfrac{(b-a)^{2M-1}}{4^{2M-1}(2M-1)\{(M-1)!\}^2}, & H_{a,b}(C,C)\\ C_{a,b}(D,D) := \dfrac{2(b-a)^{2M-1}(2^{2M}-1)}{(2\pi)^{2M}}\zeta(2M), & H_{a,b}(D,D)\\ C_{a,b}(F,F) := \dfrac{(b-a)^{2M-1}\Gamma(2M-1)\Gamma(2M+1)}{\Gamma(M)^2\Gamma(4M)}, & H_{a,b}(F,F),\ M\le 5 \end{cases}$$

(定理 3 の証明) $C(C,N)$ の場合を示す．$u\in H(C,N)$ に対して $\tilde{u}$ を次のように定義する．

$$\tilde{u}(x) := \begin{cases} u(x), & (\le x\le 1)\\ u(2-x), & (1\le x\le 3)\end{cases} \tag{27}$$

このとき，$\tilde{u}\in H_{-1,3}(C,C)$ であることに注意する．何故ならば，$x=1$ に関す偶対称性から $\tilde{u}^{(i)}(-1)=\tilde{u}^{(i)}(3)=u^{(i)}(-1)=0\ (0\le i\le M-1)$ が成り立つ．次に $x=1$ において $\tilde{u}$ が $M-1$ 回微分可能であることを示す．
M が偶数のとき：定義 1 より $\lfloor (M-2)/2\rfloor=(M-2)/2$, また $u\in H(C,N)$ より $x=1$ でノイマン境界条件をみたすので

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{(1)}(1-0)=0=\tilde{u}^{(1)}(1+0)\\ \tilde{u}^{(3)}(1-0)=0=\tilde{u}^{(3)}(1+0)\\ \vdots\\ \tilde{u}^{(M-1)}(1-0)=\tilde{u}^{(M-1)}(1+0)=0\end{gathered}$$

また，$x=1$ に関する偶対称性から

$$\begin{gathered}\tilde{u}^{(0)}(1-0)=\tilde{u}^{(0)}(1+0)\\ \tilde{u}^{(2)}(1-0)=\tilde{u}^{(2)}(1+0)\\ \vdots\\ \tilde{u}^{(M-2)}(1-0)=\tilde{u}^{(M-2)}(1+0)\end{gathered}$$

同様に M が奇数の場合も $x=1$ において $\tilde{u}$ は $M-1$ 回微分可能である．よって，$\tilde{u}\in H_{-1,3}(C,C)$ である．ゆえに補題 3 より

$$\Big(\sup_{-1\le x\le 3}|\tilde{u}(x)|\Big)^2\le C_{-1,3}(C,C)\|\tilde{u}\|^2_{H^M(-1,3)}=2C_{-1,3}(C,C)\|\tilde{u}\|^2_{H^M(-1,1)} \tag{28}$$

が成り立つ．$\tilde{G}(x,y)$ を $H_{-1,3}(C,C)$ の再生核とする．式 (28) で $\tilde{u}$ に $\tilde{G}(x,1)$ を代入すると等号が成立することがわかる．ところで，$\tilde{G}(x,1)$ は $H_{-1,3}(C,C)$ の元だから C^{M-1} 級であり，$x=1$ に関して偶対称性をもつ．よって，$\tilde{G}(x,1)$ は $x=1$ において ノイマン境界条件をみたす．すなわち，$\tilde{G}(x,1)$ の $[-1,1]$ への制限は $H(C,N)$ の元となる．以上より $\tilde{G}(x,1)$ の $[-1,1]$ への制限が最良定数 $C(C,N)$ 達成する関数であり，$C(C,N)=2C_{-1,3}(C,C)$ であることが証明されたことになる．$C(D,N)$, $C(F,N)$ ついても同様な議論が成り立つ． □

定理 3 を証明することは定理 2 を証明することと同値なので，定理 2 も証明された．

References

[1] Hartman and Winter, On an oscillation criterion of Lyapunov, *Amer. J. Math.*, 73 (1951), 885-890.

[2] X. Yang, On inequalities of Lyapunov type, *Appl. Math. and Comp.* , 134 (2003), 293–300.

[3] K. M. Das and A. S. Vatsala, Green's function for $n-n$ boundary value problem and analogue of Hartman's result, *J. Math. Anal. and Appl.*, 51 (1975), 670-677.

[4] H. Yamagishi, The best constant of Sobolev inequality corresponding to Dirichlet-Neumann boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$, *submitted*

[5] K. Watanabe, Y. Kametaka, H. Yamagishi, A. Nagai, K. Takemura, The best constant of Sobolev inequality corresponding to the clumped boundary value problem for $(-1)^M(d/dx)^{2M}$, *submitted*

[6] 亀高惟倫，山岸弘幸，渡辺宏太郎，永井敦，武村一雄，リーマンゼータ関数と 3 系列のソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌，第 18 巻 第 1 号 (2008)， 29-40.

[7] 武村一雄，永井敦，亀高惟倫，渡辺宏太郎，山岸弘幸，$(-1)^M(d/dx)^{2M}$ に対する両端自由端条件境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌，第 18 巻 第 1 号 (2008)，41-64.