

## 周期点渦系の再配置 Rearrangement of Periodic Point Vortices

東大理 梅木 誠 (Makoto Umeki)

Department of Physics, Graduate School of Science  
University of Tokyo

### 1 はじめに

周期境界条件下での点渦系において、正三角形の配列が線形安定であり、正方形や他の配列が線形不安定であることが知られている。正確に言うと、この安定性は平面上に周期的に配置された点渦に対して、同じ平面パターンの周期性を持ち、より長波長の擾動を受けた配置に対する線形安定性 [1] を意味する。ところで、従来の液体ヘリウムの超流動や、アルカリ金属の BEC (Bose-Einstein Condensates) 状態に見られる渦の 2 次元パターンは (厳密にはそうではないが) 正三角形に近い。プラズマにおいても正三角形に近いパターンが準安定な状態 (最終的には多数の渦が合併してひとつになるが、その前に現れる一時的状態) として観測されている。

本講演では、これらのパターン形成現象を、多数の点渦系におけるその位置の再配列として考察する。適当な境界条件下でも同様の結果、正三角形パターンが現れやすいことを数値計算で示した。正方格子に近い初期分布をもつ、正方周期境界条件下での多数の点渦系の運動、初期にランダム配置する同じ境界条件下での点渦に対する勾配系、及び一般の 2 対ポテンシャルを持つ空間 2 次元及び 3 次元の多数の点の勾配系について考察した。

### 2 予備知識

点渦の位置を多角形の頂点と考えれば、点渦の規則的配置は多角形による平面充填の問題とみなすことができよう。一種類の正多角形による平面充填は、正三角形、正方形、正六角形の三通りである事が知られている。平面内で多数の同一円を最も稠密に充填するパターンは六方充填配置 (正三角形パターン) である。

一方、超流動の実験に見られる渦格子においては、渦の強さが量子化され、実際は最小の強さを持った渦が多数現れる。渦の個数は系の剛体回転の角速度で制御される。また、運動エネルギーは常流動成分の粘性により長時間では減衰すると考えられる。多くの文献では、多数の渦が発生している場合でも渦は制御された角速度で剛体回転しているとみなせる。

以上の点から、渦格子の現象を流体力学的に考察するために、多数の同一点渦系の配置の問題 [2] を考える。境界条件として、正方周期 [3] を考える。直感的には、粒子数が増えれば境界条件の影響が小さくなり、厳密に大域的には正方周期であっても個々の点が小さな正三角形格子をなす状態が考えられる。点渦系のハミルトニアンは流体の運動エネルギーの点渦対の相互作用に起因する部分である。ハミルトニアンの極小値を与える配置は、2 対が最も離れた対角線にある場合である。粒子数が増えても、エネルギーの低い状態は点が互いに離れた状態である。逆に 2 点が十分近い状態 (クラスター状態) はエネルギーの高い状態である。熱力学の「温度」の概念で類推すれば、前者の、互いの点が十分離れた状態は、格子を形成する、温度が低い、あるいは負の温度状態である。後者のクラスター状態は、高温の正の温度状態である。それらの中間のハミルト

ニアン値を持つ状態が確率的にはもっとも頻度が多い事を正方周期の点渦系でのモンテカルロシミュレーションで示されている [4]。

### 3 正方周期境界条件における多数の点渦系の運動

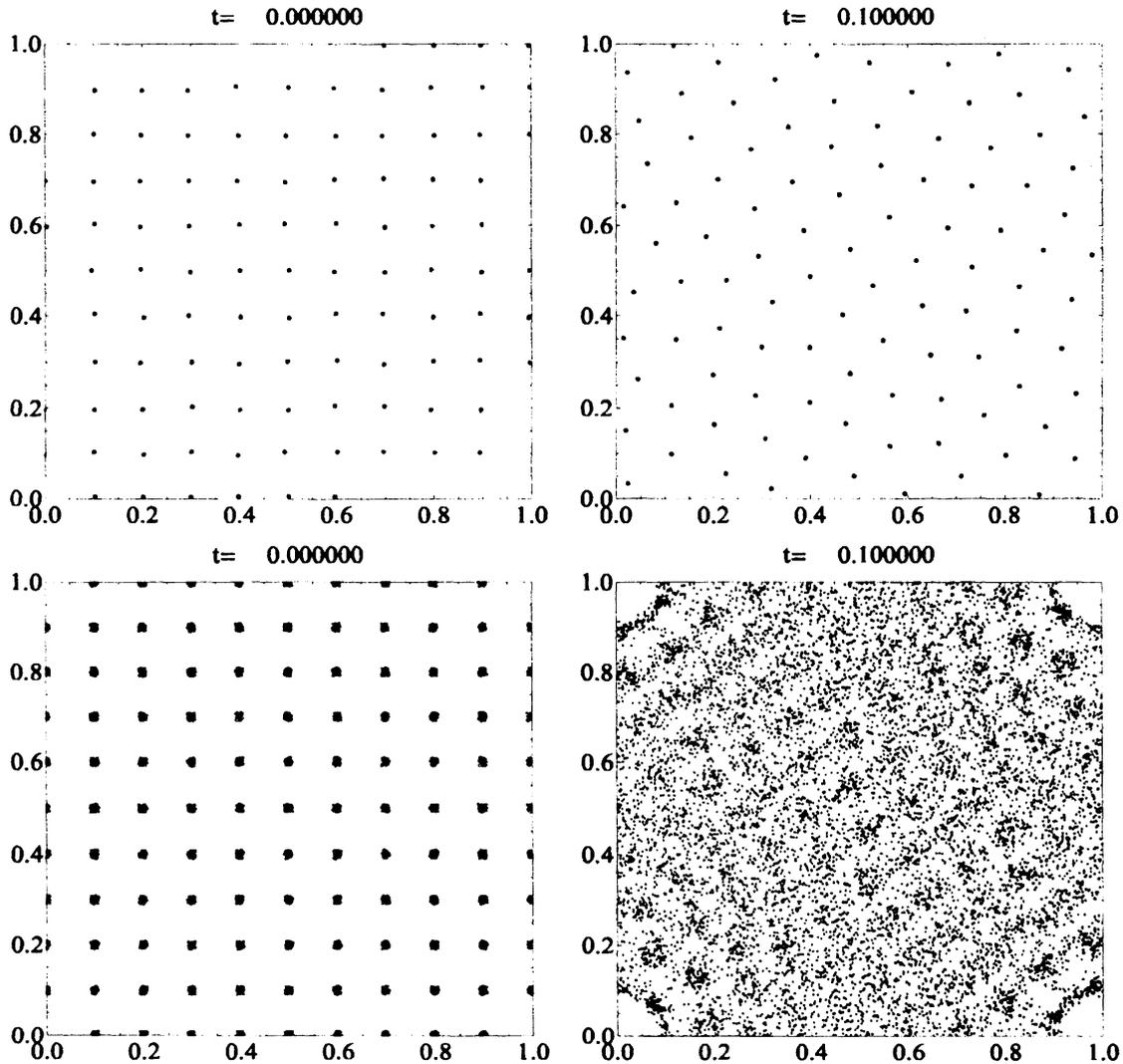


図 1: 100 個の正方周期点渦系の運動。初期配置 ( $t = 0$ ) として正方格子に 10% の摂動を与えている。最終状態 ( $t = 0.1$ ) は、正方格子がなくなり三角格子により近い状態となっている。下図は相対位置  $z_j - z_l$  の分布を示す ( $z_j = x_j + iy_j$ )。

線形理論により、周期点渦系 [3] では、正方格子は不安定であり、正三角形格子が (中立) 安定である。このことから、正方形の周期境界条件であっても、正方格子に近い初期配置の多数の点渦系は、時間発展とともに正方格子から正三角形格子に近い状態に移るのではと考えられる。もちろん、正三角形格子は正方周期系では厳密な意味ではありえない。また、対応するハミルトニ

アン値も異なるので、ハミルトニアン値を初期条件と同じにする条件を満たす程度、正三角形格子から揺らいだ状態で非定常運動を続けるであろうと思われる。

これらを確認するために、100個の同一点渦を正方周期境界条件の下で、初期に $10 \times 10$ の正方格子に10%の摂動を加えた配置から数値計算を行った。図1にその計算例を示す。上記の予想のように、正三角形に近い格子が得られた。

#### 4 多数の正方周期勾配系のパターン

前年の講演 [5, 6] において、ハミルトン系 (点渦+剛体回転の系) に対応する勾配系 (点湧き出し+一様吸い込みの系) の数値計算により、中立安定であるハミルトン系の定常解を求められることを示した。点渦系の複素速度  $w_{pv}$  と勾配 (点湧き出し) 系の複素速度  $w_{ps}$  には次のような関係がある。

$$w_{ps}(z) = -iw_{pv}(z). \quad (1)$$

800個の点を初期にランダムに配置して勾配系の数値計算を行った。初期に、特に近い2点間での再配置がすばやく生じ、ある程度時間が経過するとほとんど点は動かなくなる。正方周期の境界条件であっても点の数を増やせば、勾配系により得られるパターンが、図のように正三角形に近くなる。

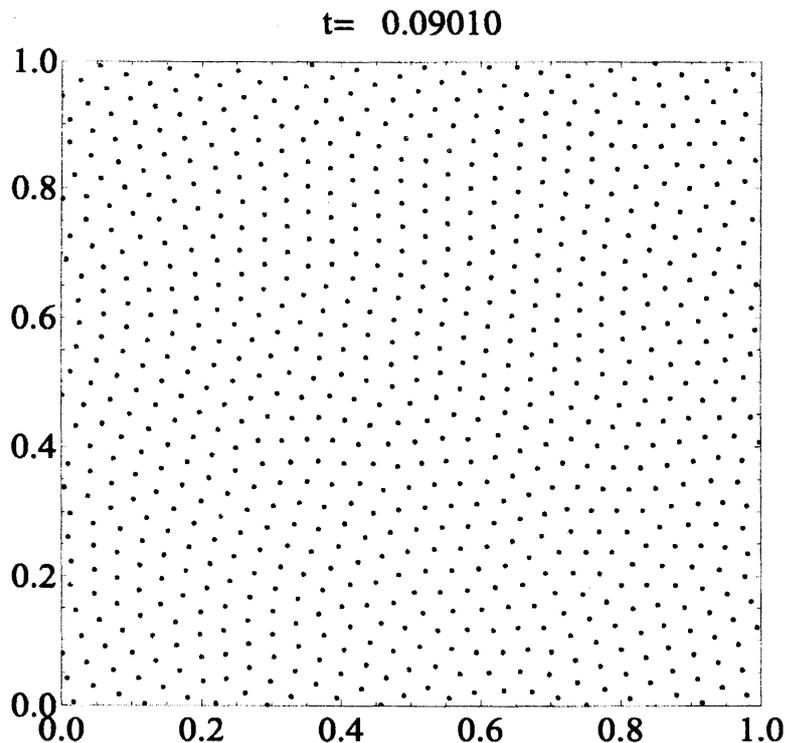


図 2: 800個の正方周期勾配系の最終配置。初期配置 ( $t = 0$ ) はランダム。

## 5 3次元の周期勾配系

以上の考察より、点渦の系に限らず、一般の2対ポテンシャル関数を持つ勾配系において、近傍で斥力であり、空間が有限であり、粒子数を十分大きくすると、極小のリアプノフ関数を持つ状態が、2次元では正三角形パターンであろう事が予想される。この事は、2次元の稠密充填形が正三角形であることに対応する。別のポテンシャル関数でも同様のパターン形成が生じることを数値計算によって示した [7]。ポテンシャル関数の満たすべき条件および具体例は [7] を参照されたい。

勾配系については、空間次元を一般に拡張することが可能である。ここでは、3次元の場合を考える。 $N$  個の点の勾配系  $\vec{x}_j = (x_j, y_j, z_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$  は以下の式で与えられる。

$$(\dot{x}_j, \dot{y}_j, \dot{z}_j) = -\nabla_j \Psi = (-\partial/\partial x_j, -\partial/\partial y_j, -\partial/\partial z_j) \Psi, \quad j = 1, \dots, N. \quad (2)$$

ここで、 $\nabla_j = (\partial/\partial x_j, \partial/\partial y_j, \partial/\partial z_j)$ ,  $\Psi = \Psi(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N)$  であり、左辺のドットは時間微分  $d/dt$  を表す。 $\Psi$  はリアプノフ関数と呼ばれる。

この方程式は、以下のような質点系の力学の運動方程式 (ハミルトン方程式)

$$\dot{\vec{x}}_j = \vec{p}_j, \quad \dot{\vec{p}}_j = -\nabla_j \Psi. \quad (3)$$

を考え、2つの右辺を入れ替えて後者に負号をつけた方程式

$$\dot{\vec{x}}_j = -\nabla_j \Psi, \quad \dot{\vec{p}}_j = -\vec{p}_j. \quad (4)$$

の最初の方程式と同じである。上の後者の方程式は  $p_j$  について指数的に減衰する解を導く方程式となり、質点が定常状態に近づくことを意味する。このように、空間が3次元であっても (点渦系の場合と異なるが) 対応するハミルトン系を考えることが可能である。

3次元でよく知られる対称性の高い結晶格子として、単純立方格子 (Simple Cubic, SC)、体心立方格子 (Body-Centered Cubic, BCC)、面心立方格子 (Face-Centered Cubic, FCC)、六方稠密格子 (Hexagonal Close-Packed, HCP) がある。それぞれの格子の各点の最近接格子の数は、SCが6、BCCが8、FCCとHCPが12である。

2次元で粒子数を十分多くすると正三角形パターンが現れることは、2次元の稠密充填形が正三角形であることに対応する。それに対して、3次元ではFCCとHCPは最近接格子数が同じであるため、稠密充填形としてFCCとHCPの2通りがある。実際、FCCとHCPでは2番目の近接格子の数も同じであり、3番目から違いが出てくる。そのため、一般の勾配系で選択される最小リアプノフ関数の格子形が、最稠密でないSCやBCCではありえない事は容易に想像できるが、FCCとHCPのどちらに近いかは、著者の知りうる限り現時点で未解決であり、注意深い考察を必要とする。また、ポテンシャルが連続関数でなく、剛体球のようなポテンシャルであれば、古典的には、FCCとHCPは同じ確からしきで現れ、実際にはそれらの混合状態がありえる。

## 6 まとめ

多数の点渦の線形安定配置を探索する数値的方法として、勾配系の方法を提案した [5, 6, 7]。この方法は同符号の点渦の場合には特に有効である。本講演では点の個数を数百に増加させた場合で計算を行い、点渦系及び勾配系の両方で点の再配置が起こることを確認した。また、一般のポテンシャル関数の場合や空間3次元の場合でも同種の問題を提起した。

## 参考文献

- [1] Tkachenko, V. K., Sov. Phys. JETP **23** (1966) pp. 1049-1056.
- [2] L. J. Campbell and Robert Ziff: Los Alamos Sci. Lab. Rep. No. LA-7384-MS (1978) pp. 1-40.
- [3] M. Umeki: J. Phys. Soc. Jpn. **76** (2007) 043401.
- [4] M. Umeki: Proc. Appl. Math. Mech. **7**, 2100017-2100018 (2007).
- [5] 梅木 誠: 京都大学数理解析研究所講究録 **1608** (2008) pp. 78-83.
- [6] 梅木 誠: 九州大学応用力学研究所研究集会報告 **19ME-S7** (2008) pp. 136-141.
- [7] M. Umeki: Proceedings of NCTAM57 (2009) pp. 227-232.