数理解析研究所講究録
第 1649 巻 2009 年 58-65


# 絵画的迷路の作り方
# How to make a picturesque maze

岡本 吉央 Yoshio Okamoto* †
上原 隆平 Ryuhei Uehara‡

**概 要**

入力として与えられた白黒 2 値ラスター画像から，その画像の黒ピクセルのみを通過する迷路をランダムに作成する「絵画的迷路生成問題」に対するアルゴリズムを提案する．黒ピクセルのみを通過する問題を単純に定式化すると格子グラフ上のハミルトン道問題となり，NP 困難性に直面してしまうが，提案する手法では定式化を変えることで全域木のランダム生成のみで迷路を作成できる．そのため，アルゴリズムは極めてシンプルである．

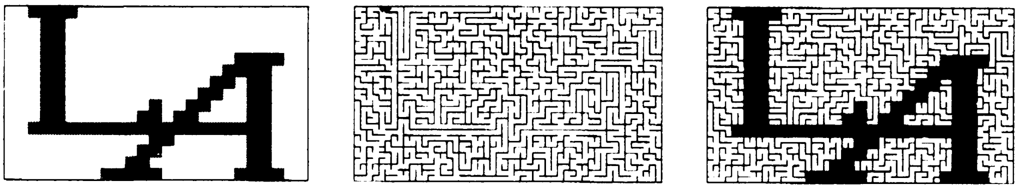

図 1: 絵画的迷路構成問題の例．(左) 2 値ラスター画像を入力とする．(中央) 出力例である．◆がスタートとゴールを表す．(右) 出力例に対する迷路の解答が入力画像となる様子を示している．

## 1 はじめに

この研究の目的は図 1 に示すような絵画的迷路構成問題を解くことである．

**絵画的迷路構成問題**
**入力** 縦 $m$ ピクセル × 横 $n$ ピクセルの白黒 2 値画像
**出力** その解となる通路を隙間なく塗ることで入力画像が目に見えてくる迷路

図 1 が入力と出力の例である．入力の仕様と出力の仕様があいまいであるが，これは意図的にそうしてある．その部分を精緻化することは問題の定式化 (モデル化) に含まれ，それも研究の核となる．

本研究の定式化と構成アルゴリズムには次のような特徴がある．

- 入力画像に要求する性質は黒ピクセル全体が 4 近傍[1]に関して連結であることのみである (利点).
- 入力画像と出力迷路の解経路の軌跡は完全に同一である (利点).

---

*東京工業大学 大学院情報理工学研究科 (Graduate School of Information Science and Engineering, Tokyo Institute of Technology)

†Supported by Global COE Program "Computationism as a Foundation for the Sciences" and Grant-in-Aid for Scientific Research from Ministry of Education, Science and Culture, Japan, and Japan Society for the Promotion of Science.

‡北陸先端科学技術大学院大学 情報科学研究科 (School of Information Science, Japan Advanced Institute of Science and Technology)

[1] 2 次元セルオートマトンの分野で von Neumann 近傍と呼ばれるものと同値.

- 解くべき部分問題に NP 困難問題が現れず，それを解くための核となるアルゴリズムはグラフにおける全域木のランダム生成のみであり，複雑なアルゴリズムを全く必要としない (利点).
- スタートとゴールは必ず隣り合わなくてはならず，スタートとゴールを自由に指定することはできない (欠点).
- アルゴリズムが質の高い迷路を出力するとは限らない (欠点).

迷路作成はパズル制作の 1 つの分野であるが，芸術的な側面が極めて強い．迷路の自動生成アルゴリズムに関する学術的研究もある．まず，迷路はグラフの全域木と見なすことができるので，全域木のランダム生成の応用として迷路生成が語られることも多く，例えば Propp and Wilson の論文 [7] にもランダムに生成された迷路が掲載されている．Walter D. Pullen の Web ページ「Think Labyrinth!」には数多くの迷路生成アルゴリズム (の概略) が掲載されている [8]．しかし，これらのアルゴリズムが絵画的な迷路や芸術的な迷路を生成するわけではない．

絵画的迷路生成についてはあまり研究がない．本研究で扱っているような「浮き出る迷路」については Conceptis 社が絵画的迷路生成アルゴリズムを開発し，それによって作られた絵画的迷路 (彼らは Maze-a-Pix と呼んでいる) の書籍を販売している (例えば [3])．彼らのアルゴリズムの詳細は不明である．日本でもいくつかの書籍が出版されているが [6, 11]，それらは自動的に生成されたものではないようである．浮き出る迷路ではなく「見た目そのものが絵画的な迷路」の自動生成を Xu and Kaplan [9, 10] は研究している．

## 2 提案手法の概略

入力として与えられる縦 $m$ ピクセル × 横 $n$ ピクセルの 2 値画像の黒ピクセル全体を画像の「絵」，白ピクセル全体を画像の「地」と呼ぶことにする．

まず，絵画的でない普通の迷路作成の復習をする．縦 $m$ マス × 横 $n$ マスの矩形が与えられる (図 2 左上)．各マスを頂点と見なし (図 2 中上)，縦横に隣接するマスの組を辺とするグラフを構成する (図 2 右上)．そのグラフの全域木を 1 つ選ぶ (図 2 左下)．全域木の辺と交差するマス目の辺を取り除き (図 2 中下)，適当にスタートとゴールを選べば迷路が出来上がる (図 2 右下)．スタートとゴールを結ぶ経路は一意に定まり，それが迷路の答えとなる．

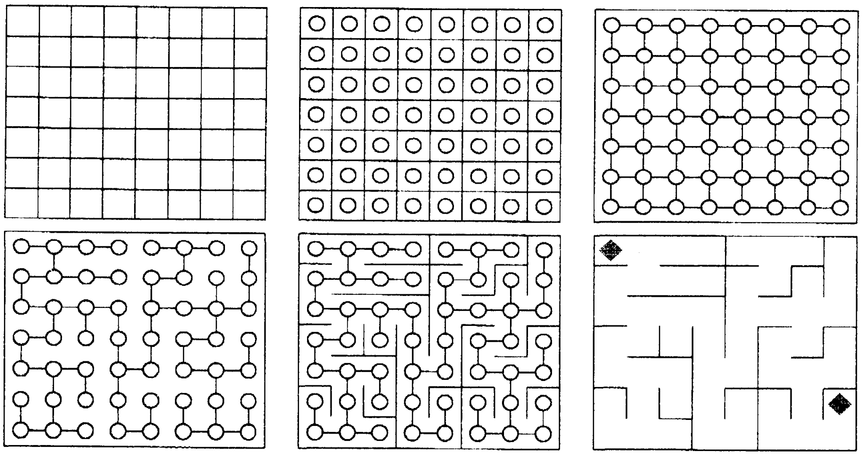

図 2: 迷路の作成法.

では，絵画的迷路の作成を考えよう．縦 $m$ マス × 横 $n$ マスの矩形の中のいくつかのマスが塗られていて，それらが絵の部分に対応する (図 3 左上)．先程と同じように各マスを頂点と見なし (図 3 中上)，縦横に隣接するマスの組を辺とするグラフを構成する (図 3 右上)．このグラフの全域木をうまく選べば，望み

通りの迷路が完成するかもしれないが，そのためには絵に対応する塗られたマスの頂点全体が誘導する部分グラフのみを通る経路が存在しなければならない．これはそのような部分グラフのハミルトン道である．

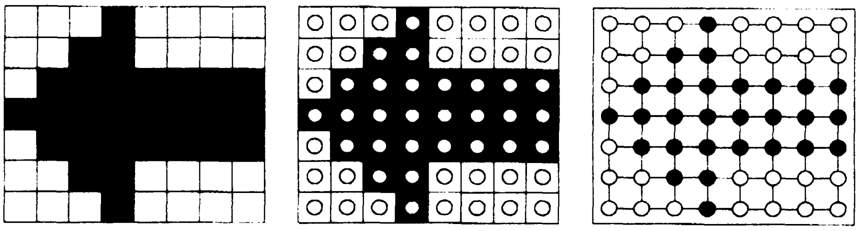

図 3: 絵画的迷路の作成へ向けて．

しかし，入力画像によってはハミルトン道を持たない可能性もある．さらに残念ながら，そのようなグラフ (格子グラフと呼ばれる) に対してハミルトン道が存在するか判定する問題は NP 完全である [4]．入力画像に「穴」がない場合 (すなわち，画像が単連結である場合)，ハミルトン道存在性判定問題は多項式時間で解けることが知られているが [5]，入力画像に穴がないことを要求することは制限が強すぎる．しかも，穴がないからといってハミルトン道の存在を保証できるわけではなく，ハミルトン道が存在しない場合はハミルトン道を持つように入力画像を変形する必要がある．これらの問題を効率よく，しかも，絵の見え方を保ちながら解くことは自明でない．

そのため，本研究では入力画像の絵に対応する頂点全体が誘導する部分グラフに対して連結性のみを仮定することにする．連結でない場合，入力画像を連結にする必要があるが，それはハミルトン道が存在するように変換することに比べて容易である．グラフの連結性は線形時間で判定可能である (適当なグラフ・アルゴリズムの教科書を参照のこと)．2 値ラスター画像に制限すると，線形時間定数作業領域アルゴリズムが存在する [1]．

本研究の提案手法は以下のことばに要約される．すなわち，**ハミルトン道が存在しない場合にハミルトン道が存在するように画像を変換するのではなく，ハミルトン道が存在するように画像の縮尺のみを変換する**のである．具体的には以下の通りである．縦 $m$ マス × 横 $n$ マスの矩形の中のいくつかのマスが塗られている (図 4 左)．ここで，各マス目を縦に 2 等分，横に 2 等分し，4 つの小さなマス目に分ける．これで縦 $2m$ マス × 横 $2n$ マスの矩形が得られる (図 4 中)．元の画像において絵が誘導する部分グラフが連結であれば，この新しい画像において絵が誘導する部分グラフにハミルトン閉路が必ず含まれること (しかも簡単に見つけられること) が次節で見る通り簡単に分かり，それを基にして，所望の迷路が得られる (図 4 右)．これが概略である．詳細を次節で説明する．

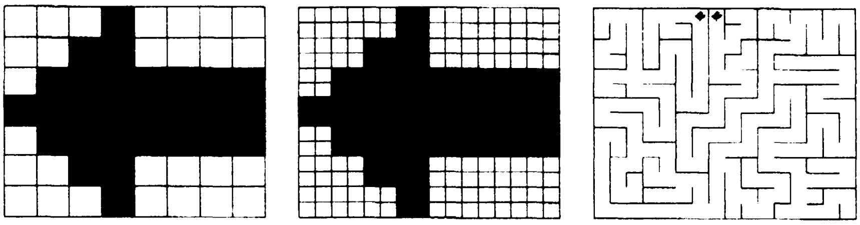

図 4: 提案手法の概略．

## 3 提案手法の詳細

提案手法は次の段階を順に踏む．

### 3.1 解経路の生成

縦 $m$ マス × 横 $n$ マスの 2 値ラスター画像が与えられる (図 5 左上). その画像の絵の部分は連結であると仮定する. ラスター画像から得られるグラフ (図 5 中上) において絵の部分が誘導する部分グラフ (図 5 右上) に着目し, その全域木をランダムに得る (図 5 左下). その全域木を平面的に走査する (図 5 中下). その走査路に従って, 縦 $2m$ マス × 横 $2n$ マスの矩形の上で画像の絵の部分に対するハミルトン道を得る. これが迷路に対する解を成す経路となる (図 5 右下).

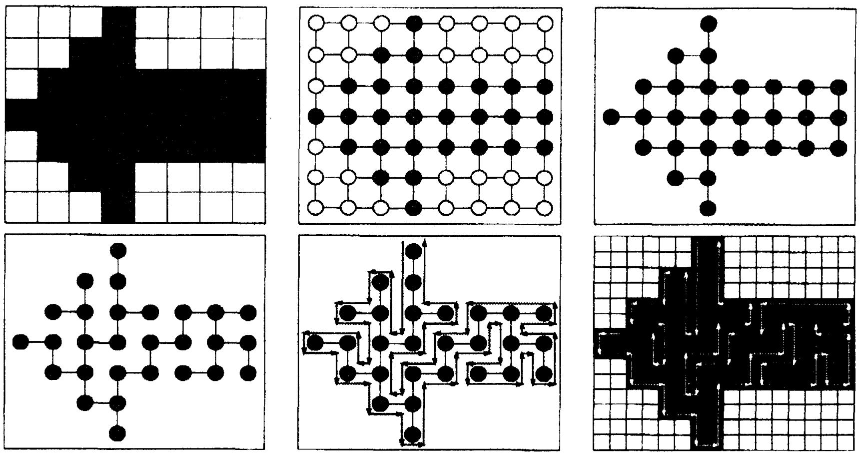

図 5: 解経路の生成.

### 3.2 地の構成

絵の部分に対する解経路 (ハミルトン道) の構成が終了したので, 後は地の部分を構成すればよい. そのため, ここからは縦 $2m$ マス × 横 $2n$ マスの矩形に対する画像 (図 6 左上) として考える. 先の段階で構成したハミルトン路で使われなかった絵の部分の辺を取り除いたグラフ (図 6 右上) を考えて, その全域木を生成する (図 6 左下). その全域木から迷路を抽出すればよい (図 6 右下). 迷路のスタートとゴールは先の段階で構成したハミルトン路の端点であり, そのためスタートとゴールは必ず隣接することとなる.

以上で絵画的迷路生成アルゴリズムの記述は終わる. 単純である. 実装の複雑さは全域木生成の部分に依存するが, 適当なもの (例えば, 辺にランダムな重みを与えて最小全域木を Kruskal 法などで求める方法) でよい.

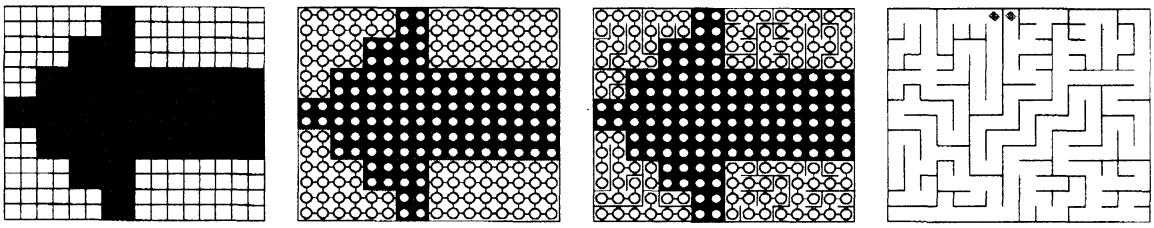

図 6: 地の構成.

### 3.3 ヒューリスティックな改善

実は大きな 2 値ラスター画像で迷路を作成すると，絵の部分と地の部分が迷路を解かなくても分離して見えてしまう．それを回避するための単純な発見的改善法をここでは紹介する．

分離して見えてしまう理由の1つとして，絵の部分と地の部分では迷路の粗さが異なってしまうことが経験的に観察できた．これは，絵の部分と地の部分では全域木の生成が $m \times n$ のグラフで行われたか $2m \times 2n$ のグラフで行われたかの違いがあるためであると考えられる．そのため，地の部分の細かさを消すことが重要である．地の部分の細かさの 1 つに行き止まりの多さがある．行き止まりは壁を多く含むため，遠くから見るとその部分が若干黒く見える．そのため見た目上，絵の部分と地の部分が分離してしまう．また，迷路を解く際にも行き止まりが多いと，迷路の分岐において解経路が容易に判別できてしまうため，面白みに欠ける．そのため，行き止まりを減らすようなヒューリスティクスが有効であると考えた．

この方法は行き止まり (全域木では次数 1 の頂点) がもとの画像において隣接している (すなわち，もとの $2m \times 2n$ のグラフにおいて隣接している) 場合に，次数 1 の頂点を削減する．具体的には以下のように行う．

マス目 $u$ とマス目 $v$ が迷路においてともに (スタートでもゴールでもない) 行き止まりであり，$u$ と $v$ は隣接しているとする．そのとき，迷路において $u$ からスタートして最初の分岐 $b_u$ に行き着くまでの経路を $P_u$ とし，同様に，迷路において $v$ からスタートして最初の分岐 $b_v$ に行き着くまでの経路を $P_v$ とする (図 7 左)．このとき，例えば分岐 $b_u$ において $P_u$ に入る経路を壁で塞ぎ，$u$ と $v$ の間の壁を壊せば，新たな迷路が得られる (図 7 右)．この新たな迷路では，壁で塞いだ箇所から $P_u$ を (逆向きに) 通って，$u$ に到り，隣接する $v$ を経由した後，$P_v$ を通って $b_v$ に到達する経路が存在し，$v$ は行き止まりではなくなる．この操作により必ず行き止まりの数は減少する．ここでは分岐 $b_u$ に壁を置いたが，$b_v$ に置いても構わない．

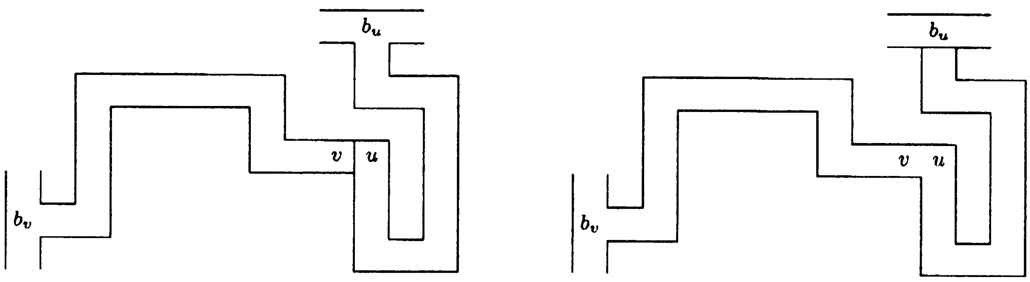


図 7: ヒューリスティックな迷路の改善．

ヒューリスティクスとしては，この操作を隣接する行き止まりが存在しなくなるまで繰り返す．実装を工夫するとこれは線形時間 (すなわち，$O(mn)$ 時間) で達成できる．実際，図 1 も次節の図 9 もこのヒューリスティクスを併用している．ヒューリスティクスを図 6 右の迷路に順次適用した例が図 8 である．

## 4 ちょっと大きな例

戯れに少し大きな例を作成してみた (図 9)．左上の角にスタートとゴールがある．浮き上がる画像は第一著者の描いた適当な絵なので，期待してはいけない．

## 5 総括

絵画的迷路生成の手法を提案した．提案手法はシンプルであり，実装も容易である．また実行時間も速く，シンポジウムでデモンストレーションを行う予定でいる．

迷路作成の世界は奥深いらしく，いろいろなアルゴリズム的問題がまだまだ隠れていると思う．芸術的な色合いも強いので，コンピュータ・グラフィクスの手法と計算理論的手法の双方が必要であると感じる．

**謝辞** 中井亮平氏には初期段階の提案アルゴリズムを実装していただいた．ここに感謝する．

## 参考文献

[1] T. Asano and H. Tanaka. Constant-working space algorithms for connected components labeling. COMP2008-1 (2008) pp. 1–8.

[2] Conceptis Limited. Conceptis puzzles. http://www.conceptispuzzles.com, Accessed on January 16, 2009.

[3] Conceptis Puzzles. Picture This! Mazes. Sterling, New York, 2005.

[4] A. Itai, C.H. Papadimitriou and J.L. Szwarcfiter. Hamilton paths in grid graphs. SIAM Journal on Computing **11** (1982) 676–686.

[5] W. Lenhart and C. Umans. Hamiltonian cycles in solid grid graphs. Proc. 38th FOCS (1997) 496–507.

[6] 望月士郎．浮き出し迷路 1．学研，2006 年．

[7] James G. Propp, David B. Wilson. How to get a perfectly random sample from a generic Markov chain and generate a random spanning tree of a directed graph. Journal of Algorithms **27** (1998) 170–217.

[8] Walter D. Pullen. Think Labyrinth! http://www.astrolog.org/labyrnth.htm, Accessed on January 16, 2009.

[9] Jie Xu and Craig S. Kaplan. Image-guided maze construction. Proceedings of SIGGRAPH 2007, ACM Transactions on Graphics **26** (2007), Article No. 29.

[10] Jie Xu and Craig S. Kaplan. Vortex maze construction. Journal of Mathematics and the Arts **1** (2007) 7–20.

[11] 湯沢一之．あいうえおめいろ．ニコリ，2003 年．

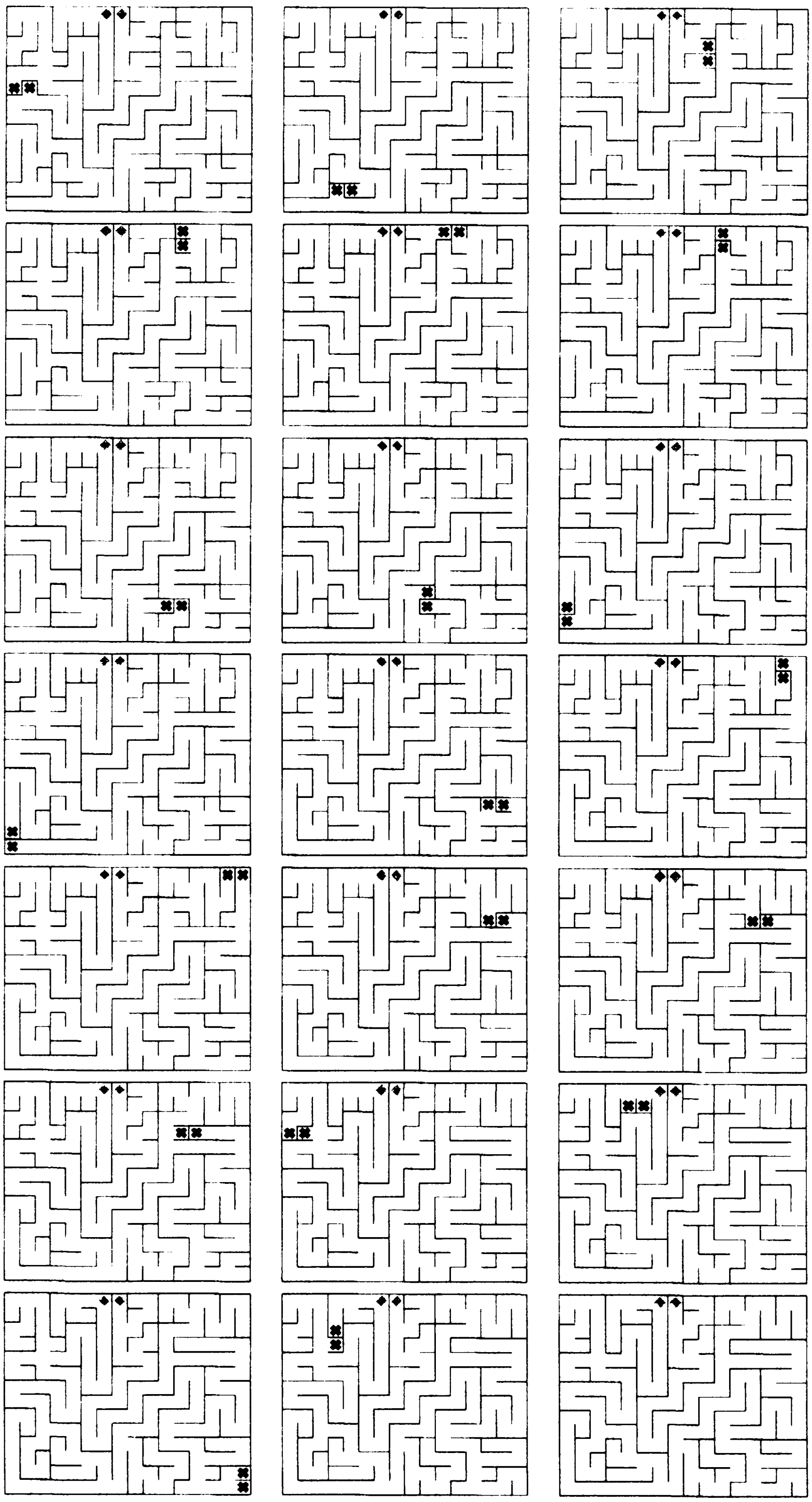

図 8: ヒューリスティクスの適用例. ×でヒューリスティクスを適用する隣接した行き止まりを表す.

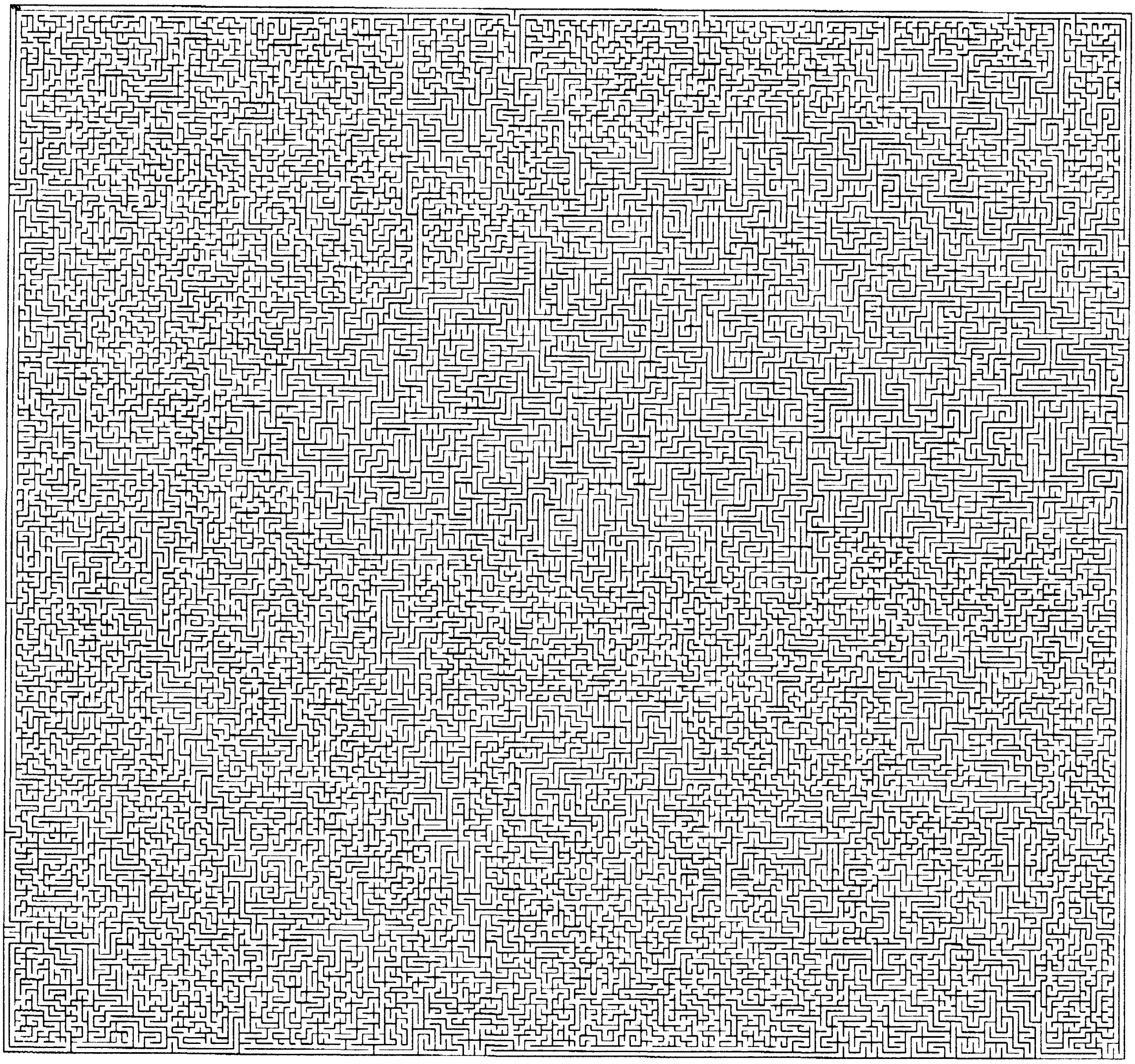

図 9: 縦 200× 横 200 の迷路の構成例．すなわち，入力画像の大きさは縦 100× 横 100 である．