数理解析研究所講究録
第1657巻 2009年 23-73

数学と教育の協同

— ハイマン・バスの挑戦 —

三重大学教育学部　蟹江幸博 (Yukihiro Kanie)
Faculty of Education, Mie University

鳥羽商船高等専門学校　佐波 学 (Manabu Sanami)
Toba National College of Maritime Technology

目次

はじめに 2

1 バスの貢献 — MKT — 3
- 1.1 デボラ・ボールの戦略 3
- 1.2 MKT とは何か 4
- 1.3 2桁の掛算の例 5
- 1.4 カリキュラムの深層に隠れた数学 7
- 1.5 有効性の検証 9

2 バスと数学教育 11
- 2.1 数学教育との出会い 11
- 2.2 MSEB 委員長就任 12
- 2.3 数学者にとっての数学教育 – バスの見解 – 13

3 教育学者との格闘 15
- 3.1 デボラ・ボール 15
- 3.2 バスとボールの邂逅 16
- 3.3 協同への助走 17
- 3.4 協同のはじまり 19

24

4 数学者の眼 – バスの発見した世界 – 21

4.1 ある授業の場面から 21

4.2 何を学ぶのか 27

4.3 数学者の果たすべき役割 28

おわりに 30

参考文献 32

付 録 ショーン数 — 教室における実践例 34

はじめに

本共同研究の開始にあたって，数学者が数学教育にかかわることの意味合いについて考えていた頃，ハイマン・バスの『数学，数学者，そして数学教育』という文献 [11] とめぐりあった．

「教育は，研究者としては衰えてしまった数学者の放牧場 (pasturage) のようなものである」というのは謂れなき神話にすぎず，過去，何人もの一流の数学者が数学教育に貢献してきている．[11] において，バスはこう説く．そして，そうした数学者の代表として，フェリックス・クラインとハンス・フロイデンタールがとりあげられ，事績の紹介がなされていた．

12 月の集会では，バスを導きの手として，クライン，フロイデンタール，そしてバス自身が，なぜ，そして，どのように数学教育とかかわりをもったのかについての報告を行った．数学教育を主題とする共同研究を展開するにあたり，それを支える理念を構築するための示唆を得るためである．

本稿は，12 月集会で話題提供した三人の数学者のうちハイマン・バスに焦点をしぼり，集会では報告し切れなかった部分も加えて，その事績についてまとめたものである．バスを取り上げた理由は，紙数の都合もあるが，散漫になることを避けたかったからである．彼が現在も活動中であること，貢献が数学教育研究者と協同する形態であること，そして，その共同研究者であるデボラ・ボールが現在アメリカで最も影響力のある数学教育研究者のひとりとして活躍中であることにもよっている．さらには，教師教育に強い力点のある活動であり，本短期共同研究の趣旨に最も合う先例であるということにもよっている．

なお，本稿では，数学教育の議論に深入りすることは避け，ハイマン・バスが数学教育と出会い，かかわりを深めていく過程を話題の中心にとりあげることにした．

本稿の構成は，次の通りである．

第1章は，MKT(Mathematical Knowledge for Teaching) をとりあげる．これは，バスが，数学者が関与すべき数学教育の領域であると主張するもので，その核心部分と，ボールの戦略の中での位置づけについて紹介する．第2章は，バスが数学教育とかかわるようになった経緯を述べ，また，その当時の彼の見解を1996年にバークレーの数理科学研究所 (MSRI) で開催された集会『研究大学における数学教育の将来[1]』における基調講演から探る．第3章は，デボラ・ボールと出会ってから共同研究が始まる頃までを, そして，第4章では，小学校の授業にバスが何を見出したかを，バスやボール自身の言葉を追いながら，簡単にまとめてみる．

1 バスの貢献 — MKT —

本章では，バスが数学教育において本質的な寄与をしている，MKT について具体例を中心に紹介する．

MKT とは，Mathematical Knowledge for Teaching のことで，日本語に訳せば「教えるための数学的知識」とでもなるだろうか．

「教えること (teaching)」というのは，おおむね，教師が学校で授業をすることを想定している．また,「知識 (knowledge)」とは，今の日本語の語感よりは幅の広いもので，授業の準備や，授業後の評価活動も含む「教えるという仕事に実際に従事するために必要な, 数学に関係する知識 (knowledges)，技能 (skills)， 思考法の特性 (habits of mind)，感覚 (sensibilities) ([11], p.429)」等を総称させているのだという．

本稿では，この総称としての「教えるための数学的知識」を，バスに倣って MKT という略記形であらわす．

1.1 デボラ・ボールの戦略

バスの共同研究の相手であるデボラ・ボールは，小学校教師から出発し，大学に籍を置くようになっても小学生相手の授業を続けている，数

[1] *The Future of Mathematics Education at Research University.*

学教育の研究者である．彼女の研究は,「授業という実務の場」に立脚点をもつ．

ボールは，実効性のある教師教育を実現するために，次のような戦略を立てている．

（ボールの戦略）

---

1. 授業について研究し,「教えるということに関係する数学的な仕事（the mathematical work of teaching)」を同定 (identify) せよ．
2. 上述の仕事が必要とする数学的な知識 (MKT) がどのようなものであるか，分析せよ．
3. 上述の分析に基づく作業仮説について，教師の有するMKTを測定する検査法を開発して試験し，教師の得点を実務や生徒の学業成績と対比させて検証せよ．
4. 教師のMKT習得を支援する方法を開発し，評価せよ．

1.2 MKTとは何か

バスの貢献のひとつは，上に掲げた戦略の2番目に関係する．

[11] によれば，このMKTは，次の4つのカテゴリーに分類される．

（MKTのカテゴリー）

---

1. 一般的な数学的知識 (Common mathematical knowkedge)
2. 特殊専門的な数学的知識 (Specialized mathematical knowkedge)
3. 数学と生徒に関する知識 (Knowkedge of mathematics and students)

4. 数学と教授法に関する知識 (Knowkedge of mathematics and teaching)

複数桁の掛算の場合を例にとれば，4つのカテゴリーは，それぞれ，次のようになる．

（複数桁の掛算の MKT）

---

1. 標準的な計算法.
2. 生徒の標準的ではない解答が正しいか誤っているかを分析（analyze）する方法.
3. 生徒が間違いやすい箇所.
4. 標準的なアルゴリズム作業の由来や方法を説明するのに最も適した題材の種類や提示法.

ボールとの共同研究を通じてバスが発見した数学者が貢献すべき数学教育の新しい領域とは，この2番目のカテゴリーである．

次節で，具体例として，複数桁の掛け算を取り上げてみよう（[8] 参照）.

1.3　2桁の掛算の例

筆算で 35×25 を計算する場合を考える.

標準的な計算法

「標準的な計算法」（前節のカテゴリーの1番目）は，以下のようになる．成人が知っているべきだと，社会的に想定されている数学的な知識である．

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 3 & 5 \\
\times & & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 7 & 5 \\
 & 7 & 0 & \\
\hline
 & 8 & 7 & 5
\end{array}
$$

誤答の解析

2番目のカテゴリーで問題となることのひとつは，下のような「誤答」から「子供はどこを間違えたか」を探求する，一種の誤り解析である．

$$
\begin{array}{rrrr}
 & & 3 & 5 \\
\times & & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 7 & 5 \\
 & & 7 & 0 \\
\hline
 & 2 & 4 & 5
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rrrr}
 & & 3 & 5 \\
\times & & 2 & 5 \\
\hline
 & 2 & 5 & 5 \\
 & 8 & 0 & \\
\hline
1 & 0 & 5 & 5
\end{array}
$$

「どこを間違えたか」を知ることが，どのように教えれば良いかの指針となることはあきらかであろう．

しかし，実際の授業では，どういう計算の仕方をしたのか，子供自身に尋ねることが出来ない状況や，尋ねても子供が自分では説明出来ない状況が想定される．計算の跡から，子供の計算の仕方を推定する必要があるのだ．

非標準的な計算法

もうひとつの問題は，下のように，答はあっているが「非標準的な計算法」を用いている場合である．

35	35
× 25	× 25
125	25
75	150
875	100
	600
	875

こうした解法が,「一般的に正しい答を与えるアルゴリズム」になっているのか否かを解析する必要がある.

どこで教えられるのか

それでは，実際の授業において子供たちが誤答や非標準的解答をした場合，その“数学的構造”について知るような教育は，教師の養成課程のどこで与えられているのだろうか.

このような「知識」は,「数学者には，教育学の方法の講義に含まれているように思われるかもしれない．しかし，教育学部では，しばしば適当な数学の講義で扱うべきだと見なされている．こうして，このような問題は，教員養成では扱われないことになる．数学の学部と数学教育の学部の間の提携が必要な多くの理由のうちのひとつが，ここにある（[12], p.4)」ことになる.

1.4　カリキュラムの深層に隠れた数学

MKT は数学を用いる他の職種や専門で用いる数学的な知識とは異なるというのが，バスの基本的な主張である.

新しい知識

MKT は，教師が解いたり論じたりする必要のある専門的な数学的問題に対して，実務的に有用でなければならない．そして，2番目のカテゴリーである「特殊専門的な数学的知識」は，教育の専門家ではなく，数学者が数学的に扱うべき領域になる.

バスは，こう述べる．

> 特殊専門的な数学的知識は，熟練した教師が必要とする（生徒についてではなく，教授法についてでもない）「厳密な意味での数学的な知識」である．しかし，数学的な訓練を受けた多くの専門家，例えば数学研究者，には未だに知られていない「知識」なのだ．つまり，一般に信じられているのとは反対に，「MKT の純粋に数学的な部分は，数学者が知っている知識の真に小さな部分集合なのでは**ない**」のだ．
>
> …
>
> 実務 (practice) に基づいた MKT へのアプローチによって明らかになったことは，学校のカリキュラムの**深層**には，それを**超えたところ**と同様に，豊かな数学が存在しているということである．([11], p429.)

どうアプローチするか

では，数学者は，この数学教育の新しい領域に，どのようにアプローチすれば良いのだろうか．

再び，バスの言葉に耳を傾けてみよう．

> 数学教育は，数学ではない．数学教育は，高度に専門的な数学の知識を基本的に使用する，専門分野のひとつである．この意味において，私の思うに，数学教育を応用数学の一種と見なすことが有用となる．そして，数学者が「応用数学としての数学教育」への貢献を望むのなら，最初の課題は，他の応用数学の場合と同様，応用の対象領域における数学的な問題の性質，そして，この領域で有用ないし利用可能な数学的知識の形式を，感覚的（sensitively）に理解することである．([11], p418.)

1.5 有効性の検証

本章を終えるにあたり，1.1 節に挙げたボールの戦略の後半部分について，複数桁の掛算の例で，簡単に触れておこう．

仮説検定

3 番目の戦略では，まず,「分析」に基づく作業仮説を，検証の可能な形で立てることが必要にある．

例として，今，複数桁の掛算において,「非標準的な計算法」についての「数学的知識」が「教師の教えるという活動」において有用であるという「作業仮説」が立てられたとしよう．次にそれを「検証（統計的検定)」するということになる．

検証の方法としては，まず，実験対象として選ばれた教師集団に対して，次ページのような「数学的知識」の有無を問う問題群からなる「テスト」を実施する．

その後，教師の得点とその教師が教えている生徒たちの（しかるべき検査法で得られた）成績を比較して，作業仮説の成立の有無の統計的な検定を行うことになる．

詳細については，例えば，[14] や [13] を参照願いたい．

MKT のデータ・ベース構築のために

4 番目の戦略であり，最終目標でもある「実効的（実務で有効）な教師教育法」の開発のためには，その前提として，3 番目の戦略で有効性の確認された「教えるという実務で役に立つ数学的知識」の一種のデータベースを構築する必要があろう．

そのためには，今まで数学と教育の隙間に放置されてきた，上述のような分野を対象とする専門家が必要である．1.4 節の「数学教育は応用数学の一種」であるとするバスの言明は，そうした専門家の要件を示していると解することができるかもしれない．

なお，こうした「専門分野」が，数理科学という学問分野におけるひとつの新しい可能性であることについては，第 2 章の 2.3 節も参照願いたい．

（問題例）

あなたが，2桁の掛算の授業をしているところを想像して下さい．生徒のノートを見ると，下のような計算をしている者がいました．

生徒A	生徒B	生徒C
35	35	35
×25	×25	×25
125	175	25
75	70	150
875	875	100
		600
		875

それぞれの生徒の計算の方法は，すべての数の掛算に使えるでしょうか？

A，B，C それぞれの方法について，次の表から適当な番号を選んで下さい．

	使える	使えない	わからない
a) 方法A	1	2	3
b) 方法B	1	2	3
c) 方法C	1	2	3

2 バスと数学教育

2.1 数学教育との出会い

ハイマン・バス (Hyman Bass) は，1932 年，テキサスで生まれた．

バスの数学者への第一歩は，プリンストン大学の初年時に聴いたエミール・アルティン (Emil Artin) の解析学の講義にあるという．サージ・ラング (Serge Lang) や ジョン・テイト (John Tate) が，大学院生相手の TA をしていた時代である．アルティンの他には，講師になったばかりのジョン・ミルナー (John Milnor) の微分幾何，ラルフ・フォックス (Ralph Fox) の代数などの講義を受けている．

良き教師たちに出会ったことが，バスに，数学を教えることへの関心を引き起こした．彼は，こう述べる．「素晴らしい先生たちから強い数学的な感化を与えられていたので，私としては，教えることを楽しみとしていた．やっかいな商売と思ったことはない（[9], p.5）.」

1955 年にプリンストンを卒業（B.A.）したバスは，シカゴ大学に移り，カプランスキー (Kaplansky) の指導下で，1959 年に Ph.D. を取得，1960 年からはコロンビア大学で教職に就く．

主著である『Algebraic K-theory』の出版は 1968 年である．

数学教育に関係する主な役職を挙げれば，全米科学アカデミー (NAS) の数理科学教育委員会の，1991 年に委員，1993 年から 2000 年に委員長を務めている．また，1995 年から 2000 年はアメリカ数学会教育委員会の委員長，1998 年から 2006 年は ICMI の会長を歴任する．

なお，1999 年からミシガン大学に移っており，2001 年から 03 年は，AMS の会長も務めている．

MSEB の委員に

バスが数学教育に関与するようになった契機は，[9] によれば，1991 年に全米科学アカデミーの数理科学教育委員会 (MSEB, Mathematical Sciences Education Board) の委員になったことにある．

この委員会 (MSEB) には，委員として，学校教員，教員養成の関係者，学校長，教育研究者，科学博物館の館長，PTA の会長，教員団体の会長，産業界の代表，出版者，科学者，等々の人々が集っていた．

MSEB は合衆国における数学教育全般に対して広汎な関心をもってはいたが，その主たる興味はK-12 [2] 教育であった．そのため，バスは，初めて耳にする様々な主張と向き合うことになる．

委員会で交わされる多様な主張の重要性と緊急性を確信したバスは，同時に，そうした主張が自分の慣れ親しんだ数学的な内容を超えるものであり，かつて学んだことのない政策や社会科学の領域に関係するものであることを悟った．自身の勉強不足を急いで補うため，バスは，文献を渉猟し，MSEB に関係する主要団体の人々と精力的に接触をはかった．

2.2 MSEB 委員長就任

数学者と教育関係者の関係

数学者として教育関係者と接触を重ねるうち，バスは，それまでの両者の交流のありかたに厳しい見方をもつようになる．

数学者，教育者，学校教員の交流の歴史は，例外はあるものの，むしろ不快な代物 (sordid affair) であったと，バスは述べる．([9], p11-12.)

> 数学者は，教育的な事柄をもっぱら内容に関する観点から考える傾向にある．つまり，どんな題材を教えるべきかということである．こうして，数学者は，答を手中にしている専門家として権威ある助言を与える用意があるふうで，教師や教育者に接する．数学者は，しばしば，話相手の教師や教育者に（意図的ではないにせよ）尊大さを感じさせてしまい，その結果として防御的な姿勢や恨みの感情を呼び起こしてしまう．そうした歴史を経て，今こそ必要とされている数学者と教育者の対話には，疑念と文化的偏見という重荷が課せられるようになっているのだ．

委員長への推挙

こうした努力を続けるうち，1993 年，バスは，MSEB の委員長に推される．

本人にとっても意外だったという．理由を尋ねたところ，委員会に集う教員たちと「心からの関心をもって，気安く，しかし敬意を失わずに話ができる」ところが決定的であったとわかってくる．

[2]幼稚園（kindergarten）から 12 年生まで．おおむね，初等中等教育段階を指す．

しばらく躊躇した後，バスは，委員長職を受けることにした．

MSEB の委員長に就任した翌年には，後に数学教育に関する共同研究を行うことになる，デボラ・ボールと出会うことになる．

結果として，バスは，公的にも個人的にも，教育改革へのより深くより組織的な関与をするようになっていく．

2.3 数学者にとっての数学教育 – バスの見解 –

MSEB の委員長時代，バスは，数学者にとっての数学教育というものをどのように考えていたのだろうか．

MSRI 集会の基調講演より

1996 年の 12 月 5-6 日，バークレーの数理科学研究所（MSRI）で『研究大学における数学教育の将来』と題する集会が開催された．この集会は，公式の発表および質疑応答部門と非公式な「ワーキンググループ」から構成されていて，100 人を超える数学者が参加している．

バスは，この集会の基調講演を行った．彼は，MSRI 設立時の初代理事長だったが，集会当時は，MSEB の委員長職に加えアメリカ数学会の教育委員長でもあった．

この集会の基調講演 [10] から，数学者と数学教育に関するバスの見解をとりあげてみる．

数学者の経済的基盤と社会的期待

バスの基調講演は，次のように始まる．

> 数理科学という職業は，相転移の途次にあります．姿を現したときには小さかったかもしれませんが，再分配され，大きく拡散していったのです．我々は，絶滅危惧種ではありません．しかし，我々の健康状態は，島国気質へと傾きがちな歴史的傾向を乗り越え，我々の兄弟や顧客であるすべての集団へと裾野を広げることに拠っているのです．

バスは，言う．ほとんどの数学者は「主として数学研究をするための訓練を受けたが，彼らの職業上の経済的基盤は，今や圧倒的に（predominantly）教育的な任務にある」と．そして，その背景には数学というものに対する社会からの要請の変化があるのだ，と．

一握りのエリートのための教育が要請されていた時代には，勉強が出来ないのは学生に資質が欠けているせいとしておけばよかった．しかし，高度に競争的で技術的な世界経済の出現によって，数学教育への要請は根本的に拡大されることとなった．今や，数学の学習につまずく学生が多数いるような場合，悪いのは学生ではなく，教育システムの方が機能不全であると判定されるのだ，と．

そして，バスは，こう宣言する．

> 時は来たのです．数理科学者が，教育者としての役割について考え直すべき時が．

それでは，大学における数学者の教育活動を改善するには，どうすればよいのだろうか．

数学教育関係者に学ぶ

バスの説くところは,「料理を習う最良の方法は，練達の料理人の指導下で料理をしてみること」である．つまり，教育の専門家 — 学校教員から教育の研究をしている人々まで — の支援を受けることに他ならない．

そもそも,「数学教育というものは，数学自身とは異なり，精密科学ではない．もっと経験的で，元来，総合的（多分野にまたがる）なものである．その目的は，知的に閉じてはおらず，不確実さや不確定さが必然的に伴う人間というものを支援することにある．それ（数学教育）は，それ自身の，明証さの基準，論議や理論構築の方法，専門的な論述等々をもつ，ひとつの社会科学である．それ（数学教育）は，確立された研究の基盤をもち，そこから過去数十年にわたって多量に学ばれ続けてきている」のであり，大学の数学者の教育的な仕事に寄与するのに十分耐えうる重要な新しい知識のプールが存在しているのだという．

ビジネス・チャンスとしての数学教育

もっとも，数学者と教育関係者との交流は，結局のところ，一方通行ではなく，互恵的なものになる．教員や教育研究者の集団は，大学の数学者の教育に関する意識や能力を向上させることが可能だが，数学者は学校カリキュラムや教育実践の強化に貢献できるのだ．

そして，

> さらに付け加えるならば，数学教育というものは，数理科学に関する学科の新しい専門職大学院課程の計画において重要な選択肢のひとつを与えてもいるのです．… そして，より重大な挑戦は，数理科学者と教育の専門家が協同することにより，数学科に基盤をもち教員養成の数学的な部分を目的とするような数学の課程を設計することなのです．

そう，数学教育は，数学者にとって，一種のビジネス・チャンスだという見方ができるかもしれない．このあたりの主張については，第 2 章の 1.5 節も参照願いたい．

境界を越えて

バスの講演は，次のように結ばれる．

> 数理科学者として，数学教育の研究者として，ユニバーシティ，カレッジ，コミュニティ・カレッジや学校の教師として，我々は，大学院や学部そして K-12 教育に対する我々の関心を，統合化された教育的事業 (enterprise) の一部と見ることから始めなければなりません．そうして，我々は，文化や学問分野，所属機関の境界（ボーダー）を越えて，交流し協同することを学ばなければならないのです．そう，まさにこれこそ，数理科学の研究分野において我々が必要としていることなのです．

ちょうどこの頃，バス自身も，境界（ボーダー）を越えた協同への第一歩を踏み出しつつあった．

3　教育学者との格闘

3.1　デボラ・ボール

デボラ・ボールという女性が登場する．

ボールは，ミシガン州立大学で小学校教員養成のための標準的な教育を受け，1975 年からは公立の小学校で教壇に立っていた．

現場教師の苦悩

当初，低学年の算数を担当したボールは，「伝統的」な「知識注入型」の授業を行い，特に問題を感じていなかった．

しかし，高学年の担当に変わったとき，彼女は何かがうまくいかないのを感じた．どんなに説明に工夫を凝らし計算練習を繰り返させても，「生徒たちは金曜日に複数桁の割り算が出来るようになって家に帰るが，月曜日にはどこから手をつければよいのかさえ覚えてないように見えた（[15], p.14）」．

模索の日々

解決策を求めたボールは，大学の研究者たちによって開発された「能力開発型」の新しいプログラムを学び，実践するが，その中で，様々な疑問にぶつかる．

彼女は，疑問から逃げることなく，「知的な誠実さ（intellectual honesty）」をもって立ち向かう．やがて，この疑問に導かれるまま，大学院を経て大学に籍をおく数学教育の研究者に転じる．そして，研究の主題である「実務に基礎をおく教師教育」を模索するうち，1994年に一人の数学者と出会うことになった．

ハイマン・バスである．

3.2 バスとボールの邂逅

初めての出会い

バスとボールが初めて会ったのは，1994年，大学における数学教育が主題のある研究集会の席上であったという．

その頃，ボールは，授業を記録したビデオテープに対する数学者の意見を求めていた．そこで，ボールはバスに，テープを見てコメントすることに興味はあるかと尋ねた．

バスは，あると答えた．

その後，二人は，二年間で，一，二回，テープを見て初等数学の内容や教師教育について話をする機会をもった．

二人は少しばかりメールのやりとりをし，また，ボールは，バスの依頼に応じて，自身のものを含め読むべきだと思われる論文をバスに送っ

た．バスは，論文の中の題材の扱いについて，教師がなすべき，あるいは，なすことのできる方法について提案した．

ボールは述べる．実際の数学教育の例について読んだり見たりすることが，バスの興味をひいたようだ．これは，会合で座ったまま教育の政策や改善について議論することとは，まったく異なることなのだ，と．

バスは，子供のアイデアや言葉についての詳細な数学的分析に熱中するようになっていった．

見解の相違

二人の交信は頻繁になり，徐々に焦点が定まっていったが，しばしば，ひどく論争的になったという．

生徒の言明の意味の解釈や生徒に何が可能かといった点について，二人は見解を異にした．また，カリキュラム改革や，学習理論，教師教育に関する多くの事項についても，合意できなかった．

しかし，二人は，実際の授業の記録を，そして，そこで行われている数学を見続けた．

初期の二人のやりとりを，[2] から引用してみよう．

3.3 協同への助走

授業の断片

ボールの 3 年生のクラスの，ある日の授業の冒頭近くのこと，ベニーという男の子が，こう言った．

> あの，ぼくは，さっきは言ったんだけど，えー，0 は偶数だって，だけど，それから，こう思ったんだ，変えようって，つまり，0 は，特別だと思うんだ，だって，えー，ぼくは — えー，偶数というのは，こんな感じで — 偶数はできてるんだよ，つまり，2 のように，えー，2 が 4 をつくって，4 は偶数になって，それから，4 は 8 をつくって，8 は偶数で，えーと，こんな感じなんだ．それから，こんな感じでやってけば，1 足す 1 みたいな感じで，同じ数と同じ数を足していくんだ．それで，だから，ぼくは，ぼくは 0 は特別だと思うんだ．

教師であるボールは，ベニーの言いたいことは何なのか，いろいろな可能性に思いをめぐらせる．二つの偶数を加えると偶数になる？ 2 の冪について話しているのか？ 0 が「特別」というのはどういう意味か？

ベニーが考えていることを探ろうと，ボールはこう尋ねる．

ちょっと尋いてもいい？ あなたの言ったことは，二つの偶数を一緒にすれば，別の偶数ができるということなの？ それとも，偶数は全部，他の偶数からできているということ？

ベニーはうなずいたが，自分でもよくわからないように見えた.「偶数は全部他の偶数からできている」というのは，どういうことか．ボールにはよくわからなかった.

すぐに，ベッツィーという女の子が，6を持ち出して，ベニーに賛成できないといった．別のクラスメートのショーンが参加して,「6は二つの奇数で偶数になる，偶数をつくってるんだ」と言った.

ベニーはしばらく考えて，こう言った.

ぼくだってわかってるよ，だけど，えー，えー，ぼくが言ってるのは，2足す2が4で，4足す4が8になるみたいなことで，6は飛ばしたんで，つまり，ぼくは，数を足したんで，足すんだ．2足す2が4で，4は偶数になって，ぼくが言ってるのは，えー，こんな感じのもので，言いたいのは — えー，2足す2が4で，4足す4が8で…

ベッツィーが話をさえぎって，尋ねる.

じゃあ，あなたがしていることは，2から行って，それから，2とおんなじものから，それから，また行って — ずうっと，ずうっと，先まで？

ベニーが答える.「うん，そう．ぼくは，2，4，6，8というふうに，全部の数では行かないんだ.」

バスの所見

録画された上述の部分を見たバスは，ベニーは2の冪を発見したと，ただちに確信したという.

彼は，ボールに宛ててこう書いた.

ベニーは，実効的に，かつ，明示的に，まさしく数学的な定義を制定する，2の冪の帰納的アルゴリズムを与えています．彼の記述に欠けているのは，数学的な名称だけなのです．もっと言うならば，彼がこのアイデアを持っていることは，次のような計算をさせてみれば確認できます．彼に，何か2の冪，例えば128を与えてみて，次の項は何かと尋ねてみるのです．計算の時間さえ与えてやれば，彼が次の2の冪を得ることを，私は確信しております…（[2] ,p.19)

ボールは，こうコメントする．

> 確かに，大人は，しばしば，子供の不器用で風変わりな言葉遣いの奥に隠された「教養人（the sophistication）」を認識することに失敗します．しかし，ときおり，大人は，子供の言葉が意図する以上に，成熟した理解や読解を浸透させる (imbuing) ことで，生徒が言ったことを解釈しすぎる (overinterpret) ものなのです．([2], p.19)

ボールは，バスは後者だと言いたいのだろう．

バスの情熱

二人は，論じ合い，ビデオテープとトランスクリプト[3]から，それぞれが信ずるところのデータを提供しあうよう努めた．ボールの見るところ，こうしたデータについてのバスの作業は，少しずつ正確さと細部への顧慮を伴うようになり，鋭さを増し，また，焦点が合うようになっていった．

ボールは言う．「私は，いまだかつて，数学者如何を問わず，これ以上注意深くビデオテープを観た人を知らない」と．

同時に，バスの数学的な眼は，しばしば彼をして証拠というものからはほど遠い解釈へと誘った．経験的研究に従事したことのない科学者には，これらはすべて大変目新しいことだったのだろうと，ボールは述べている．

もちろん，ボールにとっても，自身の仕事にこのレベルの数学的精査を受けることは，初めての経験であった．

3.4　協同のはじまり

注解の作成

ボールは，バスに，ひとつ，ふたつ，ビデオテープの数学的な注解（mathematical commentary）を書いてみる気はないかと尋ねた．

バスは，興味をもったようだった．

「数学的注釈」とはどういうものであるのか，定型があったわけではなかったが，2本のテープを選んで，そこから始めることにした．

[3] transcript，文字に起こした原稿．

バスは，繰り返し，繰り返しテープを観て，トランスクリプトの上にメモをとる．そして，コメントを電子メールでボールに送るという作業に没頭した．

バスは，よくトランスクリプトの誤りを見つけたという．

しばしば，二人は合意しなかった．子供の言葉の意味することは何か，どんな数学が授業の議論の射程に含まれるかについて，解釈が異なったのだ．

共同研究の開幕

ある日，バスがボールに，あるビデオテープがたいへん魅惑的だと報じた．彼がそんなに興味を感じたものが何であるのか，ボールはぜひ聞きたいと返した．

しかし，彼は答えない．

なぜかと尋ねるボールに，バスは言った．

「だって，あなたは何でも正しいことにしてしまうんだ[4]」

頭のなかに閃光が走り，ボールは悟る.「ここだ，分析や注解というものに対する二人の考えの違うところは」と．

ボールは述べる．

> … 私が彼（バス）に望んだのは，題材を調べていて目についた数学的な主張を見える形にしてくれることであったが，彼が探していたのは，数学的な誤りであり，欠損であり，失われた好機だったのだ．これは，二人の仕事において重要な瞬間だった．ここで，分析や注解に向き合う姿勢についての，二人の間にある基本的な差異がぶつかりあったのだ．
>
> この注解の仕事が進むにつれ，二人の議論は，初等的な教授や学習を評する数学的な主張や洞察への理解を深めるために資するような, 数学的分析をもたらし始めたように思われる．これこそ，初等教育に必要な数学とは何かという問題に関する，二人の正式な研究の開幕を告げるベルの音であった．([2], p.20)

[4]Because you did everything right.

4 数学者の眼 – バスの発見した世界 –

第2章で紹介したように，数学教育というものをいわば俯瞰的に見ていたバスは，共同研究者となるデボラ・ボールとの出会いを通じて，地上で演じられている数学教育の現場（つまり実際の授業）に目を転ずることになった．

本章では，バスが発見した数学教育の世界 — 子供たちが数学を学ぶ過程 — にバスが見たものについて，瞥見してみたい．

具体的には，文献[11]に従い，ある授業の場面を「バスの解説つき」で，眺めてみることにする．

なお,「バスの眼を通さずに」見るとどうなるかを知るため，ここで取り上げられた場面を含む授業の記録を，本稿の付録としてまとめてある．バスの「解釈」を，批評的に考察するための一助となることを期したい．

4.1 ある授業の場面から

「実際に数学を教えるという行為は，非常に複雑で複合的な過程であることを，初等数学の具体的な授業の場面を例に取り上げることで，眺めてみたい.」バスは，最初に，こう述べる．

訪れるのは，三年生（8歳）のクラスである．このクラスは，言語的に多様（多くが英語を第二外国語としており，なかには，つい最近アメリカに来たばかりの者もいる）である．

子供たちは，偶数と奇数について学んでいる．

彼らは，三年生になるまでに,（小さな数について）どの数が偶数で，どの数が奇数であるかを「知っている」．しかし，こうした概念について，いかなる形式的な定義も与えられていない．

単元は，次のような問題の解の探求から始まった．

> ミックのポケットには，30セント入っています．彼は，お金を全部ガムとプレッツェル[5]を買うのに使って，ポケットには1セントもおつりを残したくないと思っています．
>
> 30セントで，どんなふうに買えば良いでしょうか？ どんな選び方がありますか？

[5]結び目形の塩味クラッカー．

この問題を解く過程で，子供たちは偶数と奇数の概念と出会い，その算術的な性質（例えば，偶数＋奇数＝奇数，奇数＋奇数＝偶数，等々）を予想するようになる．

ショーンの主張

ある日，生徒たちが上述の予想について考える準備段階として，この予想がすべての数に対して正しいかどうかを調べていた．

授業が始まってまもなく，前日の議論を振り返っていたとき，ショーンという男の子が，手を挙げてこう言った．

> ええっと，ぼくは，昨日の話し合いについては特にないんだけど，6について考えたんだ．この数は…今も考えてるんだけど．この数は，奇数にもなれると思う．だって，二つ，四つ，六つで，つまり，2が三つで6になるわけで…
>
> それから，3が二つだから，この数は奇数で偶数になれるわけ．両方！ 三つのものからできているし，二つのものから作ることもできる．

これが，この授業の予想外の主題となったショーンの主張の，最初の表明だった．

バスのコメント

この言葉を聞いて，ショーンの考えていることについて即座に理解せよであるとか，教師ならこれこれこのようにすべきであると主張するのは，かなり難しい．

しかし，そうした判断の前に，さらに難しい問題について述べておくべきだろう．「この場面で実際に進行しつつあることは，数学的に重要であるのか？ 我々は，何を見ることができるのか？ 教師の理解を支援し，数学的な感受性を高めさせるものは，何なのだろうか？」という問題である．

子供たちがどのように数学的なアイデアや主張を処理し，教師の数学的な動き (move) が議論をいかに導くかに注意を払いながら，この授業で今から展開される数学的な論争をよく見て欲しい．

クラスの異議

「6 は奇数と偶数の両方である」というショーンの発言に対して，教師[6]は，すぐには反論も訂正もしなかった．彼女は，主張を繰り返し，クラスから意見を求めることで，ショーンの言っていることを「公的に明確化（publicly clarify）」しようと試みる．同級生たちは，ただちに反対を表明する．誰しも，6 が偶数であることは二年生のときから知っているのだ．

最初に，カサンドラが異議を唱える．黒板の上に設置された「数直線(目盛に整数値を付した横線)」を指しながら，彼女はこう言う．

> 6 は奇数にはなれない．だって，これは［彼女は数直線を，ゼロから順に指していく］偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数…
> でも，ゼロは奇数じゃあない．

ショーンは，自身の主張に固執する．

> …だって，三つの何かが 6 を作っているんだし，三つの何かということは奇数みたいなもので…

今度は，キースが言い張る．「それが，必ず 6 が奇数になるということを意味するわけじゃあない.」何人かの生徒が賛意を表す．教師がキースに「どうして？」と尋ねると，彼は答える．

> だって，奇数を二つ足せば偶数になるんだから，奇数にならなければいけないなんてわけはない．

偶数と奇数の定義

この時点で，教師は，ショーンは単に「偶数」の意味を取り違えているのだと思っていた．そこで，こう尋ねた．

> ショーン？ 偶数の，ここでのみんなの定義 (our working definition) は，何？ 前のあの日から，ここでのみんなの定義を使うことにしたこと，覚えてる？

バスによれば，これは“教師の重要な数学的な動き (move)”である．

さて，問題の定義をショーンが覚えてなかったので，教師は何人かに尋ね，ジーニが答えた．

---

[6]バスの共同研究者の，デボラ・ボールである．

> 数は，えー，1を半分にすることなく，平等に (evenly) 分けることができるとき，偶数である．

教師が，ショーンに，この定義が6に対して適用できるかと尋ねると，彼はできることに同意した．そこで，彼女は言った．

> じゃあ，ここでのみんなの定義に合ってるわけだから，偶数ね．いい？

ショーンは，屈託なさげに付け加える，

> それから，奇数にもなれるんだ．三つの2からできてるんだ．

ショーンは，クラスの暗黙の了解に反して，数が偶数と奇数の両者でありうると考えているようだった．教師は，この議論を調停するには，偶数と同様，奇数の定義が必要なことに気づいた．(それ以前には，必要だと考えていなかった.)

多少の議論の後で,「奇数とは公平 (fairly) に二つのグループに分けることができないもの」ということで，クラスは合意した．

しかし，ショーンは頑なで，6は公平に（二つの3に）分けることもできるし，公平でなく（三つの2に）分けることもできるのだと言い張った．

ショーンの考えていることを明確にするため，教師は，新しい方向の質問をすることにし，すべての数が奇数と思うのかと尋ねた．ショーンが思わないと答えると，今度は，奇数でないのはどの数かと尋ねた．彼は，2，4，そして，8は奇数ではない，しかし，6は奇数にも偶数にもなれると言った．

ショーンの証明

何人かの生徒が「違う！」と大きな声を出し，テンベが「説明してよ (Show us)」と要求した．ショーンは，繰り返した．「三つ2があるからだよ．**いち**, に．**さん**, し．**ご**, ろく.」納得のいかないテンベが強く要求する．「奇数になれるってことを，証明 (prove) して.」

教師は，ショーンに証明するように促し，クラスの皆に注意を払うよう求めた．ショーンは黒板のところに行くと，6個の円を描き，2個のグループに分割して，

○○ | ○○ | ○○

こう言う．「2，2，2があります．これで，6になります.」

テンペの反応は，しかし，「わかったよ．そいつは偶数だ」であった．

このとき，メイが手を挙げて，言った．「わたし，ショーンの言ってることがわかったと思う．」メイは，説明を始める．

> … わたしは，ショーンは2のグループが三個あるということを言っているんだと思う．それで，三個というのは，奇数個だから，だから6は奇数になれるし，偶数にもなれるのよ．

教師は，ショーンにその場に留まるよう指示する．

バスのコメント

ここで注意すべきは，問題は，もはや「ショーンが正しいか間違っているか」ではなく，メイがショーンの考えていることや論法を正しく解釈 (interpret) しているか，ということなのだ．

メイの反論

教師は，はじめてショーンの論拠がわかった．そこで，他の生徒に，ショーンに同意するかと尋ねた．

メイ自身は — ショーンの考えを明確化したのは彼女だったが —，

> ええ，反対です．だって… 黒板に書いてもいいですか？

と言い，黒板のところに行くと，ショーンと向かい合い，話を続けた．

> いくつグループがあるかということは，えー，関係ないと思うんです．言いたいのは [長い間．彼女は考えている.] ええっと，もし6を奇数と呼ぶのなら，どうして [間] ええっと，[間] ええっと — 10．いち，に，… [黒板に丸を書く] と，10個の丸があります．これを分けるとして，ええっと，分けたいとして，分けます，二つずつに分けます… いち，に，さん，し，ご … [線を引いて分け，2個ずつのグループを数える.]
>
> ○○|○○|○○|○○|○○
>
> じゃあ，どうして，10はそう呼ばないの…えー，奇数で偶数だと．どうして，他の数は奇数で偶数だと呼ばないの？

バスのコメント

メイは何をしたのか？ 最初にショーンの考えについて理解し，次いで明快な公的表現（clear public expression）を与えた．そして，その考えには彼女自身が不同意であることを述べ，ショーンの論法の誤りを指摘した．(「グループが何個あるかは無関係である.」)

しかも，単なる批評 (critique) には終わっていない．

巧妙にも彼女は，ショーンに「自身の用語で，自身の誤りを理解せざるを得ない」論法を構成したのだ．そう，彼女は，ショーンの“リーゾニングの原理[7]”— 6 は奇数個の 2 のグループから構成される —を一般化し，その基準が新しい奇かつ偶の数を際限なく供給することを見出した．

ショーンは，6 についてのみ考えていた．しかし，メイは，ショーンの 6 に関する論法が一般化できることを認識し，ショーンに自身の主張からの退却を促すものと想定して，より射程の大きい可能性への扉を開いたのだ．

ショーンの反応

メイが驚き，さらには狼狽したことに，ショーンの次のように反応した．

> ぼくは自分に反対だ…ぼくは，そんなふうには考えなかった．ありがとう，ぼくの思ったことをふくらませて (bring up) くれて．だから，… ぼくは言うよ … 10 は奇数にも偶数にもなれるって．

ショーンの意外な応答に，メイは立腹し，こう抗議した．

> でも，どれが…どれが他の数なの？! こんなふうに，あなたがこんなふうに続けていって，他の数も奇数で偶数だと言うのなら，きっと，最後には，全部の数が奇数で偶数だってことになっちゃうわよ．そしたら，全部の数が奇数で偶数であるはずだなんて，意味がないじゃない．だって，もし全部の数が奇数で偶数だったら，ここで話し合ってることだって意味がなくなっちゃう！

バスのコメント

メイの論法は，数学的に鋭いもので，うまく表現されており，ショーンやクラスの他の生徒にも良く理解できるものだった．

[7] the principle of Sean's reasoning. “reasonimg” という言葉は，バスの思索の重要なキーワードであると思われるため，本稿では，仮に「リーゾニング」と音訳しておく．次節を参照のこと．

ここで，定義というものに対するメイの数学的な感性 (mathematical sensibility) に注目して欲しい．定義は，概念間の境界を明確にするための，示差的な区分を為し得る能力を失えば，目的を達することができないのだ．

4.2 何を学ぶのか

そこに何を見るべきか

上述の授業の一場面に，我々は何を見るべきか？ バスはこう述べる．

> こうした数学教育のいくつかの場面において，そこで行われている数学について，我々は何を観察することができるだろうか？ まず，子供たちが行い，学んでいるのは，どんな数学だろう？ あるレベルにおいて，子供たちは，偶数と奇数の諸側面について探求している．しかし，おそらく，より重要なことは，子供たちが本質的に**数学の話法とリーゾニング** (mathematical discourse and reasoning) に従って活動しているということだろう．子供たちは，数学的な主張や反訴を為し, 互いの見解を批判的 (critically) に検討する．子供たちには，心に留め互いに説明責任を負っている自分たちの主張を，正当化 (justification) しようとする責務 (imperative) が存在している．このような数学的訓練は，どれほど口で唱えようが，教えられ，実践されることなしに身につけることは叶わない．([11], p 427.)

これこそが，この教室における挿話から我々が明白に見ることができる，教育の任務 (investment) なのだという．

数学的リーゾニング

“reasonimg” という言葉は,「推論」と訳されることが多いようだが，バスの思索の重要なキーワードだと思われるため，本稿では，仮に「リーゾニング」と音訳しておく．

ここで，しばらく文献 [11] を離れ,「数学的リーゾニング」に関するバスの見解を [3] から見ておきたい．

> 現役の数学者の視点から観るとき，リーゾニングは，数学的な合意を形成し，あるいは，新しい数学的知識を構成するた

> めの，主要な手段のひとつである．このリーゾニングは，二つの基盤の上に載っている．一つは，公有の知識の集積体である．出発点として方向性を定めるためのものであり，しかるべき情況や共同体の内部において許容され得る数学的リーゾニングの「粒度（granularity）」を定めるものである．数学的リーゾニングの二つ目の基盤は，言語 — 記号，術語その他の表現（presentation），そして種々の定義 — と，諸々の主張を定式化し，その正当化を慣習化するような関係性のネットワークにおける使用法の有意味性を定めるための，論理法則および統語法，である[8]（[3], p 201）．

そう，これは数学教育がどうこうという話ではない．数学という名称を冠せられる人間の営みというものがどのような枠組みで遂行されるのか，そういう問いかけに対して，ハイマン・バスという数学者の出したひとつの回答であるいっても良いかもしれない．

4.3 数学者の果たすべき役割

授業の実践例を教師教育に活かすには，どの場面で，どういうことを，どのようにする必要があったのか，教師に対する批評や助言をすることが肝要であろう．

そのような批評・助言の前提として，その授業で演じられている数学劇の内容を，数学的に分析し，教師が理解できる形で示す必要がある．そして，そのためには「数学者の眼」が必要であり，それこそが数学者の第一の役割なのだという．(それが，必ずしも簡単ではないことは，上述の例からも見て取れよう．子供は，何をどう言い出すかわからないのだ.)

それでは，再び文献 [11] にもどろう．

---

[8]重要な知見だと思われるので，原文を引用しておく：Viewed from the perspective of the practicing mathematician, reasoning is one of the principal instruments for developing mathematical understanding and for the construction of new mathematical knowledge. Such reasoning rests on two foundations. One is a body of public knowledge on which to stand as a point of departure, and which defines the "granularity" of acceptable mathematical reasoning within a given context or community. The second foundation of mathematical reasoning is language — symbols, terms and other presentations, and their definitions — and rules of logic and syntax for their meaningful use in formulating claims and the networks of relationships that are used to justify them.

本章でとりあげた例について，バスは，4.1 節に現われたコメント以外にも，その数学的意味合いの説明や教師への助言に関してコメントしている．

バスの主張に耳を傾けながら，本章を閉じたいと思う．

定義の重要性

数学上の不一致を調停するために，教師は，そこで使われる数学用語の定義の必要性を認識している必要がある．

本例の場合，偶数の定義として，暗黙のうちに三種類のものが使われている．**公平な分配**（*fair share*；数は，二つの等しいグループに分けられるとき，偶数である），**対**（*pair*；数は，二個からなるグループによって構成されているとき，偶数である），**交互性**（*alternating*；偶数は，奇数と，ゼロは偶数として，数直線上に交互に現われる）の三種類である．

いずれも明示的には述べられておらず，また，数学的に同値であることも示されていない．もっとも，そうであることは，暗黙に仮定されている．

この授業では，教師（ボール）は定義の必要性を理解しており，クラスに「ここでの私たちの定義 (working definition)」を明確にすることを要求している．

さらに定義に関して教師が知っておくべき重要事項には，子供たちのリーゾニングにおけるこうした異なる定義の存在に気づいていること，そうした状況を調停することの必要性を理解していること，そして，そのために複数の定義の同値性の確立が必要なこと，がある．

もちろん，**小学校の三年生にとって**，数学的に適切で，かつ，使用に適した偶数と奇数の定義が何であるかを知っておくこも，教師にとって重要である．

数学的リーゾニングは，数学的な定義を共通に理解していることへの注意深い配慮なしには，実行し得ない．しかるべき予想（例えば，奇数＋奇数＝偶数）を証明するということは，定義を使用することに依存していることを忘れてはいけないのだ．

数学的な語彙

ショーンは数学用語としての「偶数」と「奇数」を誤用しているが，にもかかわらず，6 に対する明白な**数学的なアイデア**をもっている．彼は，

「偶数であるものの奇数的なありかた (an odd way of being even)」に気づいているのだ．

しかし，この状況に名前をつけるための語彙を欠いているため，ショーンは，「偶数かつ奇数」という，誤った理解へと導いてしまう名称を選んでしまっている．

なお，教師のボールは，次の授業時ではあるが，ショーンの発見した性質をもつ数を「ショーン数」と呼びことを提案し，クラスで受け入れるよう指導した．

大切なことは

子供たちが授業を通じて学んだことは，単なるショーン数の性質を越え，数学的な探求やリーゾニング，一般化，数学的定義の使用の技能 (the skills of mathematical exploration and reasoning, generalization, use of mathematical definitions) 等々であった．これが，大切なことである．

自分の生徒が数学的リーゾニングを理解できない，あるいは，習熟できないことに不満を覚えている人々にとって，このことは，小さな子供たちがこうした技能を伸ばし始める様がどのように見えるかということの，ひとつの典型を提供しているといえるかもしれない．

おわりに

前章までに，ハイマン・バスが少しずつ数学教育に対する関心を深めていき，ついには，授業の録画テープを自ら詳細に分析するまでになる様を眺めてきた．

バスのこの数学教育に対するこだわりは，いったいどこから来るのだろう？

公正な社会をつくるために

バスに，ボール他との共著で，『社会的に公正で多様な民主制を構築するための数学教育の役割』と題する，少し毛色の変わった論考 [7] がある．

この論考の中で，バスたちは，民主社会を維持・発展させるために数学教育が果たすことのできる，あるいは，果たすべき役割が三点あると述べる．そして，三番目に，「数学を実践すること自体がもつ性質によるもの」として次のことを挙げている．つまり，数学では，

> 見解の相違の解決は，大声を出したり，多数決によるのではなく，リーゾニングに則った論議 (reasoned arguments) による．そして，この論議を構成することは，教えることができるし，学ぶこともできるものなのだ．0 は偶数か奇数かとか，3/4 の意味をどのように解釈するかとか，5/5 は 4/4 より大きいか小さいかとか，あるいは，しかるべき問題の解法は正しいかどうか，などを決定することは，数学的なリーゾニングに従うべき (subject to) もので，願望や権力に支配 (govern) されるものではない．その上，数学的なリーゾニングというものは，身につけるべき習慣 (practice to be learned) であって，生まれつきの才能ではないのだ．
>
> このようにして，数学教育は，子供や若者が他の観点や見解の価値を学ぶことを，ゆっくりとだが，支援することができる．論争というものをどのように行い，また，調停するかといったことも，同様である．([7], p.4–5)

公正な社会を実現するためには，願望や権力，多数決によらない意思決定が必要なこともあり，そのための訓練は数学教育が担いうるというのだ．

筆者には，ここに，バスの本心が露れているように思われる．

数学教育の可能性

自伝 [9] によれば，バスは，正統派ユダヤ教徒の父親をもち，国家や国際政治の議論に熱中するような雰囲気のリトアニア移民の一家に育った．

> 一家の生活を一変させたのは，我々の世代の大勢と同様，第 2 次世界大戦であった．

と，バスは書いている．

姉のひとりはノルマンディー侵攻後一番にフランスに上陸した WAC(陸軍婦人部隊) の分遣隊に配属され，もうひとりはワシントンの防衛省で働くようになった．また，兄たちは海軍で，ひとりは無線通信士として太平洋に赴き，もうひとりは士官の訓練を受けていたという．

バス自身が従軍したわけではないが，ユダヤ系の家庭に生まれ，あの世界大戦の惨禍を経験した者が，「公正な社会」について思いをめぐらすとき，何を考えるのだろうか．

そういえば，バスが[11]で尊敬すべき先人として紹介するハンス・フロイデンタールも，第2次世界大戦末期，ナチスの強制収容所体験をもつ．不思議なほどの情熱をもって後半生を数学教育に傾倒した二人の数学者は，西欧文明のもつ「良質」な部分としての数学を教育することに，何よりも大きな可能性を夢見たのではないだろうか．

参考文献

[1] Ball, D. L. : *With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics* , Elementary School Journal vol.93 No. 4, (1993), 373-397.

[2] —— : *Crossing Boundaries To Examine the Mathematics Entailed in Elementary Teaching*, Algebra, K-theory, groups, and education, Contemp. Math., 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999), 15-36.

[3] Ball, D. L., Bass, H. : *Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom*, In D. Phillips (Ed.), Yearbook of the National Society for the Study of Education, Constructivism in Education (pp. 193-224). Chicago: University of Chicago Press (2000).

[4] —— : *Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics.*, In J. Boaler (Ed.), Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics (pp. 83-104). Westport, CT: Ablex. (2000).

[5] —— : *Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching*, In B. Davis, E. Simmt (Eds.), Proceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (pp. 3 -14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM. (2003).

[6] —— : *Making mathematics reasonable in school*, In G. Martin (Ed.), Research compendium for the Principles and Standards for School Mathematics (pp. 1 - 39). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics (2003).

[7] Ball, D.L., Goffney, I.M., Bass, H. : *The role of mathematics instruction in building a socially just and diverse democracy*, The Mathematics Educator, 15 (1), (2005). 2-6.

[8] Ball, D. L., Hill, H.C, Bass, H. : *Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?* , American Educator,(2005). 14-17, 20-22, 43-46.

[9] Bass, H. : *A professional autobiography*, Algebra, K-theory, groups, and education, Contemp. Math., 243, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (1999), 3-13.

[10] —— : *Keynote Address : Mathematicians as Educators*, Contemporary Issues in Mathematics Education, MSRI Publications vol.36, Cambridge University Press (1999).

[11] —— : *Mathematics, Mathematicians, and Mathematics Education*, Bulletin (New Series) of The American Mathematical Society, vol.42 (2005), No.4, 417-430.

[12] Conference Board of the Mathematical Sciences : *The mathematical education of teachers* (CBMS Issues in Mathematics Education, Vol. 11.), Providence, R.I. and Washington, D.C., American Mathematical Society and Mathematical Association of America, (2001).

[13] Delaney, S., Ball, D.L, Hill, H.C., Schilling, S.G., Zopf, D. : *"Mathematical knowledge for teaching" : Adapting U.S. measures for use in Ireland*, Journal of Mathematics Teacher Education, vol.11, No.3 (2008), 171-197.

[14] Hill, H., Ball, D. L. : *Learning mathematics for teaching: Results from California's mathematics professional development institutes*, Journal for Research in Mathematics Education, vol.35, No.5 (2004), 330-351.

[15] Lampert, M. , Ball, D. L. : *Mathematics, teaching, and multimedia: Investigations of real practice.* New York: Teachers College Press (1998).

付 録　ショーン数 — 教室における実践例

1．はじめに

1989–1990 年，数学教育の研究者であるデボラ・ボールとマグダリン・ランパートの二人は，NSF の助成金，地元小学校の協力と，多数の協力者を得て，小学校における自分たちの授業を多面的な媒体を用いて記録するという共同作業を行った．自分たちの数学教育研究の基礎的なデータの収集が目的である（詳しくは，[15] を参照のこと）．

こうして得られた授業記録は，その後のボールの著作において，具体例として繰り返し取り上げられている．本付録では，そうした文献等[9]を参考に，本文の第 4 章でとりあげた「ショーン数」の部分を再構成してみた．(なお，いくつかのボール等の著作に従い，生徒の名前は匿名とした.)

本付録を作成した目的は，第 4 章の例が，いわば，バスの視点を通じて解釈されたものであったのに対し，バスの解釈を通さない原資料を提供することで,「バスの眼」を評価する作業の一助とすることである．

ただ，原資料とはいっても，大きく，次の 2 種類の「主観性」に基づいていることには，留意願いたい．

第一に，録音・録画テープから文字に起こすに際しての，ボールの解釈が考えられる．次に，日本語に直すことによる問題がある．具体的には，日本語としての読みやすさと，日本の授業風景に比べて違和感を感じないように，数学的な内容以外について多少の省略と修正を行なった．また，数詞に付いては，原文では one two three, ... を用いているが，日本語に直すに際して，算用数字，漢数字，和語（いち，に ），助数詞の使用，等々の使い分けを行った．

2．背 景

クラス

ボールが受け持ったのは，3 年生（8 歳）対象の数学（算数）の授業である．

[9]例えば，[1]，[3]．

クラスは，22人の生徒から構成されていた．そのうち10人はアメリカ育ちであり，残りの12人は他の国から来ていた．(インドネシア，台湾，韓国，ネパール，ナイジェリア，ケニヤ，エジプト，エチオピア，ニカラグア，そして，カナダである.）10人のアメリカ人の生徒のうち，4人はアフリカ系である．

クラスの構成員は，標準化するように選出されたものではない．したがって，数学的技能や概念の定着度にはかなりの幅があった．

授業の方式

一回の授業はおおよそ1時間で，おおむね，一つないし二つの問題が扱われる．通常，問題は前回に行った授業内容から組み立てられており，生徒の目を必要な方へと向けさせるようになっていた．

授業は，その日の問題を生徒が個々に考えることから始まる．生徒は，数学用のノートをもつことになっており，そこに自分の考えたことをすべて記録することになっていた．

各々の生徒は，問題をしばらく一人で考えた後は，近くに座っている者同士で話し合っても良いことになっている．(問題にもよるが）10分程度経過した後は，生徒たちが班に分かれ，さらに考察をすすめる．

授業の後半には個人や班ごとの解答の発表があり，問題から導かれる様々なアイデアについてクラス全体で議論する．

以上が，標準的な授業の方式であったという．

また，ひとつの単元における流れとして，しばしば授業は「定義をつくり，予想をたて，それを証明する」[10]ように進められた．

なお，授業で扱われた話題は，位取りと繰り上げ，分数，整数，多角形，確率である．

記録の方式

すべての授業は録音され，また，大部分の授業は録画された．ボール自身の授業日誌，生徒のノートや小テスト，宿題は，すべてコピーして保存された．さらに，生徒のノートを補完するため，定常的に，公式，ある

[10]初期の授業において，予想，定義，証明という「術語」の説明が，子供に了解可能な範囲でなされていた．

いは非公式に，班ごと，あるいは個人ごとのインタビューが行われ，記録された．

3．授業の記録

ショーンの主張

1990年1月19日，偶数と奇数に関する単元のちょうど中ほどに位置する授業である．

授業の最初に，教師のボールが偶数と奇数について話し合った前日の授業についての意見を求めたところ，ある男子生徒が，偶数は二つの他の偶数から「作られる」— 4＋4 や 6＋6 のように—という観察結果を述べた．

ボールが，他に意見はないかと尋ねると，ショーンが手を挙げた．

ショーン：　ええっと，ぼくは，昨日の話し合いについては特にないんだけど，6について考えたんだ．この数は…今も考えてるんだけど．この数は，奇数にもなれると思う．だって，二つ，四つ，六つで，つまり，2が三つで6になるわけで…

ボール　：　うーん…

ショーン：　それから，3が二つだから，この数は奇数で偶数になれるわけ．両方！　三つのものからできているし，二つのものから作ることもできる．

ボール　：　あなたが一緒にしようとした二つのものというのは，奇数？　本当？　3と3は，どっちも奇数？

ショーン：　うん．それから，もうひとつの，2の方は偶数だよ．

ボール　：　これはご親切に，ありがとうね．でも，さっき言ってたことは，「すべて」の偶数についてではなかったわよね．—偶数の中には，6のように，二つの奇数からできているものもあります．ちょうど，あなたが教えてくれたようにね．

他の人，何か意見は？

クラスの反論

ボールは，ショーンのコメントを，授業の最初に出た意見「二つの偶数を結びつけると，別の偶数になる」ことに対して，「二つの奇

数から偶数を作ることができること」を指摘したのだと思った．ボールは，このままこの日の話題に移ろうと思った．しかし，クラスはショーンの言ったことを聞き流さなかった．

ボール　：　カサンドラ？

カサンドラ：　6が奇数になれると言うのなら，ショーンには賛成できないわ．6は奇数にはなれないと思うの．だって…見て［彼女は，立ち上がって黒板の方に歩いていく］— 6は奇数にはなれない．だって，これは［彼女は数直線[11]を，ゼロから順に指していく］偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数．どうやったら奇数になるかというと，［再度ゼロから始めて］これが奇数なら，偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数．でも，ゼロは奇数じゃあない．

ショーン：　だって，6は，だって，三つの何かが6を作っているんだし，三つの何かということは奇数みたいなもので，えええっと，見て，2，4，6とできるよ．三つの2がこの数を作ってるし，二つの3も作ってるんだ．

キース　：　でも，それで —

ボール　：　キース？

キース　：　それで，必ず6が奇数になるわけじゃあない．

生徒たち：　そうそう．

ボール　：　それはどうして，キース？

キース　：　だって，奇数を二つ足せば偶数になるんだから，奇数にならなければいけないなんてわけはない．

ボール　：　定義は何だったかな — ショーン？— ここでのみんなの定義 (our working definition)[12]は？ —

ショーン：　二つの奇数が作るのは —

[11]黒板の上に，目盛りのついた横線が引かれていて，目盛りのところに整数値が書かれている．ここではこれを「数直線 (number line)」と呼んでいる．

[12]一連の授業において，偶数や奇数の天下り的な定義は与えられていない．むしろ，この数は奇数，この数は偶数といった段階から，偶数や奇数の性質を調べ，自分たちなりの定義 (our working definition) をクラスの約束事として作り上げていくというスタイルで授業を行っている．

ボール　：　ショーン？ 偶数の，ここでのみんなの定義は，何？ 前のあの日から，ここでのみんなの定義を使うことにしたこと，覚えてる？ 何だった？

ショーン：　それは，ええっと ［間がある］ … 忘れた．

ボール　：　誰か，助けてくれない？ ここでやってることは，みんなでわかる必要があるのよ．偶数の，私たちが使っていたここでの定義は何だった？ ［間をおく］

偶数の定義

ボールは，ショーンは偶数の定義を取り違えているのだと考えていた．生徒たちがこの定義を思い出せば，彼も6が定義に合っていることが，そして，偶数であることがわかるだろうと思っていたのだ．

数分かけて，生徒たちは偶数の定義を明確にした．ジーニが述べる．

ジーニ　：　数は，えー，1を半分にすることなく，平等に (evenly) 分けることができるとき，偶数である．

ボールは，話にきりをつけようと，ショーンに向き合う．

ボール　：　6は，そうできる，ショーン？ 二分の一 (halves) を使わずに，6を半分に分けられるかな？

ショーン：　うん．

ボール　：　じゃあ，ここでのみんなの定義に合ってるわけだから，偶数ね．いい？

間がある．

ショーン：　それから，奇数にもなれるんだ．三つの2からできてるんだ．

ボール　：　わかった．いい，ここで，ひとつ大切なことは，定義に合ってれば，私たちは，その数を偶数と呼ぶということ．もし，ここでのみんなの定義に合っていたら，偶数と呼ぶということです．

ショーン：　奇数の定義にも合ってるよ．

ボール　：　奇数の定義って何？　そのことについては，みんなで話し合う必要がありそうね．

ショーンの「証明」

このときまで，クラスがはっきりした定義をもっていたのは偶数についてのみであった．ボールはそれで十分だと思っていたのだが，そうではないことがわかってきた．

クラスは，奇数の定義に関する議論へと向かい，「奇数とは二つのグループに公平 (fairly) に分けることができ**ない**数」であることで合意した．

しかし，それでもショーンを納得させることはできなかった．彼は，6 を特別だという自身の見解に固執した．

ショーン：　6 は，公平に分けられるし，公平でないように分けることもできる．6 を半分に切るのが好きなのもいいけど，うーん … 好きでいいというなら，2 があって，えー，6 個のクッキーがあって，半分ずつに分けたいと思わないなら，他の人は 3 個取るかもしれないけど，2 個ずつ分けたいと思うと，他の人が，えー，2 個取って，2 個残っている．

ボール　：　今のは，どの数の話？　6 なの？

ショーン：　えー，うーん．

ボール　：　それじゃあ，あなたは，全部の数が奇数だと言ってるわけ？

ショーン：　ちがう．ぼくは全部の数が奇数だなんて言ってない…

ボール　：　じゃあ，奇数じゃない数は，どれ？

ショーン：　えーと，2，4，6 … えー，6 は奇数で偶数で … 8 だ．

生徒たち：　ええー！

テンベ　：　何でかわからない．みんなに説明 (show) してよ．

ショーン：　三つ 2 があるからだよ．**いち**，に．**さん**，し．**ご**，ろく．

テンベ　：　奇数になれるってことを証明 (prove) して．ぼくらに証明してみせて．

ショーン：　わかった.［立ち上がって黒板の方に行く.］

ボール　：　みんな，ショーンが何を言おうとしているか，わかる？6が，偶数であることも，奇数であることもできるといってるのよ.

生徒たち：　反対…そうは思わない…

ボール　：　はい，ショーンが何を証明するつもりか，よく見て．質問してもいいからね.

ショーン：　じゃあ，見てください．2があります.［図を描いて］ここに二つね．そこにも置きます．こいつを，ここにも置きます．2，2，2があります．これで，6になります.

○○|○○|○○

テンベ　：　わかったよ．そいつは偶数だ！

メイ　　：　わたし，ショーンの言ってることがわかったと思う.

理解と異議

メイ　　：　ショーンの言ってることは，見て，これがだいたい全部で，わたしは，彼は2のグループが三個あるということを言っているんだと思う．それで，三個というのは，奇数個だから，だから6は奇数になれるし，偶数にもなれるのよ.

ボール　：　他の人は賛成？　これがあなたの言ってたことなの，ショーン？

ショーン：　うん.

ボール　：　よし，それじゃあ，他の人たちは賛成するかな？　［間をおく］メイ，あなたは賛成しないの？

メイ　　：　ええ，反対です．だって…黒板に書いてもいいですか？

ボール　：　ええ，いいわよ.

メイ　　：　［黒板に方に行く］いくつグループがあるかということは，えー，関係ないと思うんです．言いたいのは［長い

間，彼女は考えている.］ええっと，もし6を奇数と呼ぶのなら，どうして［間］ええっと，［間］ええっと — 10．いち，に，…［黒板に丸を書く］と，10個の丸があります．これを分けるとして，ええっと，分けたいとして，分けます，二つずつに分けます…　いち，に，さん，し，ご …［線を引いて分け，2個ずつのグループを数える.］

○○|○○|○○|○○|○○

じゃあ，どうして，10はそう呼ばないの，—

ショーン：　［メイの話にかぶせて］ぼくは自分に反対だ.

メイ　　：— 奇数で偶数だと．どうして，他の数は奇数で偶数だと呼ばないの？

ショーン：ぼくは，そんなふうには考えなかった．ありがとう，ぼくの思ったことをふくらませて (bring up) くれて．だから，— ぼくは言うよ — 10は奇数にも偶数にもなれるって.

メイ　　：ええ，でも，どれが…どれが他の数なの?!　こんなふうに，あなたがこんなふうに続けていって，他の数も奇数で偶数だと言うのなら，きっと，最後には，全部の数が奇数で偶数だってことになっちゃうわよ．そしたら，全部の数が奇数で偶数であるはずだなんて，意味がないじゃない．だって，もし全部の数が奇数で偶数だったら，ここで話し合ってることだって意味がなくなっちゃう！

オファラの提案 – 新しい定義 –

ボールは，この話題を追求するのなら，他の生徒も加わるように誘導すべきだと考えた．そこで彼女は，クラスの残りの生徒に向かって話しかけることにした.

ボール　：みんな，話についてきてる？　この話は，みんなが反対していたことも先生にはわからなかったような，大事なことです．だから，このことを解決しようと努力するのも，

やっぱり大切です.［オファラが合図する.］あなたは，何を説明してくれるのかな？

オファラ：　えー，特に何も説明する必要はないんじゃあないでしょうか.

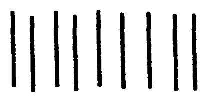
ボール　：　何も説明する必要はない？ 何が言いたいのかな？

オファラ：　私が言いたいのは，えー，奇数を考えたいんだったら，1 を取り除いてやればいいということです.

ボール　：　どうしてそんなことをするの？

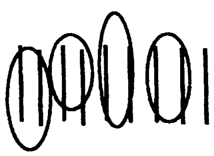
オファラ：　えー，というのは，ふつう，奇数というのは，… こんなふうに …（チョークを取り上げる）こんなふうに，真ん中に 1 がくるような種類のもので，5 のように ；［図を描く］

それから，真ん中に 1 があって，そう，えー，9 ；［図を描く］



メイ　　：　丸で囲ったほうがいいんじゃない.

オファラ：　［自分の描いた 9 本の線分を，2 つずつ組にして丸で囲む］この 2 つを一緒にして，この 2 つを一緒に … この 2 つを一緒に，それから，この 2 つを一緒にします.



1 つ残ります. でも，偶数のときは — 6 のように —［図を描く］

— 真ん中で何も取れません. 1 が残りません.

ボール　：　つまり，こういうこと？ 偶数というのは，全体を2個ずつのグループに分けることのできる数で，奇数というのは，おしまいに一つ残ってしまう数だということね．

メイ　　：　私も賛成．

ショーン：　でも，6が偶数だとしたら，どうして，ここに三つあって，残りの一つがないの？

オファラ：　だって，偶数というのはこんなような感じのものよ．偶数というのはその中に2があるもので，奇数は，残りの1があることを別にすると，その中に2があるのよ．

メイ　　：　そうそう．

ボール　：　つまり，こうね，オファラ．あなたは，定義を提案したということになるわね．さあ，みんな，もう一度聞いてください．

ショーン：　ぼくらは9を考えてるんじゃない．

ボール　：　ちゃんと聞いて，オファラの奇数の定義の提案を．

ショーン：　でも，9を考えてるんじゃないんだ．

ボール　：　もう一度オファラの言うことを聞けるわね．もう一度，奇数の定義を何といったか，言ってちょうだい．

オファラ：　ええっと，奇数というのは，一つ数が残ってしまうようなものです．

ボール　：　何をした後で？

オファラ：　二つずつ丸で囲んでいった後で，です．

ボール　：　何か質問は？ 彼女が言おうとしたことが何か，みんな，はっきりした？

ショーン：　いつだってそうならなければならないとは　—

ボール　：　ちょっと待って，ショーン．彼女が何を提案しているか，みんながわかっているか，確かめてみましょう．誰かを当てて，ある数が偶数か奇数か，黒板で，彼女の定義を使って，テストしてもらいますね．

ボールは，ベッツィを指名して，彼女に選ばせた数 21 が奇数になることを確認させた.

ショーンへの再反論

ボールは，オファラの提案の範囲内で話を閉じておくのが良いと考えた．つまり，クラスの残りの者たちにオファラの提案したことの有効性について考えさせ，その後に先の話に戻り，最後に 6 が奇数であるという主張について解決をはかろうとするものだった.

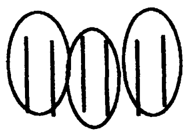
しかし，クラスは，ますますショーンの議論へと傾斜していった.

ボール　：　オファラ，首を振っているようだけど，何？

オファラ：　6 が奇数になれるということには，賛成できません.

ボール　：　みんなに説明できる？

オファラ：　さっきやりましたけど…私の予想 (conjecture) では，もし 6 が偶数なら，全部を二つずつ円で囲むことができるはずだけど，さっき全部二つずつ囲みました．(黒板で図を描く動作)



ボール　：　カサンドラ？

カサンドラ：　オファラに賛成．ショーンに質問があるんだけど，6 が奇数だというのなら，5 はどうなの？

ショーン：　ぼくは，いつも奇数だって言ってるわけじゃあない．6 は，奇数にも偶数にもなれると言ってるんだ.

カサンドラ：　両方は無理よ.

ショーン：　できる.

カサンドラ：　できない.

ボール　：　どうして両方は無理なの，カサンドラ ？

カサンドラ：　えっ ？

ボール　：　どうして両方は無理なの ？

カサンドラ：　だって，ほら，ちょうどここにある数直線で，行けないでしょ，こうはできない．[数直線を，1から指していき] 偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数，偶数，奇数，できない．

ショーン：　ぼくは，そいつら全部が偶数で奇数だなんて言ってない．全部偶数で奇数なんて言ってない．6だけだ，ぼくが言ってるのは．

カサンドラ：　どうやったら6は両方になれるというの？

ショーン：　だって！　見てよ，三つの，えー，三つの2があって，3は奇数で，だから，三つの2があって，こいつは奇数で，だから，たぶん，6もそうなって，全部を丸で囲めるし，それぞれの方に3ができるし，これは，えー，奇数なんだ．

グループ数への着目

ボール　：　リーバ？

リーバ　：　反対．

ボール　：　続けて．

リーバ　：　黒板で説明してもいい？　[黒板の方に行き，描きはじめる]

ボール　：　ええ，いいわ．カサンドラ，座って．メイ，座って．オファラ，もう少し，そこにいて．これは，あなたが提案してくれた定義なんだから，ね，いい？　リーバ，あなたは，何に反対なの？

リーバ　：　ショーンよ．

ボール　：　わかった．じゃあ，何を説明してくれるのかな？

リーバ　：　私が説明したいのは…それは…えー，囲った丸が何個あるかというのは大事じゃあないということ，大事なのは，いち，に，さん，し，ご，ろく…って考えるとき…大事じゃないのは，つまり…二つずつ丸で囲むのが何回かってことで，6が奇数だってことは証明できない．

ボール　：　他の人は，どう？ リーバの言ったことに，意見は？ 彼女は，二つずつグループにするとき，丸が何個できるかは大事じゃない，大事なのは，二つずつに分けられるかどうかだと言ってます．キース？

キース　：　リーバに賛成．

ボール　：　オファラ？

オファラ：　賛成です．わたしが言おうとしたことと，同じようなことだと思います．えー，ショーンが言ったことは，私の予想とは関係ありません．

ボール　：　わかりました．グループの個数には賛成できないというわけね．それから，ショーン，あなたは，グループの個数が大事だって言ってたの？

ショーン：　うん，だって…

ボール　：　2のグループ三つ，そうね？ じゃあ，10はどうなの？ 10は，2のグループが五つよ．

ショーン：　うん．だから，奇数になると思う．

ボール　：　あなたが言ってたのは，6ひとつだけだと思ってたわ．

ショーン：　うーん，6と10．だって，10は2のグループ五つで，6は2のグループ三つだから．

ボール　：　誰か，意見は？

教師の介入

ボールは，もう一度議論を閉じようと試みた．授業開始後30分が経過しており，彼女の感覚では時間をとりすぎていた．

しかし，生徒たちは，再度6と10が偶数と奇数の両方であるというショーンの主張について考えようとしていた．

ショーンの性格についても顧慮した結果，ボールはこの話題をさらに推し進める役割を果たすことに決めた．

ボールは，メイが最初の方でしたことと同様なこと —6のような他の数，つまり，ショーンの論法では偶数と奇数の両方であると考えられる数 —を提示した．彼女は，このことが，この性質 — 奇数個の2のグループからなる — をもつ多くの偶数が存在することを

ショーンに理解させる助けになると想定していた．ショーンは，それが同様なケースであることに同意した．

この時点で，ボールは，なぜショーンがこのようなことに興味をもったのか，不思議に感じた．そこで，話をそこに誘導していくことにした．

ボール　：　それじゃあ，いったい何が問題なのか，先生が言い当ててみましょうか．でも，そうすると，これでおしまいになっちゃうかもしれないんだけど … もし，あなたがグループが何個あるかを数えることが定義だと思っても，他には誰もグループの個数を数えていなかったとしたら，ちょっとばかりまぎらわしいことになるわね．ショーン，グループの個数を気にすることが大切だと，あなたはどうして考えたの？

ショーン：　だって，それで奇数になるんだから．

ボール　：　それで，どんな良いことがあるの？ あなたがある数を「偶数かつ奇数」と呼んだとして，何の役に立つの？　私たちの助けになるには，どうすればいいの？

ショーン：　うーん…

ボール　：　私たちは，定義というものを，お互いが話し合うのに役に立つようにしたかったのよね，そうでしょ？ 役に立つということは，お互いが理解しあって，なぜ…

ショーン：　わかんない．

ボール　：　どうしたらみんなが賛成できると思うの？ 偶数と奇数の両方だと，みんなが認めたら，何の役に立ってくれるの？ 役に立つんだと，みんなにわからせることができるの？

ショーン：　偶数で奇数だってわかると，役に立つよ．だって，ぼくはできると言えるんだし，そうじゃなくて，ぼくは，ぼくは…

パターンの発見

ボールは，理解した．ショーンにとって，これは有用とか有益とは無関係で，単に面白かったのだ．ボール自身も，数学が美学的特質

を有することを確信しており，また，学校で学ぶことがすべて「実用的」つまり「現実の世界」に関係する必要はないと信じていた．

しかし，この話題にはすでに1時間授業の半ば以上を費やしている．ボールは考えた．生徒たちは，偶数かつ奇数である数の生徒なりの定義について，一定の進歩をなした．そろそろ，次の段階へと前進すべきときであると．

しかし，リーバが手を挙げて，注意をひこうと振っていた．

ボール　：　どうして今やめちゃあいけないの，リーバ？　先生は思うんだけど，えー，みんな，もう，いろいろな方向から話し合ったんだし．ショーンは …

リーバ　：　［ボールの話にかぶせて］ 20は，うまくいかないわ．

ボール　：　20がうまくいかないって，どういう意味？

リーバ　：　10個のグループがある．

ボール　：　うーん，それで…

リーバ　：　10は偶数じゃあない．わたしが言ってるのは，奇数のこと．うまくいかないの．

ボール　：　先生，わからなくなってきたわ．

リーバ　：　ショーンは言ったの，もし，ええっと，もし奇数があれば — 20を書いてみるわ，に，し，ろく…

ボール　：　ショーン，助けてちょうだい．あなたのことを言ってるみたいだし，先生には彼女が何を説明したいのかわからない．

ショーン：　ぼくは，20が奇数だなんて言ってない．22なら奇数ということができるけど…

カサンドラ：　うーん…

ショーン：　だって，うん，できるよ．見て．

リーバ　：　24は，どう？　できないんじゃない？

ショーン：　できるよ．

リーバ　：　できないわ．いち，に，さん，し，ご，ろく，なな，はち，きゅう，じゅう，じゅういち，じゅうに．12は，偶数よ．

ショーン：　見て，こんなふうに，えー，22がある．[22本の線を引きはじめる．]

リーバ　：　ほら．[彼女が下に描いたものを指して] ここに，22があるわ．

ショーン：　うん，22だ…[丸で囲むと，リーバに向かって，2のグループを11個数え上げる．]

ボール　：　ショーンが偶数で奇数と呼んだものには，パターンがありますか？

リーバ　：　[数人の他の生徒も一緒に] あります！

ショーン：　そう！ ぼくは知ってるよ．

ボール　：　ショーン，どんなパターン？

ショーン：　四つごとだ．えー，こんなふうな始めのひとつがあって，奇数になれて，それから，四つ行って…

ボール　：　どうして？

ショーン：　四番目のものは，別の奇数なんだ．

ボール　：　どうして？

ショーン：　だって，奇数個のグループに分けることができるから．グループが奇数個．

ボール　：　リーバ？

リーバ　：　[数人の他の生徒も一緒に] わかった！ これは … えー，どんどん行けるんだ … どれもそうで … 一つ [黒板に印をつける] … だから二つもそう … 奇数で … だから，わかった，これが思ってたもの，これがパターンなの．2は奇数で偶数になれる — これがショーンが…

ボール　：　2がそうだって，彼は言ってたかなあ．

ショーン：　2は，そうじゃない．だって，奇数になれないよ．グループが一個しかない．

リーバ　：　[数人の他の生徒も一緒に] 1は奇数！

リーバ　：　[繰り返す] 1は奇数よ！

ショーン	：	ということは，2はなれるね…
ボール	：	なるほど，それから …
リーバ	：	それから，4はだめ…2個のグループだから．6はなれる．［数直線上の偶数を指しながら，8から始めて］これは，なれる，なれない，なれる，なれない．
ボール	：	合ってる，ショーン？
ショーン	：	うん．
リーバ	：	だから，奇数もあるし…偶数もある，これが…ショーンの言っていたことで…このパターンの偶数は，えー，偶数で奇数になれるし，だめなのもある．
ショーン	：	そう，それがぼくの言おうとしたことなんだ．

授業のまとめ

授業では，オファラが，再度自分が提案した「予想(conjecture)」に従ってショーンの主張に反対し，ショーンに「それは予想じゃあない，定義(definition)だ」と指摘されるといった一幕が続いた．

そろそろ時間切れだと考えたボールは，子どもたちに話し合いを止めるよう指示し，その後,「この時点で，偶数や奇数に関する諸定義が何であるか，および，それぞれの例」について，自分が考えるところをノートに書いておくように求めた．

4．後 日 談

ショーン数の命名と性質の探求

その後，ボールは，ショーンが考えたのは「偶数と奇数の両方の数」ではなく，新しい種類の数[13]であるとして,「ショーン数(Sean numbers)」と名前をつけることにした．

クラスでは，続きの何時間かの授業において，それ以前の偶数や奇数と同様に，ショーン数のパターンについて調べた．ショーン数は，4つおきに現われるが，なぜか？ 2つのショーン数を足すと，結果はショーン数になるか？ 等々である．

[13] $2(2k+1) = 4k+2$ の形をした数．

知識の定着度

伝統的でない方法で「ショーン数」という標準的ではない内容を取り扱った結果，偶数や奇数に対する「慣例」的な知識が身についていないのではという心配がある.

後に，別の機会を捉えてボールが小テストを試みたところ，知識の定着度に問題がないことがわかった.

生徒たちは奇数の通常の定義を与えることができ，偶数と奇数を正しく区別することができた. さらには，ベン図に関係した学習において，誰も 90（ショーン数である）を偶数と奇数の共通部分にいれなかったという. ([1], p.387 .)