数理解析研究所講究録
第 1637 巻 2009 年 107-119

プラグフロー反応拡散方程式の可到達性と可観測性

Reachability and Observability of a Plug-Flow Reactor Diffusion Equation

神戸大学・工学研究科　中桐 信一 (Shin-ichi Nakagiri)
Graduate School of Engineering,
Kobe University
鹿児島大学・学術情報基盤センター　佐野 英樹 (Hideki Sano)
Computing and Communications Center,
Kagoshima University

1　はじめに

近年, 環境問題との関連からバイオプロセスの制御に関する研究が活発になされており, そのモデルとなる方程式が多く導出されている (例えば, 文献 [1, 3, 11] やその中の参考文献を参照). 本論文では, その中でも最も基本的な拡散の影響を考慮したプラグフロー反応方程式を取り上げ, 可到達性ならびに可観測性について考察する. C_1 を反応物, C_2 を生成物, b を反応の化学量論係数として, 化学反応 $C_1 \to b\,C_2$ を表す動的モデルは, 文献 [11] の中で詳細に記されているように, 拡散の影響まで考慮してモデル化すると二つの移流拡散方程式によって記述される. 本論文では, 反応器の長さを 1 として正規化したプラグフロー反応拡散モデルを取り上げる.

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,x) - k_0 z_1(t,x)\\
&\frac{\partial z_2}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,x) + bk_0 z_1(t,x), \quad (t,x)\in(0,\infty)\times[0,1]\\
&D\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,0) - \alpha z_1(t,0) = -\alpha u_1(t), \quad D\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,0) - \alpha z_2(t,0) = -\alpha u_2(t)\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,1) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t\in(0,\infty)\\
&z_1(0,x) = z_{10}(x), \quad z_2(0,x) = z_{20}(x), \quad x\in[0,1]
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで, $z_1(t,x)$, $z_2(t,x)\in\mathbf{R}$ はそれぞれ時刻 t, 位置 $x\in[0,1]$ における物質 C_1, C_2 の濃度を表し, $u_1(t)$, $u_2(t)\in\mathbf{R}$ は制御入力を表す. また, $\alpha>0$ は流体の空塔速度, $D>0$ は物質の拡散係数, k_0, b は反応プロセスに依存した正の定数である.

文献 [11] では, システム (1) に対する近似システムが $u_2\equiv 0$ のとき, 適当な有限次元部分空間において可到達となることが, 状態作用素の共役作用素によって生成される C_0-半群を用いて示されている. また, 出口での物質 C_1, C_2 の濃度 $z_1(t,1)$, $z_2(t,1)$ が共に測定可能のと

き, 可観測となるための観測作用素の満たすべき必要かつ十分条件が, 近似システムに対して与えられている. 本論文では, 文献 [11] とは対照的に, 元のシステムを近似することなしに可到達性ならびに可観測性について議論する. その得られた解析結果は目新しいものであり, 近似システムに対する [11] の不十分な結果を補って余りある結果になっている.

- システム (1) は, 近似システムを考察することなく可到達となる. さらに $u_2 \equiv 0$ のとき, システム (1) は例外的な D, α と k_0 の値を除いて可到達となる. その例外的な場合についても不可到達部分空間が求められる.

- 境界出力方程式を伴うプラグフロー反応拡散方程式に対しても, 可観測性が示される. さらに一方の物質の濃度のみが測定可能なときについても, 可観測性と例外的な場合の不可観測部分空間が与えられる.

$D=0$ の場合は, 佐野 [6] により半群理論と特性方程式解析に基づく完全な結果が得られている. 本論文の結果は, [6] とは全く様相が異なっている. 実際, [6] の定理2と異なり, 拡散の影響により $u_2 \equiv 0$ のときも例外的な場合を除いて可到達となり, さらに例外的な場合もその不可到達部分空間は有限次元になる. またこの方程式系の境界入力による安定化の問題については, 本報告集の 佐野, 中桐 [8] を参照されたい.

2 準備

本節では, 準備としてシステム (1) に現れる作用素のスペクトル解析とその生成する半群について述べる. $L^2(0,1)$ を内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関するヒルベルト空間とし, 非有界作用素 $A_1 : D(A_1) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ を

$$(A_1\varphi)(x) = -D\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + \alpha\frac{d\varphi(x)}{dx} + k_0\varphi(x) \tag{2}$$

$$D(A_1) = \{\, \varphi \in H^2(0,1)\,;\, D\frac{d\varphi}{dx}(0) - \alpha\varphi(0) = 0,\ \frac{d\varphi}{dx}(1) = 0 \,\} \tag{3}$$

のように定義すると, 作用素 $-A_1$ は $L^2(0,1)$ において Riesz-スペクトル作用素となる. さらに $-A_1$ のスペクトルは, 可算個の固有値の集合 $\{-\lambda_n :\ n \geq 1\}$ からなる. また, その対応する固有関数の集合 $\{\phi_n :\ n \geq 1\}$ をもつ. $\{\lambda_n :\ n \geq 1\}$ はつぎのようにして定められる:

$$\lambda_n = \frac{s_n^2 + \alpha^2}{4D} + k_0 > \frac{\alpha^2}{4D} + k_0 > 0, \quad \forall n \geq 1 \tag{4}$$

ここで $\{s_n :\ n \geq 1\}$ は

$$0 < s_n < s_{n+1}, \quad \forall n \geq 1 \tag{5}$$

なるようなつぎの超越方程式の根である:

$$\tan\left(\frac{s}{2D}\right) = \frac{2\alpha s}{s^2 - \alpha^2}, \quad s > 0 \tag{6}$$

$\{s_n :\ n \geq 1\}$ は漸近挙動

$$s_n = 2(n-1)D\pi + o(1) \tag{7}$$

をもち, これから

$$0 < \lambda_n < \lambda_{n+1} \to \infty, \quad \lambda_{n+1} - \lambda_n \to \infty \tag{8}$$

もわかる. さらに, つぎの固有関数の具体的表示が得られる.

$$\phi_n(x) = K_n e^{\frac{\alpha}{2D}x} \left[\cos\left(\frac{s_n}{2D}x\right) + \frac{\alpha}{s_n} \sin\left(\frac{s_n}{2D}x\right) \right], \quad \forall n \geq 1 \tag{9}$$

ここで K_n は $L^2(0,1)$ における正規化のための一様有界な 0 でない定数とする. 以下記号の簡単のため $' = \frac{d}{dx}$, $'' = \frac{d^2}{dx^2}$ と表記する. A_1 の共役作用素は

$$\begin{aligned} &(A_1^*\varphi)(x) = -D\varphi''(x) - \alpha\varphi'(x) + k_0\varphi(x), \\ &D(A_1^*) = \{\, \varphi \in H^2(0,1)\,;\ \varphi'(0) = 0,\ D\varphi'(1) + \alpha\varphi(1) = 0 \} \end{aligned} \tag{10}$$

で与えられる. $-A_1^*$ もまた Riesz-スペクトル作用素となる. $\sigma(-A_1^*) = \sigma(-A_1) = \{-\lambda_n :\ n \geq 1\}$ であり, 対応する $-A_1^*$ の固有関数の集合を $\{\psi_n :\ n \geq 1\}$ と書くと

$$\psi_n(x) = M_n \phi_n(1-x), \quad x \in [0,1] \tag{11}$$

で与えられる. ここで定数 M_n は $\{\phi_n\}$ と $\{\psi_n\}$ が双正規完全直交系 (biorthonormal systems) になるように選ばれているとする. M_n は一様有界である. このとき, 2 種の固有関数展開

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \psi_n \rangle \phi_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \varphi, \phi_n \rangle \psi_n, \quad \forall \varphi \in L^2(0,1) \tag{12}$$

が成り立つ.

【補題 1】 作用素 $-A_1$ は $L^2(0,1)$ において 指数安定な C_0-半群 e^{-tA_1} を生成する. すなわち, ある定数 $M_1 > 0$ が存在して

$$\|e^{-tA_1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq M_1 \exp\left(-\left(\frac{\alpha^2}{4D} + k_0 \right) t \right), \quad \forall t \geq 0 \tag{13}$$

がいえる. さらに C_0-半群 e^{-tA_1} は, すべての $\varphi \in L^2(0,1)$ と $t > 0$ に対してつぎのフーリエ級数展開表示をもつ:

$$\left(e^{-tA_1}\varphi \right)(x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t} \langle \varphi, \psi_n \rangle \phi_n(x), \quad x \in [0,1] \tag{14}$$

つぎに, 作用素 $A_2 = A_1 - k_0 I$ を考える. つまり

$$(A_2\varphi)(x) = -D\varphi''(x) + \alpha\varphi'(x), \quad D(A_2) = D(A_1) \tag{15}$$

とする. A_2 に対してもつぎの補題がいえる.

【補題 2】 作用素 $-A_2$ は $L^2(0,1)$ において 指数安定な C_0-半群 e^{-tA_2} を生成する. すなわち, ある定数 $M_2 > 0$ が存在して

$$\|e^{-tA_2}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \leq M_2 \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4D} t \right), \quad \forall t \geq 0 \tag{16}$$

がいえる．さらに，$\sigma(-A_2)=\{-(\lambda_n-k_0):\ n\geq 1\}$ であり，e^{-tA_2} はすべての $\varphi\in L^2(0,1)$ と $t>0$ に対してつぎの級数展開表示をもつ:

$$\left(e^{-tA_2}\varphi\right)(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\lambda_n-k_0)t}\langle\varphi,\psi_n\rangle\phi_n(x),\quad x\in[0,1] \tag{17}$$

ここでシステム (1) に対する空間設定と作用素の導入を行う．まず，内積

$$\langle\varphi,\psi\rangle_X:=\int_0^1\{\varphi_1(x)\psi_1(x)+\varphi_2(x)\psi_2(x)\}dx,\quad \varphi=[\varphi_1,\varphi_2]^T,\ \ \psi=[\psi_1,\psi_2]^T\in X$$

を有するヒルベルト空間 $X:=[L^2(0,1)]^2$ を導入する．非有界作用素 $A:D(A)\subset X\to X$ を

$$A\varphi=\begin{bmatrix}-A_1 & 0\\ bk_0 & -A_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}D\varphi_1''-\alpha\varphi_1'-k_0\varphi_1\\ D\varphi_2''-\alpha\varphi_2'+bk_0\varphi_1\end{bmatrix},\quad \varphi=[\varphi_1,\varphi_2]^T\in D(A),$$

$$\begin{aligned}D(A)=\{\,\varphi=[\varphi_1,\varphi_2]^T\in[H^2(0,1)]^2;\ &D\varphi_1'(0)-\alpha\varphi_1(0)\\ &=D\varphi_2'(0)-\alpha\varphi_2(0)=0,\ \varphi_1'(1)=\varphi_2'(1)=0\,\}\end{aligned} \tag{18}$$

のように定義すると，作用素 A は X において C_0-半群 $e^{tA}=:T(t)$ を生成する．このとき，$T(t)$ は半群の摂動定理により (cf. [2], [9])

$$T(t)=\begin{bmatrix}e^{-tA_1} & 0\\ U(t) & e^{-tA_2}\end{bmatrix} \tag{19}$$

と表現され

$$U(t)=bk_0\int_0^t e^{-(t-s)A_2}e^{-sA_1}ds \tag{20}$$

で与えられる．式 (14) と (17) から任意の $\varphi\in L^2(0,1)$ に対し，$U(t)\varphi$ はつぎの級数表示をもつことがわかる．

$$\left(U(t)\varphi\right)(x)=b\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\lambda_n-k_0)t}\langle\varphi,\psi_n\rangle\phi_n(x)-b\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\langle\varphi,\psi_n\rangle\phi_n(x),\quad \forall x\in[0,1] \tag{21}$$

以上の結果からつぎの補題が示される．

【補題 3】 作用素 A は $X=[L^2(0,1)]^2$ において指数安定な C_0-半群 $e^{tA}=:T(t)$ を生成する．すなわち，ある定数 $M>0$ が存在して

$$\|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq M\exp\Big(-\frac{\alpha^2}{4D}t\Big),\quad \forall t\geq 0 \tag{22}$$

さらに $T(t)$ は，すべての $\varphi=[\varphi_1,\varphi_2]^T\in X$ と $t>0$ に対してつぎの級数展開表示をもつ:

$$\left(T(t)\varphi\right)(x)=[z_1(\varphi;t,x),z_2(\varphi;t,x)]^T \tag{23}$$

ここで

$$z_1(\varphi;t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\langle\varphi_1,\psi_n\rangle\phi_n(x),\quad x\in[0,1] \tag{24}$$

$$z_2(\varphi;t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-(\lambda_n-k_0)t}\langle b\varphi_1+\varphi_2,\psi_n\rangle\phi_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\lambda_n t}\langle b\varphi_1,\psi_n\rangle\phi_n(x),\quad x\in[0,1] \tag{25}$$

補題 1〜 補題 3 の証明については文献 [11] を参照されたい．

注意 1 作用素 A は積空間 X において，一般には Riesz-スペクトル作用素にならない．

3 境界制御系

本節では, システム (1) および $u_2 \equiv 0$ としたシステムが共に文献 [2] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系を定義することを示す. まずシステム (1) が, X 上の境界制御系

$$\frac{dz(t)}{dt} = \mathfrak{A}z(t), \quad z(0) = z_0 \in X,$$
$$\mathfrak{B}z(t) = u(t) \tag{26}$$

を定義することを示す. ここで $z(t) := [z_1(t,\cdot), z_2(t,\cdot)]^T$, $z_0 := [z_{10}(\cdot), z_{20}(\cdot)]^T$, $u(t) := [u_1(t), u_2(t)]^T$ である. 系 (26) において, 状態作用素 $\mathfrak{A} : D(\mathfrak{A}) \subset X \to X$ および境界作用素 $\mathfrak{B} : D(\mathfrak{B}) \subset X \to \mathbf{R}^2$ は以下のように定義される. $\mathfrak{A}$ の定義域 $D(\mathfrak{A})$ は

$$D(\mathfrak{A}) = \{ \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in [H^2(0,1)]^2;\ \varphi_1'(1) = \varphi_2'(1) = 0 \}$$

で与えられ

$$\mathfrak{A}\varphi = \begin{bmatrix} D\varphi_1'' - \alpha\varphi_1' - k_0\varphi_1 \\ D\varphi_2'' - \alpha\varphi_2' + bk_0\varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in D(\mathfrak{A}),$$

$$\mathfrak{B}\varphi = \begin{bmatrix} -\alpha^{-1}(D\varphi_1'(0) - \alpha\varphi_1(0)) \\ -\alpha^{-1}(D\varphi_2'(0) - \alpha\varphi_2(0)) \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in D(\mathfrak{B}) = D(\mathfrak{A})$$

である. そのとき, 作用素 $\mathfrak{A}$ の定義域を $D(\mathfrak{A}) \cap \ker \mathfrak{B}$ に制限すると 2 節で与えた作用素 A に等しくなる. ゆえに, 定義域を制限された $\mathfrak{A}$ は C_0-半群を生成する. ここで, 有界作用素 $B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, X)$ を

$$B(x) = \frac{2\alpha e^{\frac{\alpha}{2D}}}{4D+\alpha}(x-1)^2 e^{\frac{\alpha}{2D}(x-1)}, \quad x \in [0,1] \tag{27}$$

として

$$Bu = \begin{bmatrix} B(x)u_1 \\ B(x)u_2 \end{bmatrix}, \quad u = [u_1, u_2]^T \in \mathbf{R}^2$$

のように定義すると, $Bu \in D(\mathfrak{A}) = D(\mathfrak{B})$, $\forall u \in \mathbf{R}^2$ および

$$\mathfrak{B}Bu = \begin{bmatrix} -\alpha^{-1}(DB'(0) - \alpha B(0))u_1 \\ -\alpha^{-1}(DB'(0) - \alpha B(0))u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

が従う. さらに, 任意の $u \in \mathbf{R}^2$ に対して

$$\mathfrak{A}Bu = \mathfrak{A}\begin{bmatrix} B(x)u_1 \\ B(x)u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1(x)u_1 \\ \beta_3(x)u_1 + \beta_2(x)u_2 \end{bmatrix} \in X$$

と書ける. ここで $k = \frac{2\alpha e^{\frac{\alpha}{2D}}}{4D+\alpha}$ として β_1, β_2, β_3 は

$$\beta_1(x) = k[2D - (k_0 + \frac{\alpha^2}{4D})(x-1)^2]e^{\frac{\alpha}{2D}(x-1)},$$
$$\beta_2(x) = k[2D - \frac{\alpha^2}{4D}(x-1)^2]e^{\frac{\alpha}{2D}(x-1)}, \quad \beta_3(x) = b(\beta_2(x) - \beta_1(x))$$

で与えられるので $\mathfrak{A}B \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, X)$ が従う．このようにして，システム (1) は文献 [2] の Definition 3.3.2 の意味で well-defined な境界制御系を定義することがわかる.

文献 [2] の Chapter 3, p.124 により，システム (26) の解 $z(t)$ は

$$u \in H^1(0,t;\, \mathbf{R}^2), \quad \forall t > 0 \tag{28}$$

として

$$z(t) = T(t)z_0 + Bu(t) - T(t)Bu(0) + \int_0^t T(t-s)\mathfrak{A}Bu(s)ds - \int_0^t T(t-s)B\dot{u}(s)ds$$

で与えられる．式 (23)〜(25) からわかるように $T(t)$ は解析半群 (cf. Tanabe [9]) になる．したがって，$T(t)$ はすべての $t > 0$ で微分可能であり，部分積分を使えば新たな解の表示

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)\mathfrak{A}Bu(s)ds - \int_0^t AT(t-s)Bu(s)ds \tag{29}$$

が得られ，この表示から制御変数 u の正則性は

$$u \in L^2(0,t;\, \mathbf{R}^2), \quad \forall t > 0 \tag{30}$$

で充分なことが確かめられる (詳しくは [7] を参照).

つぎに $u_2 \equiv 0$ とした場合について，対応する境界制御系

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= \hat{\mathfrak{A}}z(t), \quad z(0) = z_0 \in X, \\ \hat{\mathfrak{B}}z(t) &= u_1(t) \end{aligned} \tag{31}$$

を定義する．ここで $z(t) := [z_1(t,\cdot), z_2(t,\cdot)]^T$ であり，システム (31) に現れる作用素はつぎのように定義されている.

$$\begin{aligned} \hat{\mathfrak{A}}\varphi &= \begin{bmatrix} D\varphi_1'' - \alpha\varphi_1' - k_0\varphi_1 \\ D\varphi_2'' - \alpha\varphi_2' + bk_0\varphi_1 \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in D(\hat{\mathfrak{A}}), \\ D(\hat{\mathfrak{A}}) &= \{\, \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in [H^2(0,1)]^2;\ D\varphi_2'(0) - \alpha\varphi_2(0) = 0,\ \varphi_1'(1) = \varphi_2'(1) = 0 \,\}, \\ \hat{\mathfrak{B}}\varphi &= -\alpha^{-1}(D\varphi_1'(0) - \alpha\varphi_1(0)), \quad \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T \in D(\hat{\mathfrak{B}}) = D(\hat{\mathfrak{A}}) \end{aligned}$$

$B(x)$ を (27) で与えられる関数として

$$\hat{B}u_1 = \begin{bmatrix} B(x)u_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_1 \in \mathbf{R}$$

のように定義すると，システム (31) の解は

$$z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)\hat{\mathfrak{A}}\hat{B}u_1(s)ds - \int_0^t AT(t-s)\hat{B}u_1(s)ds \tag{32}$$

で与えられ，制御変数 u_1 の正則性は

$$u_1 \in L^2(0,t;\, \mathbf{R}), \quad \forall t > 0 \tag{33}$$

で充分である.

4 可到達性

システム (26) の時間 $t>0$ での可到達部分空間は

$$S(t) := \left\{ \varphi \in X\,;\, \exists u \in L^2(0,t;\mathbf{R}^2) \quad \text{s.t. } \varphi = \int_0^t T(t-s)\mathfrak{A}Bu(s)ds - \int_0^t AT(t-s)Bu(s)ds \right\} \tag{34}$$

により定義される. 同様に, システム (31) の時間 $t>0$ での可到達部分空間は

$$\hat{S}(t) := \left\{ \varphi \in X\,;\, \exists u_1 \in L^2(0,t;\mathbf{R}) \quad \text{s.t. } \varphi = \int_0^t T(t-s)\hat{\mathfrak{A}}\hat{B}u_1(s)ds - \int_0^t AT(t-s)\hat{B}u_1(s)ds \right\} \tag{35}$$

により定義される.

【定義 1】 (i) $S(t)=X$ のとき, システム (26) (すなわち, システム (1)) は時間 $t>0$ で完全可到達という.
(ii) $S(t)^a = X$ のとき, システム (26) (すなわち, システム (1)) は時間 $t>0$ で近似可到達という. ここで, $S(t)^a$ は集合 $S(t)$ の閉包を示す.

システム (31) に対しても, 可到達部分空間 $\hat{S}(t)$ を考えることにより, 同様に時間 $t>0$ での完全可到達性と近似可到達性を定義できる.

完全可到達性については, つぎの定理が成立する.

【定理 1】 システム (26) および (31) は共に任意時間 $t>0$ で完全可到達にはなりえない.

(証明) 集合 $S(t)$ および $\hat{S}(t)$ の定義式に含まれる C_0-半群 $T(t)$ はコンパクト半群になる. その級数表現を使うと, Triggiani (1975) の手法, すなわち Baire のカテゴリー定理を用いることができて $S(t)$ および $\hat{S}(t)$ は第一類集合となり, 完全可到達性はいえない. □

注意 2 拡散項のない場合, すなわち $D=0$ の場合は 佐野 [6] により示されたように, システム (26) は時間 $t>1$ で完全可到達になる. この場合, システム (31) は完全可到達でないが, 可到達部分空間が完全に決定されており, その部分空間は $L^2(0,1)$ と同相な無限次元空間になる.

以下本論文では, "近似的" な意味での可到達性を考えることにし, "近似" という形容詞は省略する.

システム (26) の可到達性の問題を解くために, $S(t)$ の要素 φ の具体的な積分表示を求めると

$$\begin{aligned}&\int_0^t T(t-s)\mathfrak{A}Bu(s)ds - \int_0^t AT(t-s)Bu(s)ds \\ &= \int_0^t \begin{bmatrix} \Pi_1(t-s)u_1(s) \\ \Pi_3(t-s)u_1(s) + \Pi_2(t-s)u_2(s) \end{bmatrix} ds\end{aligned}$$

ただし

$$\Pi_1(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\kappa_n\phi_n, \quad \Pi_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\lambda_n - k_0)t}\kappa_n\phi_n, \quad \Pi_3(t) = b(\Pi_2(t) - \Pi_1(t))$$

κ_n は, ある定数 $K>0$ が存在して

$$\kappa_n \neq 0, \quad |\kappa_n| \ \leq \ K, \quad \forall n \geq 1$$

なる点列である.

ここで Dirichlet 級数に関するつぎの補題を用意する.

【補題 4】 $\{c_n\}_{n\geq 1}$ は有界な点列で, 単調増加数列 $\{\mu_n\}_{n\geq 1}$ は $\mu_n = \lambda_n$ または $\mu_n = \lambda_n - k_0$, $\forall n \geq 1$ で与えられているとする. このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\mu_n t} = 0, \quad \forall t > 0$$

ならば

$$c_n = 0, \quad \forall n \geq 1$$

【定理 2】 システム (26) は任意時間 $t>0$ で可到達である. すなわち, $S(t)^a = X$ がすべての $t>0$ に対して成立する.

(証明) 時間 $t>0$ における可到達作用素 $\mathcal{R}_t : L^2(0,t;\mathbf{R}^2) \to X = [L^2(0,1)]^2$ を次式により定義する.

$$\mathcal{R}_t \begin{bmatrix} u_1(\cdot) \\ u_2(\cdot) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_0^t \Pi_1(t-s)u_1(s)ds \\ \displaystyle\int_0^t \Pi_3(t-s)u_1(s)ds + \int_0^t \Pi_2(t-s)u_2(s)ds \end{bmatrix}$$

可到達性の条件は, $S(t)^a = (\mathrm{Im}\,\mathcal{R}_t)^a = X$ と書けるから, 双対定理によりこの条件は, 共役作用素 $\mathcal{R}_t^* : X \to L^2(0,t;\mathbf{R}^2)$ に対する条件

$$\mathrm{Ker}\,\mathcal{R}_t^* = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

と同値である. $\mathcal{R}_t$ の成分表示を用いて $\mathcal{R}_t^*$ を具体的に計算すると

$$\mathcal{R}_t^* \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_1^*(t-\cdot)\varphi_1 + \Pi_3^*(t-\cdot)\varphi_2 \\ \Pi_2^*(t-\cdot)\varphi_2 \end{bmatrix} \tag{36}$$

で与えられる. したがって $\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{R}_t^*$ とすると, 式 (36) より

$$\begin{cases} \Pi_1^*(t-s)\varphi_1 + \Pi_3^*(t-s)\varphi_2 = 0, & a.e.\ s \in [0,t] \\ \Pi_2^*(t-s)\varphi_2 = 0, & a.e.\ s \in [0,t] \end{cases}$$

ここで

$$\Pi_1^*(t)\varphi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_1, \phi_n \rangle e^{-\lambda_n t}, \quad \Pi_2^*(t)\varphi_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_2, \phi_n \rangle e^{-(\lambda_n - k_0)t} \tag{37}$$

$$\Pi_3^*(t)\varphi_2 = b(\Pi_2^*(t)\varphi_2 - \Pi_1^*(t)\varphi_2) \tag{38}$$

$\Pi_1^*(t), \Pi_2^*(t), \Pi_3^*(t)$ の級数表現 (37), (38) より，これらはすべて $t > 0$ で解析的である．したがって，上の条件と時間 t に関係しないつぎの条件とは同値である．

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_1 - b\varphi_2, \phi_n \rangle e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle b\varphi_2, \phi_n \rangle e^{-(\lambda_n - k_0)t} = 0, & \forall t > 0 \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_2, \phi_n \rangle e^{-(\lambda_n - k_0)t} = 0, & \forall t > 0 \end{cases} \tag{39}$$

となる．

(39) の 2 番目の式において $\kappa_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$ であったから，$\mu_n = \lambda_n - k_0$ として補題 4 を適用すれば

$$\langle \varphi_2, \phi_n \rangle = 0, \quad \forall n \geq 1 \tag{40}$$

がいえる．さて，Riesz 基 $\{\phi_n : \forall n \geq 1\}$ は $L^2(0,1)$ で完備であったから式 (40) より $\varphi_2 = 0$ が従う．これを (39) の最初の式に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_1, \phi_n \rangle e^{-\lambda_n t} = 0, \quad \forall t > 0$$

がいえて，$\kappa_n \neq 0$, $\forall n \geq 1$ なることに注意すれば，再び補題 4 を用いることにより

$$\langle \varphi_1, \phi_n \rangle = 0, \quad \forall n \geq 1$$

が得られる．よって，$\varphi_1 = 0$ となり $\mathrm{Ker}\, \mathcal{R}_t^* = \{[0,0]^T\}$ がいえる．すなわち，システム (26) の任意時間 $t > 0$ での可到達性が証明された． □

つぎに，システム (31) の可到達性の問題を考えよう．まず，集合

$$E = \{(n,m) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N} : \ s_n^2 - s_m^2 = 4Dk_0, \ n > m\}$$

を定義し，つぎの条件 (H) を導入する．

$$(H) : \ E = \emptyset \ (\text{空集合})$$

条件 (H) が満たされない場合は，集合 E は定数 D, α, k_0 にのみ依存する (ただし b には無関係な) 有限集合になることを示せる．逆に，条件 (H) が満たされれば，どのような自然数の組 (n,m), $n > m$ をもってきても

$$(\lambda_n - k_0) - \lambda_m = \frac{1}{4D}(s_n^2 - s_m^2) - k_0 \neq 0$$

注意 3 $\{s_n^2\}$ の分布から，ある正の定数 $\epsilon_0 > 0$ が存在して $s_{n+1}^2 - s_n^2 \geq \epsilon_0$, $\forall n \geq 1$ なることがわかる．したがって積 $4Dk_0$ が充分小さいとき，$E = \emptyset$ がいえて条件 (H) は自動的に満たされる．

【補題 5】 $\{c_n^1\}_{n\geq 1}$, $\{c_n^2\}_{n\geq 1}$ は共に有界な点列とする．さらに条件 (H) が満たされているとする．このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^1 e^{-\lambda_n t} + c_n^2 e^{-(\lambda_n - k_0)t} \right) = 0, \quad \forall t > 0$$

ならば

$$c_n^1 = c_n^2 = 0, \quad \forall n \geq 1$$

【定理 3】 条件 (H) を仮定する．このとき，システム (31) (すなわち，$u_2 \equiv 0$ としたシステム (26)) は任意時間 $t > 0$ で可到達である．すなわち，$\hat{S}(t)^a = X$ がすべての $t > 0$ に対して成立する．

(証明) この場合，時間 $t > 0$ における可到達作用素 $\hat{\mathcal{R}}_t : L^2(0, t; \mathbf{R}) \to X$ は

$$\hat{\mathcal{R}}_t u_1(\cdot) = \begin{bmatrix} \int_0^t \Pi_1(t-s) u_1(s) ds \\ \int_0^t \Pi_3(t-s) u_1(s) ds \end{bmatrix}$$

により定義される．また，共役作用素 $\hat{\mathcal{R}}_t^* : X \to L^2(0, t; \mathbf{R})$ は

$$\hat{\mathcal{R}}_t^* \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = \Pi_1^*(t - \cdot)\varphi_1 + \Pi_3^*(t - \cdot)\varphi_2 \tag{41}$$

で与えられる．このとき，定理 2 の証明と同様の議論により

$$\hat{\mathcal{R}}_t^* \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} = 0 \in L^2(0, t; \mathbf{R}) \tag{42}$$

ならば $[\varphi_1, \varphi_2]^T = [0, 0]^T$ なることを示せばよい．式 (42) は式 (41) と解析性により

$$\sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle \varphi_1 - b\varphi_2, \phi_n \rangle e^{-\lambda_n t} + \sum_{n=1}^{\infty} \kappa_n \langle b\varphi_2, \phi_n \rangle e^{-(\lambda_n - k_0)t} = 0, \quad \forall t > 0 \tag{43}$$

とかける．ここで，条件 (H) を用いると $\{\lambda_n\}_{n\geq 1} \cap \{\lambda_n - k_0\}_{n \geq 1} = \emptyset$ なることがわかる．$b \neq 0$，$\kappa_n \neq 0$，$\forall n \geq 1$ であることに注意すれば，式 (43) に補題 5 を使うことができて

$$\langle \varphi_1 - b\varphi_2, \phi_n \rangle = 0, \quad \langle b\varphi_2, \phi_n \rangle = 0, \quad \forall n \geq 1 \tag{44}$$

が従う．$\varphi_2 = 0$ が式 (44) の 2 番目の式から従い，それを最初の式に代入して $\varphi_1 = 0$ が従う．すなわち，$[\varphi_1, \varphi_2]^T = [0, 0]^T$ が示された． □

つぎに，仮定 (H) が満たされていない場合にシステム (31) の時間 $t > 0$ での不可到達部分空間を決定する事ができるが，ここでは紙数の関係で省略する (cf. [7])．

5 可観測性

出力方程式を伴うプラグフロー反応拡散方程式を考えよう．システム (1) において $u_1 = u_2 \equiv 0$ とし，出力方程式を

$$y(t) = [y_1(t),\ y_2(t)]^T = [z_1(t, 1),\ z_2(t, 1)]^T, \quad t \in (0, \infty) \tag{45}$$

とする．ここで，$y_1(t)$, $y_2(t) \in \mathbf{R}$ は観測出力を表す．

このシステムはつぎのように定式化できる．

$$\frac{dz(t)}{dt} = Az(t), \quad z(0) = z_0 = [z_{10}, z_{20}]^T \tag{46}$$

$$y(t) = Cz(t) \tag{47}$$

ここで

$$z(t) := [z_1(t,\cdot), z_2(t,\cdot)]^T$$

であり，作用素 A は (18) 式によって，また作用素 $C : [C[0,1]]^2 \subset X \to \mathbf{R}^2$ は

$$C\varphi := \begin{bmatrix} \varphi_1(1) \\ \varphi_2(1) \end{bmatrix}, \quad \varphi = [\varphi_1, \varphi_2]^T$$

によって定義されている．先に述べたように，作用素 A はヒルベルト空間 $X = [L^2(0,1)]^2$ 上で解析的な C_0-半群 $T(t)$ を生成する．このとき，システム (46), (47) の時間 t での出力 $y(t)$ はつぎで与えられる．

$$y(t) = CT(t)z_0$$

【定義 2】 システム (46), (47) が時間 $t > 0$ で可観測であるとは

$$y(s) = CT(s)z_0 = 0, \quad a.e.\ s \in [0,t] \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 0$$

なるときをいう．

時間 $t > 0$ での可観測性の条件は，観測作用素 $\mathcal{C}_t : X \to L^2(0,t;\mathbf{R}^2)$ を

$$\mathcal{C}_t[\varphi_1,\varphi_2]^T(s) = CT(s)[\varphi_1,\varphi_2]^T, \quad a.e.\ s \in [0,t], \quad \forall[\varphi_1,\varphi_2]^T \in X$$

により定義したとき $\mathrm{Ker}\,\mathcal{C}_t = \{[0,0]^T\}$ と同値である．

【定理 4】 システム (46), (47) は任意時間 $t > 0$ で可観測である．

(証明) 式 (23)〜(25) と式 (45) および級数の解析性により $[\varphi_1,\varphi_2]^T \in \mathrm{Ker}\,\mathcal{C}_t$ はつぎの条件と同値である．

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\langle\varphi_1,\psi_n\rangle\phi_n(1) = 0, \quad \forall t > 0 \tag{48}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(\lambda_n - k_0)t}\langle b\varphi_1+\varphi_2,\psi_n\rangle\phi_n(1) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n t}\langle b\varphi_1,\psi_n\rangle\phi_n(1) = 0, \quad \forall t > 0 \tag{49}$$

$\phi_n(1) \neq 0$, $\forall n \geq 1$ を用いると補題 4 より式 (48) から $\langle\varphi_1,\psi_n\rangle = 0$, $\forall n \geq 1$ が従う．これを式 (49) に代入して再び補題 4 を用いると $\langle\varphi_2,\psi_n\rangle = 0$, $\forall n \geq 1$ がいえる．したがって $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ となって $\mathrm{Ker}\,\mathcal{C}_t = \{[0,0]^T\}$ が示されたので，任意時間 $t > 0$ での可観測性が証明された． □

つぎに, 出力方程式 (45) の一方の出力成分のみを観測した場合の可観測性を考察しよう. まず, システムの出力方程式 (47) を

$$y(t) = \hat{C}z(t) = y_2(t) = z_2(t,1), \quad t \in (0,\infty) \tag{50}$$

で置き換えた場合を考える. ここで $\hat{C} : [C[0,1]]^2 \subset X \to \mathbf{R}$ は

$$\hat{C}[\varphi_1, \varphi_2]^T = \varphi_2(1), \quad \forall[\varphi_1, \varphi_2]^T \in [C[0,1]]^2$$

により定義される. この場合, 時間 $t > 0$ での観測作用素 $\hat{\mathcal{C}}_t : X \to L^2(0,t;\mathbf{R})$ は

$$\hat{\mathcal{C}}_t[\varphi_1, \varphi_2]^T(s) = \hat{C}T(s)[\varphi_1, \varphi_2]^T, \quad a.e.\ s \in [0,t]$$

【定義 3】 システム (46), (50) が時間 $t > 0$ で可観測であるとは

$$y_2(s) = \hat{C}T(s)z_0 = 0, \quad a.e.\ s \in [0,t] \quad \Longrightarrow \quad z_0 = 0$$

のときをいう.

システム (46), (50) の時間 $t > 0$ での可観測性の条件は, $\mathrm{Ker}\,\hat{\mathcal{C}}_t = \{[0,0]^T\}$ と同値である. このとき定理 3 の証明と同様にして, つぎの定理を証明できる.

【定理 5】 条件 (H) を仮定する. このとき, システム (46), (50) は任意時間 $t > 0$ で可観測である.

条件 (H) が満たされない場合のシステムの不可観測部分空間 $\hat{\mathcal{N}}_t = \mathrm{Ker}\,\hat{\mathcal{C}}_t$ 具体的に与えることができるが, ここでは省略する.

6　2層流および3層流の並流型熱交換方程式

本論文で展開した半群理論による手法は, 次の 2 層の熱交換方程式系に対しても適用でき, 類似の可到達、可観測性の結果が得られる.

並流型熱交換方程式モデル (佐野 [5] に拡散項を加えたモデル)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,x) + h_1(z_2(t,x) - z_1(t,x))\\
&\frac{\partial z_2}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,x) + h_2(z_1(t,x) - z_2(t,x)), \quad (t,x) \in (0,\infty) \times [0,1]\\
&D\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,0) - \alpha z_1(t,0) = -\alpha u_1(t), \quad D\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,0) - \alpha z_2(t,0) = -\alpha u_2(t)\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,1) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t \in (0,\infty)\\
&z_1(0,x) = z_{10}(x), \quad z_2(0,x) = z_{20}(x), \quad x \in [0,1]
\end{aligned}$$

ここで h_1, h_2 は熱交換プロセスに依存した正の定数である.

また計算は非常に繁雑になり多くの場合分けが必要になるが、ここで述べた半群理論による手法は, 次の 3 層の熱交換方程式に対しても適用できる.

並流型3層流熱交換方程式モデル (S. Bielski and L. Malinowski [1] に拡散項を加えたモデル)

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z_1}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,x) + h_{12}(z_2(t,x) - z_1(t,x))\\
&\frac{\partial z_2}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,x) + h_{21}(z_1(t,x) - z_2(t,x)) + h_{23}(z_3(t,x) - z_2(t,x)),\\
&\frac{\partial z_3}{\partial t}(t,x) = D\frac{\partial^2 z_3}{\partial x^2}(t,x) - \alpha\frac{\partial z_3}{\partial x}(t,x) + h_{32}(z_2(t,x) - z_3(t,x)), \quad (t,x) \in (0,\infty)\times[0,1]\\
&D\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,0) - \alpha z_1(t,0) = -\alpha u_1(t), \quad D\frac{\partial z_2}{\partial x}(t,0) - \alpha z_2(t,0) = -\alpha u_2(t)\\
&D\frac{\partial z_3}{\partial x}(t,0) - \alpha z_3(t,0) = -\alpha u_3(t),\\
&\frac{\partial z_1}{\partial x}(t,1) = \frac{\partial z_2}{\partial x}(t,1) = \frac{\partial z_3}{\partial x}(t,1) = 0, \quad t \in (0,\infty)\\
&z_1(0,x) = z_{10}(x), \quad z_2(0,x) = z_{20}(x), \quad z_3(0,x) = z_{30}(x), \quad x \in [0,1]
\end{aligned}$$

ここで h_{12}, h_{21}, h_{23}, h_{32} は熱交換プロセスに依存した正の定数である.

参考文献

[1] S. Bielski and L. Malinowski: A semi-analytical method for determining unsteady temperature field in a parallel-flow three-fluid heat exchanger; Int. Comm. Heat Mass Transfer, Vol. 30, No. 8, 1071–1080 (2003)

[2] R.F. Curtain and H.J. Zwart: An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory, Texts in Applied Mathematics, Vol. 21, Springer-Verlag (1995)

[3] A.K. Dramé, D. Dochain and J.J. Winkin: Asymptotic behavior and stability for solutions of a biochemical reactor distributed parameter model; IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 53, No. 1, pp. 412–416 (2008)

[4] A. El Jai and A.J. Pritchard: Sensors and Controls in the Analysis of Distributed Systems, Ellis Horwood Limited (1988)

[5] H. Sano: On reachability of parallel-flow heat exchanger equations with boundary inputs; Proceedings of the Japan Academy, Vol. 83, Ser. A, No. 1, pp. 1–4 (2007)

[6] 佐野: プラグフロー反応方程式の可到達性・可観測性について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 20, No. 12, pp. 457–464 (2007)

[7] 佐野, 中桐: プラグフロー反応拡散方程式の可到達性・可観測性について; システム制御情報学会論文誌, Vol. 22, No. 5, (2009) 印刷中

[8] 佐野, 中桐: 境界入力をもつ移流拡散方程式系の安定化; 本報告集, 数理解析研究所講究録, (2009)

[9] H. Tanabe: Equations of Evolution, Pitman, London, (1979)

[10] R. Triggiani: On the lack of exact controllability for mild solutions in Banach spaces; J. Math. Anal. Appl., Vol. 50, pp. 438-446 (1975)

[11] J.J. Winkin, D. Dochain and P. Ligarius: Dynamical analysis of distributed parameter tubular reactors; Automatica, Vol. 36, pp. 349–361 (2000)