

TI-89 を活用した数学教育

福井工業高等専門学校・一般科目教室 長水 壽寛 (Toshihiro Nagamizu)
Course of General Education,
Fukui National College of Technology

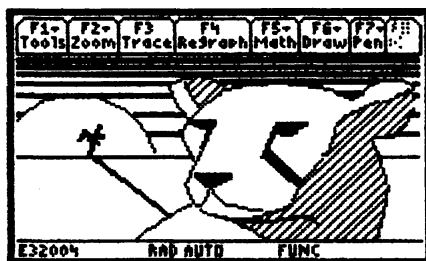
1 これまでの福井高専の経緯

福井工業高等専門学校（以下、福井高専）では、平成 12 年度より、新入生全員に TI-89 を購入させ、授業において適宜利用している。ここでは、TI-89 について簡単に説明しておく。TI-89 はいわゆる「数式処理機能付きグラフ電卓」であり、パソコン用の数式処理ソフト Derive が組み込まれている。また、「グラフ電卓」ということで、当然のように 1 変数関数、媒介変数、極方程式などで表示された関数のグラフも描画できる。Texas Instruments 社のグラフ電卓の中では、この TI-89 で、高専で学習する数学の内容のほとんどがカバーできる。

この TI-89 を授業で活用するに当たり、福井高専ではこれまでに多くの教材開発を行ってきた。TI-89 の利用方法から探究課題まで、プリントにまとめて学生に配布している。探究課題については 2 章、3 章で、いくつかの例をあげながら説明する。また、毎年 6 月には福井高専主催の「グラフ電卓活用研究会」を行い、授業での実践事例報告や情報交換を行っている。

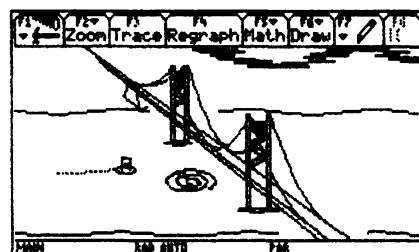
平成 16 年度からは、「全国関数グラフアートコンテスト」を福井高専が事務局として開催しており、今年で 5 回目となる。制限部門（関数の個数が 10 個まで）と自由部門（関数の制限がない）に分けて行い、中学、高校、高専、大学の学生から作品を募集している。福井高専では、「関数グラフアートの作成」を夏休みの課題として与え、じっくりと取り組ませている。

（作品例） 第 1 回（2004 年）最優秀作品



Cheetah:福井高専 (3 年)

第 3 回（2006 年）最優秀作品



鳴門海峡:清風高校 (1 年)

2 TI-89の利用について

TI-89の特徴は、そのコンパクトな大きさであり、「いつでも、どこでも」使えるという手軽さである。数学の授業にテクノロジーを取り入れるときに問題となるのが、教室などのハード面である。コンピュータを利用する場合、そのほとんどが別の教室への移動を伴う。また、机の大きさも大きな問題である。机の上にコンピュータを置いて、教科書、ノートを開くことは机の大きさから見てかなり難しい。専用のコンピュータ室でさえ、机の大きさは教室の広さの制限もありそれほど大きくないのが現状である。ところがTI-89程度の大きさなら、机の上に教科書やノートを開いたまま使用することが可能である。さらに、携帯電話やコンパクトなゲーム機を使いこなしている現在の学生世代にとっては、TI-89程度の大きさを使うことに慣れているのである。また履歴エリアには設定により、99個もの式を書いておくことができ、電源を入れると、直前に電源を切った状態から作業を再開することができる。このように、TI-89は「いつでも、どこでも」使える道具なのである。

その具体的な利用方法には、計算の補助や答えの確認、グラフの確認があり、その他に思考を助ける道具としても利用できる。TI-89は文字式の計算（展開や因数分解）ができ、方程式も解け、微分・積分の計算もできるで、その使用については常に「計算力が落ちる（身につかない）」という批判がある。福井高専では、TI-89の使用に対して、これまでどおりの授業も行い、手計算による計算やグラフの概形の描画ができるように指導し、小テスト等も行っている。そしてその計算結果等をTI-89により確認させることで、TI-89に慣れるようにしている。

思考を助ける道具としての利用には、教材として「探究課題」を使用する。教科書の問題を発展させた試行錯誤を用いるような課題を出し、学生たちに考えさせている。福井高専では、それまでに使われていた課題のほかに、多くの探求課題を開発し、授業で実践してきた。

これらの利用方法以外では、煩雑な計算の軽減や数学実験での使用がある。同じ計算の繰り返しや、計算方法はわかっているが次数が大きかったり、項が多かったりする場合にはTI-89を使うと便利である。特に、計算それ自体が授業の目的でない場合には、学生の心理的な負担も軽減でき、授業の目的も達成することが可能となる。また、TI-89はセンサーと接続することで、さまざまなデータを扱い、処理することができる。このような、実データを扱い、モデリングの授業を行うこともできるのである。

しかし受験や教育環境の整備の遅れ、カリキュラム、教科書の問題、教師の心理的な負担などから、このTI-89のようなテクノロジーはまだまだ一般的には普及していないのが現状である。

3 探究課題

福井高専ではこれまでにTI-89を用いた探究課題の実践に数多く取り組んできた。ここではそのいくつかを紹介する。

【 $x^n - 1$ の因数分解】

$x^n - 1$ の n に 2 から 順に 自然数を代入し、その因数分解の結果からどのような規則や法則があるか見つける課題である。

【 $(a + b)^n$ の展開】

$(a + b)^n$ の n に 2 から 順に 自然数を代入し、それを展開した式の係数からパスカルの三角形を作り、その秘密を探る課題である。

【分数関数の積分】

分母が 2 次式である分数関数の不定積分を TI-89 で計算し、その結果を分類し、自分で公式を見つめる課題である。

【関数グラフアート：アルファベット】

関数式を用いて、アルファベットを描く課題である。媒介変数表示を用いる。

学生のレポート例（分数関数の積分）

$\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx$

D, C に 数を入れたときの答えのパターンは？

<パターン①> $b^2 - 4c > 0$
 分母 $(x^2 + bx + c)$ が 因数分解可能なとき。
 (条件) $b^2 - 4c > 0$

$$\textcircled{1} = \frac{-\log\left(\frac{\dots}{\sqrt{b^2 - 4c}}\right)}{\dots}$$

() の中には、 $\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$ の 2 つの根をそれぞれ代入。
 例えば、 $\int \frac{1}{x^2 + 6x + 8} dx$ のとき、
 $x^2 + 6x + 8$ を 因数分解すると $(x+2)(x+4)$ であり、TI-89 で 解いてみると $-\log\left(\frac{x+4}{x+2}\right)$
 分母は $(x+\alpha)$ で 分子が $(x-\beta)$ になっていて、
 分子 $(x-\alpha)$ 、分母 $(x-\beta)$ のとき $\alpha < \beta$
 分子 $(x-\alpha)$ 、分母 $(x-\beta)$ のとき $\alpha > \beta$
 となっていた。

<パターン②>
 $\int \frac{1}{x^2 + bx + c} dx \sim \dots$
 $b=2, c=1$ のときは
 分母が 0 になって (3) まで 左の式で 2 階
 $b^2 - 4c = 0$ のとき (条件)
 ② 因数分解して 答 $(x+\dots) = (x+\dots)$ の形
 答は 分子に、分子は $\frac{-1}{\dots}$

<パターン③>
 分母 $(x^2 + bx + c)$ が 因数分解不可のとき

① b が 偶数のとき

$$\frac{2 \cdot \text{Tan}^{-1}\left(\frac{2x+b}{\sqrt{4c-b^2}}\right)}{\sqrt{4c-b^2}}$$

② b が 奇数のとき

$$\text{Tan}^{-1}\left(\frac{x-\frac{b}{2}}{\sqrt{c-\left(\frac{b}{2}\right)^2}}\right)$$

(証明)

$$\text{Tan}^{-1} x = \int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{()^2 + ()^2}$$

$$2x + b, bx + c = 1$$

$$x = -\frac{c}{b}$$

4 3つの対話

グラフ電卓のようなテクノロジーを授業で用いることで、教室の中にさまざまな変化をもたらすことができるが、ここでは以下の「3つの対話」を取り上げたい。

(1) 教師（教員）との対話

グラフ電卓のようなテクノロジーを授業で活用することで、「教師中心の授業」から「学生（生徒）中心」の授業に変えることができる。すべての授業でなくても、テクノロジーを用いたときだけでも、その授業を学生中心にすることができる。そのとき、教師の一方通行であった授業が、教師と学生の間に対話が生じるようになる。また、探究課題では、教師が予想しなかったような解答をする学生が出てくる。そのような時、教師は学生を素直に褒めることができ、それがまた学生の学習する意欲へとつながっていく。自然とそのような変化が起こるのである。

(2) 生徒（学生）同士の対話

教師との対話だけでなく、テクノロジーは生徒同士の対話も活性化させる。テクノロジーを用いた計算結果や、その結果から導かれた数学的な性質などを生徒同士で確認していく。また、他の生徒の結果を見たり、聞いたりすることで思考が進んでいくこともある。彼らがテクノロジーを用いて見つけた内容は、まだ学習していない内容であったり、教科書にないものであったりすることが多く、自分が導いた結果を確認するためにも生徒同士で対話する必要が出てくるのである。

(3) 自分自身との対話

さらに、テクノロジーを用いることで「自分自身との対話」が起こる。いわゆる『もう一人の自分』との対話である。「試行錯誤している自分」が、「その結果から何かを導き出す自分」や「次の操作を指示する自分」と対話するのである。これは「メタ認知」と呼ばれるもので、数学的な問題解決過程において、自分の思考や行動を指示し、監視（モニター）し、操作（コントロール）するのである。テクノロジーを用いることで、それらを意識することができ、「メタ認知」を育成することが可能となる。教師との対話や生徒同士の対話の前に、必ず「自分自身との対話」が行われているはずであり、それを意識化することでより良いメタ認知が育成されると思われる。

5 何を教えるのか？

この問いは、いつの時代も問われるものであるが、現在の数学教育における答えを考えていきたい。高度な情報化社会になり、グラフ電卓のようなテクノロジーが教室で活用できるようになるときに、数学の授業で学生たちに何を教えていくのか？どのような力を身につけさせるべきであるのか？

〈計算技能や数学的な知識・考え方〉

これは普遍的なもので、数学の授業であれば必ず教えなくてはならない。テクノロジーを使う、使わないにかかわらず、いわゆる「数学的経験と知識」がなければ問題の対象となる事柄の意味が理解できない、自分が計算していることの意味がわからないのである。計算技能は、単なる「テクニック」でなく、それを用いて問題を解くことで判断を伴う「スキル」になっていく。そのためにも計算練習や練習問題は必要であり、基本的な計算技能や知識を学習する必要がある。

〈問題解決の方法〉

既習の知識を組み合わせ、未知の問題に取り組むことで、その中から問題解決の方法が身につく。できればそれを意識的に行いたい。これまでは、そのような問題を設定するときに、解決するための途中の計算で躓くことがあり、それが困難となっていたことが多いと思われる。しかし、グラフ電卓のようなテクノロジーを用いることで、煩雑な計算を間違いなく実行することができ、必要であれば、グラフにしたり、表を用いたりすることもできる。本来の目的である「問題解決の方法」を体験でき、身につけることができるのである。テクノロジーを用いることで、多様な問題設定が可能となる。

〈モデリング能力〉

近年の社会状況の変化により求められるようになってきた能力である。問題解決能力とも関係するが、現実の社会で起きている問題を解決するために条件をある程度整理し、モデル化して考えることが多い。これまでの数学の授業で扱っていた問題はすでにモデル化された、すなわち「理想化された」状況での問題であった。しかし、これから求められる能力には、理想化された問題を解く能力だけでなく、「理想化する能力」すなわち、「モデリング能力」が必要とされる。どのようにモデル化するかで導かれる答えが変化するため、なぜそのようなモデル化をしたのかが問われる。また、いくつかのモデル化から得られた答えを比較、検討する能力も必要とされる。TI-89のようなテクノロジーを用いると、数学実験から得た実データ（理想化されていないデータ）を扱うことができ、モデリングが必要となる問題も設定しやすくなる。

〈メタ認知〉

4章では、自分自身との対話によってメタ認知が意識されることを述べた。これまでは、メタ認知の育成は付随的な感じで捉えられていたように思うが、テクノロジーを用いることで、メタ認知の育成を数学教育の目標の一つとすることができる。教員も学生も、メタ認知を意識しながら数学の問題を解いていくのである。メタ認知的知識は価値観を形成し、メタ認知的技能は数学の問題解決に留まらず、さまざまな問題を解決することに応用することができる。メタ認知、すなわち「もう一人の自分」を育成することで初めて出会う問題にも何らかの解決を見出そうと取り組めるのである。グラフ電卓のようなテクノロジーは、自分自身との対話を促し、メタ認知を育成するきっかけを与えるのに最適な道具である。

6 まとめ

TI-89のようなテクノロジーを学校教育の場で利用するうえで、今後は教材研究のみならず、テクノロジーの利用を前提としたカリキュラムの構築、教科書の作成、評価方法に関する研究が進むことを期待したい。またそのためにも、多くの教員がテクノロジーを利用しやすい環境となることが望まれる。

参考文献

- 1) 阿蘇和寿「数学の授業における学生の探究活動—テクノロジーの有効な活用に向けて—」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.9, No.1, pp.31-50, 2002
- 2) 井之上和代「TI-89を利用した2次関数の学習から見る高専の数学教育」, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第34号, pp.95-105, 2000
- 3) 井之上和代「TI-89を利用した関数の学習～2次関数の学習課題からの発展～」, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第35号, pp.77-93, 2001
- 4) 井之上和代「グラフアートと関数学習についての調査—グラフ電卓長期使用の観点から—」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.12, No.1, pp.15-34, 2005
- 5) 梅野善雄「グラフ電卓が切り開く数学教育の新世界」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.7, No.1, pp.1-20, 2000
- 6) 梅野善雄「数式処理電卓を用いた微積分教育の改善」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.8, No.1, pp.13-30, 2001
- 7) 公庄庸三「数式処理電卓は数学教育を蘇生させることができる」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.7, No.1, pp.146-150, 2000
- 8) 坪川武弘 他4名「グラフ電卓 TI-89を活用した新しい数学教育の試み」, 高専教育 25号, pp.251-256, 2002
- 9) 長水壽寛「高専生を対象としたアンケートによるメタ認知の調査研究」, 第33回数学教育論文発表会論文集, pp.403-408, 2000
- 10) 長水壽寛「高専生を対象としたアンケートによるメタ認知の調査研究—教師の言葉に関する分析—」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.8, No.1, pp.1-8, 2001
- 11) 長水壽寛 他6名「テクノロジーを用いた数学教育の理論と実践」, 高専教育 26号, pp.339-344, 2003
- 12) 長水壽寛, 宮田一郎「高専における数学教育のカリキュラムに関する考察」, 日本数学教育学会高専・大学部会論文誌, Vol.13, No.1, pp.61-70, 2006
- 13) 柳原祐治「「解析区」の授業における指導実践～「微分法」とは何か～」, 福井工業高等専門学校研究紀要 自然科学・工学, 第37号, pp.137-145, 2003
- 14) 柳原祐治「数学教育における新しいプログラムとツールの使用について」, 高専教育, 第28号, pp.501-506, 2005