数理解析研究所講究録
第 1639 巻 2009 年 123-132

Riemann ゼータ関数のある連続変形について

東京大学大学院 数理科学研究科　鈴木正俊 (Suzuki Masatosi)
Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

1. 導入

Riemann ゼータ関数の非自明零点について考える. ここでは Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ にガンマ因子 $\gamma(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ と $s(s-1)$ をかけてできる整関数

$$\xi(s)=s(s-1)\,\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\,\zeta(s)$$

を主に扱う. Riemann ゼータ関数の非自明零点と $\xi(s)$ の零点は一致するから, $\xi(s)$ の零点を考えればよい. よく知られているように, $\xi(s)$ は関数等式

$$\xi(s)=\xi(1-s) \tag{1.1}$$

を満たす. Riemann の予想以来, 全ての $\xi(s)$ の零点が関数等式 (1.1) の中心線 $\Re(s)=1/2$ 上に在るか否かは, 重大な未解決問題である. この小論では関数等式 (1.1) を軸にした, $\xi(s)$ の零点に関する一つの考察を述べる.

関数等式 (1.1) と同様の関数等式を満たす整関数は容易に得られる. それには勝手な実整関数 [1] $E(s)$ をとって,

$$A(s)=\frac{1}{2}\big(E(s)+E(1-s)\big) \tag{1.2}$$

とすればよい. 勿論, このように勝手につくった $A(s)$ の零点は $\Re(s)=1/2$ 上にあるとは限らない. 実際, $A(s)$ の零点が $\Re(s)=1/2$ の外にもあるような実係数多項式 $E(s)$ は簡単に構成できる.

このように作られる整関数で, かつ零点が $\Re(s)=1/2$ 上にあるようなものとして, 先ず思いつくのは三角関数 $\cos(i(s-1/2))$ であろう. このとき $A(s)=\cos(i(s-1/2))$ に対して $E(s)=\exp(s-1/2)$ であって, 容易に示される不等式

$$|E(s)|>|E(1-s)| \quad \text{for} \quad \Re(s)>1/2 \tag{1.3}$$

から, $A(s)=\cos(i(s-1/2))$ の零点が $\Re(s)=1/2$ 上にしかないことが証明される.

この事実によれば, もしある実整関数 $E(s)$ があって, 条件 (1.3) を満たし, かつ

$$\xi(s)=\frac{1}{2}\big(E(s)+E(1-s)\big) \tag{1.4}$$

が成り立つならば, それは $\xi(s)$ の零点が $\Re(s)=1/2$ にしかないことを導く. したがって, そのような実整関数 $E(s)$ の存在を議論することは, $\xi(s)$ の零点の研究において極めて重要である.

我々は, 以下で導入する $\xi(s)$ の連続変形の族 $\xi_\alpha(s;r)$ を用いて, $\xi(s)$ の Riemann 予想に対して期待される $E(s)$ の候補 (の族) を与える.

---

[1] 実軸上で実数値をとる整関数を実整関数と呼ぶ.

2. 定義

正の実軸上の関数 $\phi(x)$ を

$$\phi(x) = \frac{d}{dx}\Big(x^2\frac{d}{dx}\theta(x^2)\Big) = 4\sum_{n=1}^{\infty}\big(2\pi^2n^4x^4 - 3\pi n^2x^2\big)e^{-\pi n^2x^2} \tag{2.1}$$

で定義する. ここで $\theta(x)$ はテータ関数 :

$$\theta(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}}\exp(-\pi n^2 x).$$

このとき, 全ての $s\in\mathbb{C}$ について, $\xi(s)$ は $\phi(x)$ のメリン変換

$$\xi(s) = \int_0^\infty \phi(x)\, x^s \frac{dx}{x}$$

で与えられる.

定義 1. 与えられた実数 α に対し, 複素二変数 (s,r) の関数 $\xi_\alpha(s;r)$ を次で定義する :

$$\xi_\alpha(s;r) = \int_0^\infty \phi(x)\left(\frac{x^{\alpha/2}+x^{-\alpha/2}}{2}\right)^{-r} x^s\frac{dx}{x}.$$

パラメータ α を重さ (weight), r をレベル (level) と呼ぶことにする [2].

関数 $\phi(x)$ は $x\to 0,\infty$ で急減少するから, 右辺の積分は $\mathbb{C}^2$ で絶対かつ広義一様に収束し, 複素二変数 (s,r) の整関数を定める. 定義より

$$\xi(s) = \xi_\alpha(s;0) = \xi_0(s;r)$$

であって, 任意に固定された r または α に対して

$$\xi_\alpha(s;0) = \lim_{r\to 0}\xi_\alpha(s;r), \quad \xi_0(s;r) = \lim_{\alpha\to 0}\xi_\alpha(s;r)$$

が成り立つので, $\xi_\alpha(s;r)$ は $\xi(s)$ を連続的に変形したものとなっていることが了解されるであろう. 関数 $\xi_\alpha(s;r)$ の基本的性質は以下の通りである.

定理 1 (Theorem A of [4]). 与えられた実数 α に対して, $\xi_\alpha(s;r)$ は次の性質を満たす.

(1) 複素二変数 (s,r) の整関数である.

(2) 全ての $(s,r)\in\mathbb{C}^2$ に対し, 次の関数等式を満たす :

$$\xi_\alpha(s;r) = \xi_\alpha(1-s;r). \tag{2.2}$$

(3) r が実数ならば, 更に次の関数等式を満たす :

$$\xi_\alpha(s;r) = \overline{\xi_\alpha(\bar{s};r)}.$$

(4) 全ての $(s,r)\in\mathbb{C}^2$ に対し, 次の差分方程式を満たす :

$$\xi_\alpha(s;r) = \frac{1}{2}\big(\xi_\alpha(s+\alpha/2;r+1) + \xi_\alpha(s-\alpha/2;r+1)\big). \tag{2.3}$$

---

[2] これらの用語は保型形式の理論とは関係がない.

(5) ある定数 $C > 0$ が存在して

$$|\xi_\alpha(s;r)| \leq \exp(CR\log R)$$

が成り立つ．ここで $R = |s| + (|\alpha|/2)\,|r| + 1$．特に，$\xi_\alpha(s;r)$ の整関数としての位数は高々 1 である．

定義より直ちに，$\xi_\alpha(s;r)$ は $\alpha \mapsto -\alpha$ について対称であることが分かるので，以下では α は常に非負であると約束する．

3. レベル 0 の場合

ここではレベル 0 の場合，すなわち $\xi(s) = \xi_\alpha(s;0)$ の場合，について考察する．
各正の実数 α について，

$$E_\alpha(s) := \xi_\alpha(s+\alpha/2;1)$$

と定義する．このとき $E_\alpha(s)$ は実整関数で，関数等式 (2.2) により

$$E_\alpha(1-\alpha-s) = E_\alpha(s) \tag{3.1}$$

が成り立つ．したがって，$E_\alpha(s)$ の Riemann 予想が，その全ての零点が $\Re(s) = (1-\alpha)/2$ 上にある事として定義される．また，関数等式 (2.2) により，

$$\xi_\alpha(s-\alpha/2;1) = \xi_\alpha((1-s)+\alpha/2;1) = E_\alpha(1-s)$$

が成り立つから，$r = 0$ の場合の等式 (2.3) は $A(s) = \xi(s)$, $E(s) = E_\alpha(s)$ とした場合の等式 (1.2) (即ち等式 (1.4)) に他ならない．すなわち，$E_\alpha(s)$ は等式 (1.4) を満たす整関数の 1 パラメータ族を与えている．ここで $E_\alpha(s)$ が条件 (1.3) を満たすような α が存在するのか否かが問題となる．これについて次が分かる．

定理 2 (Theorem C of [4] for $r = 0$). 固定された正の実数 α に対し，$E_\alpha(s)$ が右半平面 $\Re(s) \geq 1/2$ に零点を持たないと仮定する．このとき，$E_\alpha(s)$ は (1.3) を満たす．
したがって，ある正の実数 α に対し，$E_\alpha(s)$ が右半平面 $\Re(s) \geq 1/2$ に零点を持たないならば，$\xi(s)$ の零点は全て $\Re(s) = 1/2$ 上にある．

この定理は，ある正の実数 α について，$E_\alpha(s)$ が Riemann 予想より少し緩い条件を満たせば，それから $\xi(s)$ の Riemann 予想が従うことを言っている．逆に $\xi(s)$ の Riemann 予想を仮定すれば，

$$\lim_{\alpha\to 0} E_\alpha(s) = \xi(s)$$

により，α が十分 0 に近いとき，$E_\alpha(s)$ の零点はその関数等式の中心線 $\Re(s) = (1-\alpha)/2$ 上にないまでも，その近辺にあることが予測される．勿論，定理 2 の仮定程度まで近くにあるかは自明でなく，$\xi(s)$ の Riemann 予想を仮定したとしても，定理 2 の仮定を満足するような正の実数 α が存在するのかは，現時点では残念ながら不明なのだが．

4. 負の整数レベルの場合

前節ではレベル 1 の変形 $\xi_\alpha(s;1)$ に関するある非零領域の存在が, レベル 0 の変形 $\xi(s) = \xi_\alpha(s;0)$ に関する Riemann 予想を導くことをみた. これと同様の構造が全てのレベルについて存在することから, Riemann ゼータ関数のよく知られた非零領域に関する結果を用いて, 負の整数レベルの変形 $\xi_\alpha(s;-n)$ $(n \geq 1)$ についてはRiemann 予想が成り立つことが導かれる.

定理 3 (Corollary 2.4 of [4]). $\alpha \geq 1$ ならば, 全ての正整数 n について, $\xi_\alpha(s;-n)$ は Riemann 予想を満たす. さらに $\xi(s)$ の Riemann 予想を仮定すれば, これが全ての正の実数 α について成り立つ.

一般に, 負の整数レベルの変形 $\xi_\alpha(s;-n)$ は $\xi(s)$ の平行移動の線型結合である. これは第八節で述べるレベルに関する構造から容易に導かれる. 例えば n が小さい場合,

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha(s;-1) &= \frac{1}{2}\left(\xi\left(s+\frac{\alpha}{2}\right)+\xi\left(s-\frac{\alpha}{2}\right)\right),\\
\xi_\alpha(s;-2) &= \frac{1}{4}\left(\xi(s+\alpha)+2\xi(s)+\xi(s-\alpha)\right),\\
\xi_\alpha(s;-3) &= \frac{1}{8}\left(\xi\left(s+\frac{3\alpha}{2}\right)+3\xi\left(s+\frac{\alpha}{2}\right)+3\xi\left(s-\frac{\alpha}{2}\right)+\xi\left(s-\frac{3\alpha}{2}\right)\right) \text{ etc.}
\end{aligned}$$

5. サイン関数の類似物

いま $E(s) = \exp(s-1/2)$ とすれば, (1.2) で与えられる $A(s)$ は $\cos(i(s-1/2))$ である. このとき, $\sin(i(s-1/2))$ は

$$B(s) = \frac{i}{2}(E(s) - E(1-s)) \tag{5.1}$$

で与えられる. したがって, 与えられた実整関数 $E(s)$ について, (1.2) で与えられる整関数 $A(s)$ はコサイン関数の類似物, (5.1) で与えられる整関数 $B(s)$ はサイン関数の類似物と見なせる ([1]). 定義から, $A(s)$, $B(s)$ は関数等式

$$A(1-s) = A(s), \quad B(1-s) = -B(s)$$

を満たすことが分かる. すなわち $A(s)$, $B(s)$ はそれぞれ, $s \mapsto 1-s$ に関する偶関数, 奇関数となっている. 第三節の実整関数 $E_\alpha(s)$ について,

$$\xi(s) = \frac{1}{2}(E_\alpha(s) + E_\alpha(1-s))$$

であったから,

$$\begin{aligned}
\xi_\alpha^+(s;0) &= \xi(s),\\
\xi_\alpha^-(s;0) &= \frac{i}{2}(E_\alpha(s) - E_\alpha(1-s))
\end{aligned}$$

と定義すれば, $\xi_\alpha^-(s;0)$ が $\xi(s) = \xi_\alpha^+(s;0)$ に対するサイン関数の類似物である.

次の結果は, 定理 2 の仮定の下で, $\xi_\alpha^-(s;0)$ がサイン関数 “らしい” 振る舞いをすることを主張する.

定理 4 (Theorem D of [4] for $r=0$). 固定された正の実数 α に対し, $E_\alpha(s)$ が右半平面 $\Re(s) \geq 1/2$ に零点を持たないと仮定する. このとき, $\xi_\alpha^{\pm}(s;0)$ の全ての零点は $\Re(s)=1/2$ 上にあり, しかも全て単純な零点である. さらに, $\xi_\alpha^{+}(s;0)$ と $\xi_\alpha^{-}(s;0)$ は共通の零点を持たず, それらの零点は $\Re(s)=1/2$ 上で一つずつ交互に存在する.

次の図1は, $\alpha=2$ の場合に $\xi(s)=\xi_\alpha^{+}(s;0)$ と $\xi_\alpha^{-}(s;0)$ の $\Re(s)=1/2$ 上での値を比較したものである ($\gamma(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$). この範囲ではこれらの零点が交互に存在している様子が観察される.

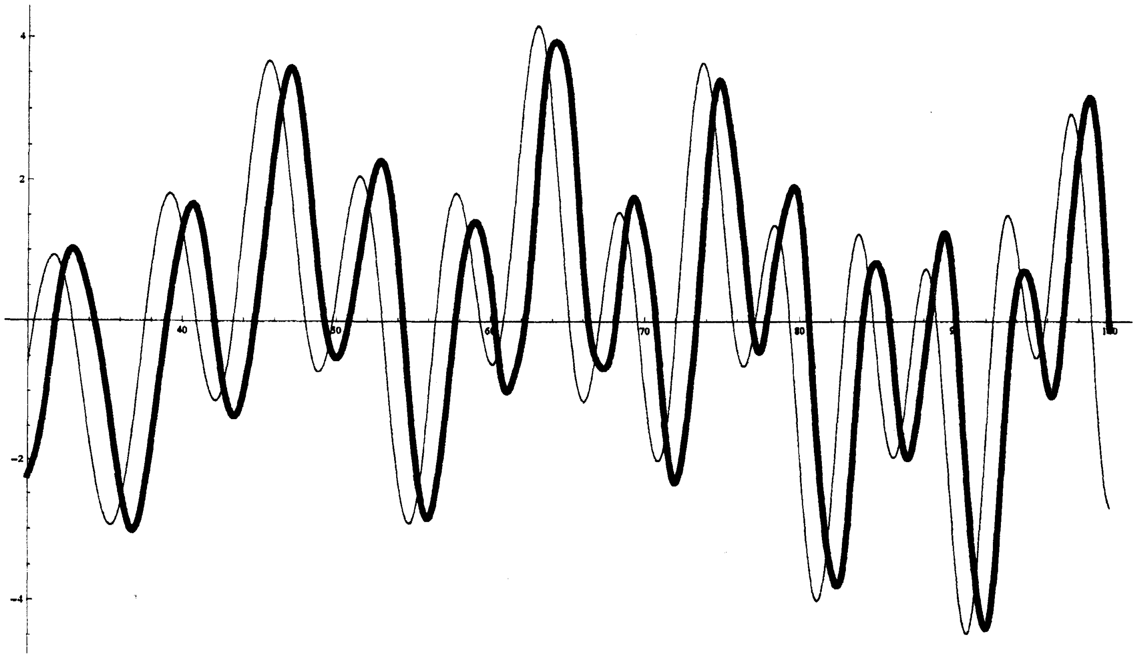

FIGURE 1. 細線は $30 \leq t \leq 100$ の範囲の $\xi(1/2+it)|\gamma(1/2+it)|^{-1}$, 太線は同じ範囲での $\xi_2^{-}(1/2+it;0)|\gamma(1/2+it)|^{-1}$ のグラフ.

ここで sin が cos の微分として得られることを思いだそう. これを踏まえれば $\xi(s)$ に対する sin の類似物は $\xi'(s)$ と考えるのが自然である. 導関数 $\xi'(s)$ が $\xi_\alpha^{-}(s;0)$ と同様に, $s \mapsto 1-s$ に関して奇関数であることは直ちに分かる. また, $\xi(s)$ の Riemann 予想と零点の単純性を仮定すれば, Laguerre の定理により $\xi'(s)$ の零点も全て $\Re(s)=1/2$ 上にあり, $\xi(s)$ と共通の零点をもたず, しかも $\xi(s)$ と $\xi'(s)$ の零点は $\Re(s)=1/2$ 上で互いに交互に存在する. この意味で, $\xi'(s)$ はより自然な sin の対応物と見なせる.

われわれの $\xi_\alpha^{-}(s;0)$ と $\xi'(s)$ は次の関係にある:

$$\xi_\alpha^{-}(s;0) \sim \frac{i\alpha}{2}\xi'(s) \quad (\alpha \to 0^+) \tag{5.2}$$

ここで $\sim$ は $\alpha \to 0^+$ に従って比が1に近づくことを意味する. これは定理4の仮定 (すなわち定理2の仮定) の妥当性の一つの傍証と見なせるだろう (第七節の最初の段

落も見て頂きたい). 次の図 2 は, $\alpha = 2$ の場合に $\xi_\alpha^-(s;0)$ と $\xi'(s)$ の $\Re(s) = 1/2$ 上での値を比較したものである. これから α がそれ程小さくなくとも, 互いの零点が近い様子が観察される.

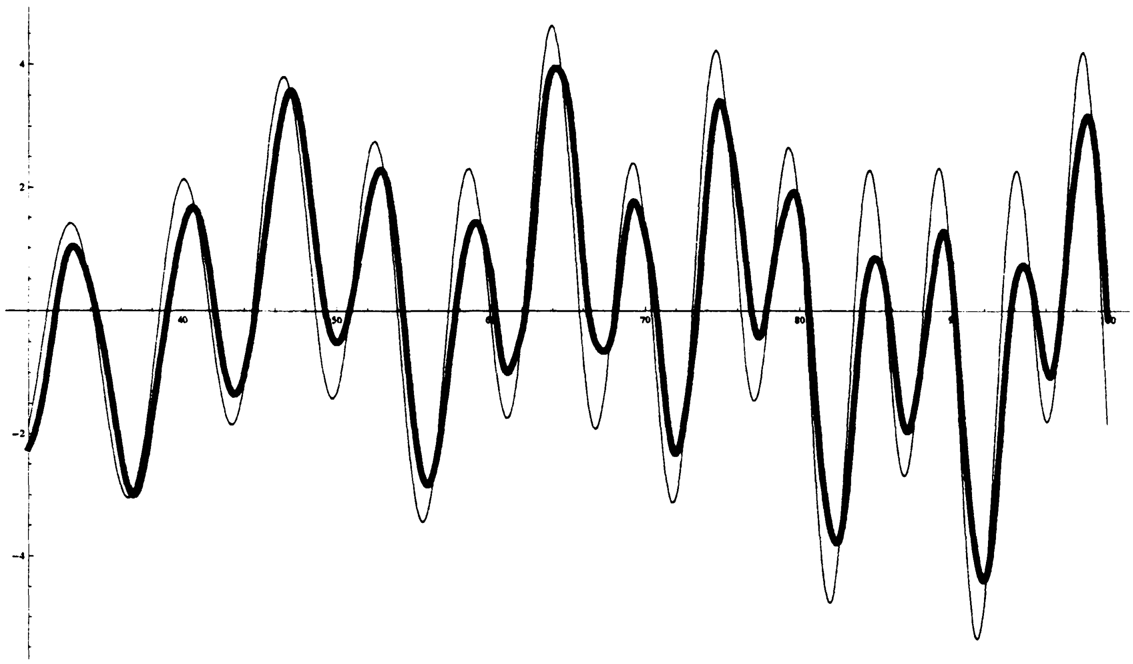

FIGURE 2. 細線は $30 \le t \le 100$ の範囲の $\xi'(1/2+it)|\gamma(1/2+it)|^{-1}$, 太線は同じ範囲での $\xi_2^-(1/2+it;0)|\gamma(1/2+it)|^{-1}$ のグラフ.

6. 零点の固有値解釈

定理 2 の仮定の下で, $\xi(s)$ の零点の固有値解釈の一つが得られる.

いま $D = \{s \in \mathbb{C} \mid \Re(s) > 1/2\}$ とし, 整関数 $F(s)$ について $F^\vee(s) = \overline{F(1-\bar{s})}$ とする. 条件 (1.3) を満たす実整関数 $E(s)$ から, de Branges の Hilbert 空間 $\mathcal{H}(E)$ が定義される [3]. Hilbert 空間 $\mathcal{H}(E)$ は F/E と $F^\vee/E$ が Hardy 空間 $H^2(D)$ に属すような整関数全体から成り, 内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ が

$$\langle F, G\rangle_E := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(1/2+it)\,\overline{G(1/2+it)}}{|E(1/2+it)|^2}\,dt.$$

で与えられる Hilbert 空間である ([2]). このとき

$$\mathcal{D}_E = \{F \in \mathcal{H}(E) \mid i(1/2-s)F(s) \in \mathcal{H}(E)\}.$$

を定義域とする $\mathcal{H}(E)$ 上の掛算作用素

$$M_E : F(s) \mapsto i(1/2-s)F(s)$$

[3]一般の整関数の場合は, 条件 (1.3) を『 $|E(s)| > |E^\vee(s)|$ for $\Re(s) > 1/2$ 』でおきかえる.

を考える．作用素 $(M_E, \mathcal{D}_E)$ は閉対称作用素で，$U(1)$ でパラメトライズされる自己共役拡張の族をもつ．特に，(1.2) で定まる整関数 $A(s)$ によって指定される，特別な自己共役拡張 $(M_E(A), \mathcal{D}_E(A))$ を持つ．

ここで $E(s)$ が $\Re(s)=1/2$ 上に零点をもたず，$\mathcal{D}_E$ が $\mathcal{H}(E)$ で稠密であると仮定する．このとき，$(M_E(A), \mathcal{D}_E(A))$ のスペクトルは離散スペクトル(固有値)のみから成り，各固有値の重複度は 1 で，各固有値は $A(s)$ の零点の虚部に一致する．

定理 2 の仮定の下で，$E_\alpha(s)$ は (1.3) を満たすので，Hilbert 空間 $\mathcal{H}(E_\alpha)$ が定まる．このとき掛算作用素の定義域について次がいえる．

定理 5 (Theorem E of [4] for $r=0$)．*定理 2 の仮定の下で，$\mathcal{D}_{E_\alpha}$ は $\mathcal{H}(E_\alpha)$ で稠密．*

これより，ある正実数 α に対して $E_\alpha(s)$ が $\Re(s) \geq 1/2$ に零点をもたないならば，$\xi(s)$ の零点は Hilbert 空間 $\mathcal{H}(E_\alpha)$ 上の自己共役作用素 $(M_{E_\alpha}(\xi), \mathcal{D}_{E_\alpha}(\xi))$ の固有値として与えられることになる．

7. より一般の変形

第五節で導入した $\xi_\alpha^{\pm}(s;0)$ の定義より，

$$E_\alpha(s) = \xi_\alpha^+(s;0) - i \cdot \xi_\alpha^-(s;0)$$

が成り立つ．したがって (5.2) から

$$E_\alpha(s) \ \sim \ \xi(s) + \frac{\alpha}{2}\xi'(s) \quad (\alpha \to 0+) \tag{7.1}$$

が成り立つ．ここで右辺を

$$E_\alpha^L(s) := \xi(s) + \frac{\alpha}{2}\xi'(s)$$

とおく．この関数は $\alpha = 2$ のとき Lagarias [3] により導入され，$\xi(s)$ の Riemann 予想との関連が詳しく調べられている．とくに，$\xi(s)$ の Riemann 予想が成り立ち，しかも全ての零点が単純であることと，$E_2^L(s)$ が (1.3) を満たし，かつ $\Re(s)=1/2$ 上に零点を持たないことは同値である．任意の正実数 α に対する $E_\alpha^L(s)$ についても同様の結果が成り立つことが Lagarias [3] の方法により示せる (Theorem 1.5 of [5])．これは $\alpha > 0$ が十分小さいとき $E_\alpha(s)$ が実際に定理 2 の仮定を満たす可能性を示唆する．

整関数の族 $E_\alpha(s)$ と $E_\alpha^L(s)$ 双方を含むような，より一般の $\xi(s)$ の変形の族が次のように考えられる．

定義 2 (Definition 1.2 of [5])．関数族 $\mathfrak{F}$ を正の実軸上で定義された区分的に連続な関数で，任意の $x>0$ について $f(x) = (f(x-0)+f(x+0))/2$ と正規化され，かつ次の 2 つの条件

(1) $f(x) + \overline{f(x^{-1})} = 2$,

(2) ある $A \geq 0$ について，$f(x) = O(x^A)$ as $x \to +\infty$,

を満たすもの全体から成るものと定める．各 $f \in \mathfrak{F}$ について

$$E_f(s) := \int_0^\infty \phi(x) f(x)\, x^s \frac{dx}{x},$$

と定義する．ここで $\phi(x)$ は (2.1) で定義された関数．

各 $f \in \mathfrak{F}$ について, $E_f(s)$ は

$$\xi(s) = E_f(s) + \overline{E_f(1-\bar{s})}$$

を満たす高々位数 1 の整関数である ([5, Theorem 1.3]). 特に $f \in \mathfrak{F}$ が実数値ならば, $E_f(s)$ は (1.2) を満たす. 以下,

$$\mathcal{O}_{\mathfrak{F}} := \{E_f \mid f \in \mathfrak{F}\}$$

とおく. 正の実数 α について

$$f_\alpha(x) = \frac{2x^\alpha}{1+x^\alpha}, \qquad f_\alpha^L(x) = 1 + \frac{\alpha}{2}\log x$$

とすると, f_α, f_α^L は $\mathfrak{F}$ に属し,

$$E_{f_\alpha}(s) = E_\alpha(s), \qquad E_{f_\alpha^L}(s) = E_\alpha^L(s)$$

を満たす. すなわち, $E_\alpha(s)$, $E_\alpha^L(s)$ は共に $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ に属す. この整関数の族 $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ と $\xi(s)$ の零点との関係は次の通り.

定理 6 (Theorem 1.5 of [5]). 整関数の族 $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}^*$ を, 実軸上実数値で, 条件 (1.3) を満たすような $E_f(s)$ 全体から成る $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ の部分族とする. このとき, $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}^* \neq \emptyset$ であることと, $\xi(s)$ の零点が全て $\Re(s) = 1/2$ 上にあることは同値である.

したがって, 族 $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$, $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}^*$ の構造を調べることが, $\xi(s)$ の零点分布を知るうえで重要になってくる. 整関数 $E_f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ が条件 (1.3) を満たすための十分条件の一つが次のように述べられる.

定理 7 (Theorem 1.6 of [5]). 整関数 $E_f \in \mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ は実軸上実数値で, 次を満たすとする：

(i) $E_f(s)$ の全ての零点はある垂直帯領域 $-\sigma_0 < \Re(s) - 1/2 < 0$ 内にある,

(ii) ある $C_1 > 0$ が存在して, 虚部が $T \geq 1$ 以下の $E_f(s)$ の零点の重複度を込めた個数を $N(T)$ としたとき, 次が成り立つ：

$$N(T) \leq C_1 T \log T,$$

(iii) ある実数 C_2 が存在して, 実軸上で次が成り立つ：

$$\lim_{\sigma\to+\infty} \frac{E_f(1-\sigma)}{E_f(\sigma)} = C_2.$$

このとき $E_f(s)$ は条件 (1.3) を満たす. しかも $|C_2| \leq 1$.

すなわち, 大雑把に言えば, $E_f(s)$ が条件 (1.3) を満たすための十分条件の一つは, $E_f(s)$ の零点が $\Re(s) < 1/2$ 内のある帯領域のみに存在することである. いま $\mathcal{O}_{\mathfrak{F},0}$ を定理 7 の条件を満たすような $E_f(s)$ 全体から成る $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ の部分族とする. 定理 7 から $\mathcal{O}_{\mathfrak{F},0}$ は $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}^*$ の部分族であるが, これについて更に次が成り立つ.

定理 8 (Theorem 1.7 of [5]). $\mathcal{O}_{\mathfrak{F},0} \neq \emptyset$ であることと, $\xi(s)$ の零点が全て $\Re(s) = 1/2$ 上にあり, しかも全て単純であることは同値である.

この定理によれば, 零点が左半平面 $\Re(s) < 1/2$ 内のある帯領域のみに存在するような $\xi(s)$ の変形の存在や, その特徴付けが興味深い問題になってくる. これは今後の課題の一つである.

8. 変形族 $\xi_\alpha(s;r)$ のレベル構造

変形族 $\xi_\alpha(s;r)$ に話を戻す. 第三節ではレベル 0 の場合 $(r=0)$, 第四節では負の整数レベルの場合 (r:負整数) を扱ったが, ここではレベル r を通して, $\xi_\alpha(s;r)$ が相互に関係していることを述べたい.

各 $\xi_\alpha(s;r)$ は, より高いレベルの変形を用いて, 次のように表示される.

命題 1 (Proposition 2.7 of [4]). α を正の実数, r を実数, n を正の整数とする. このとき

$$\xi_\alpha(s;r) = 2^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\xi_\alpha\Big(s-\frac{\alpha n}{2}+\alpha j; r+n\Big).$$

逆に, 各 $\xi_\alpha(s;r)$ は, より低いレベルの変形を用いても表示される. 但し, この場合は離散和ではなく積分によって平均をとる形となる.

命題 2 (Proposition 2.8 of [4]). $\alpha,\ \lambda$ を正の実数, r を実数とする. このとき

$$\xi_\alpha(s;r) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\frac{2^\lambda}{\alpha}\Big)\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\xi_\alpha(s-z;r-\lambda)\,B\Big(\frac{\lambda}{2}+\frac{z}{\alpha},\frac{\lambda}{2}-\frac{z}{\alpha}\Big)dz.$$

ここで $|c|<(\alpha\lambda)/2$, $B(p,q)=\Gamma(p)\Gamma(q)/\Gamma(p+q)$ はベータ関数である.

このように異なる変形の間にたくさんの関係式があるのが, 変形族 $\xi_\alpha(s;r)$ が $E_f(s)$ よりも面白い理由の一つである. 命題 2 から特に

$$\xi_\alpha(s;1) = \frac{1}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}\xi(s-iv)\,\frac{dv}{\cosh(\pi v/\alpha)}$$

が得られる $(\xi_\alpha(s;1)=E_\alpha(s-\alpha/2))$. 即ち, レベル 1 の変形は $\xi(s)$ を垂直線上で双曲余弦測度 $dv/\cosh(\pi v/\alpha)$ に関して平均したものとなっている.

よく知られているように, $\xi(s)$ は $\Re(s)\ge 1$ に零点をもたない. この事実を $\xi_\alpha(s;1)$ の積分表示と併せて考えると, $1\le\alpha\ll\infty$ ならば, 定理 2 の仮定は成り立ちそうに思える. 定理 2 は $\xi_\alpha(s;1)$ が右半平面 $\Re(s)\ge(1+\alpha)/2$ 内に零点を持たないならば, $\xi(s)$ の Riemann 予想が成り立つことを主張したものであった.

9. 結び

第三節で述べたように, 各 $\alpha>0$ について, $E_\alpha(s)$ は (1.4) を満たす. また $E_\alpha(s)$ は関数等式 (3.1) を満たす. この 2 つの性質が本質的にこの族を特徴付けていることが分かる (Section 3.3 of [5]). これは族 $E_\alpha(s)$ が $\xi(s)$ を考える上で, 解析的に自然な対象であることを示唆する.

一方, 第七節で定義した $E_\alpha^L(s)$ は

$$E_\alpha^L(s) = \frac{2}{\alpha}\xi(s)\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\xi'(s)}{\xi(s)}\right)$$

のように, $\xi(s)$ と $\xi(s)$ の対数微分を用いて表示されるから, $\xi(s)$ の Euler 積を経由して数論的な表示をもち, 所謂明示公式とも密接な関係にあることが分かる ([3]). したがって $E_\alpha^L(s)$ は数論的に自然な対象である.

これら二つの族は (7.1) のような漸近的な関係にある. この関係を軸にして, 双方の族を含む $\mathcal{O}_{\mathfrak{F}}$ (又は, [5, Section 3] で定義されるような, より大きな族) の構造を考察することが, 今後の $\xi(s)$ の零点の研究や, その固有値解釈に重要な役割を果たすことを期待して, この小論の結びとしたい.

References

1. Louis de Branges, *Some Hilbert spaces of entire functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 840–846. MR MR0114002 (22 #4833)
2. ———, *Hilbert spaces of entire functions*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1968. MR MR0229011 (37 #4590)
3. Jeffrey C. Lagarias, *Hilbert spaces of entire functions and Dirichlet L-functions*, Frontiers in number theory, physics, and geometry. I, Springer, Berlin, 2006, pp. 365–377. MR MR2261101 (2007g:11105)
4. Masatoshi Suzuki, *Deformations of the Riemann xi-function*, prepublication, January 2009.
5. ———, *Deformations of the Riemann xi-function. II*, prepublication, January 2009.

Graduate School of Mathematical Sciences
The University of Tokyo
Komaba 3-8-1, Meguro-ku,
Tokyo 153-8914, Japan
Email: `msuzuki@@ms.u-tokyo.ac.jp`