数理解析研究所講究録
第 1658 巻 2009 年 35-45

パウリ代数の中心拡大によって生成される水平対称性のゲージ場理論

京都産業大学・理学部　曽我見郁夫 (Ikuo S. Sogami)
Department of Physics, Kyoto Sangyo University
Kyoto, 603-8555

概要

パウリ代数の中心拡大が生成するリー群を水平対称性とするゲージ場理論を構築することによって、素粒子の標準模型の一般化を行い、低エネルギー領域でのフレーバー物理のための "有効理論" を構成する。有効理論の未知パラメーターの数を可能な限り少なくし、零質量や虚質量の場が出現しないようにするためには、対称性の破れの機構は "詳細な構造" を持たなければならない。この理論では、ディラック型とマジョラナ型の質量行列が、各フェルミオンセクターに対して統一的に導出される。

1　はじめに

低エネルギー領域でのフレーバー現象を統一的に記述することができる有効理論形式を得るために、水平対称性のゲージ場理論を構築する。水平対称性として、ここでは、パウリ代数の中心拡大 $\breve{A}$ が生成するリー群 $G(\breve{A})$ を採用する。この代数は、クォーク族の質量スペクトルとフレーバー混合行列を分析する過程で [1, 2] 見出されたものである。我々の理論では、対称性は超高エネルギースケール $\breve{\Lambda}$ と低エネルギーの電弱スケール $\Lambda \simeq 10^2\,\mathrm{GeV}$ で 2 段階に破られる[1]。

素粒子の標準模型 (ＳＭ) の低エネルギー領域での成功を考慮すると、我々の理論は、基本フェルミオン場やリー群 $SU_c(3)\times SU_L(2)\times U(1)$ に基く垂直対称性のゲージ場を含まなければならない。ここではさらに、水平対称性を満たすようにＳＭの最小の一般化を達成するために、必要となるゲージ場とスカラー多重項の存在を仮定する。追加されるゲージ場は、水平対称性によって一意的に決定される。二つのスケールで段階的に対称性を破るために、スカラー場として二種類の水平対称３重項の存在を要請する。

大きく異なるスケールで対称性を破るための理論形式は、現在までの処、確立されていない。この論文では "低エネルギー領域での有効理論が『水平対称性と電弱対称性が限定する湯川相互作用の定数』以上に未知数を増やさない" ように対称性を破る。そのためにまず、スケール $\breve{\Lambda}$ (Λ) の近くで、水平対称性 (水平対称性および電弱対称性) を部分的に破るようにヒッグスポテンシャルの変曲点を、単一の真空期待値で指定されるように暫定的に選ぶ。つづいて、対称性の破れを完全にするために、変曲点のまわりでスカラー多重項を成分場に展開する際に生じる自由度を活用する。その際、成分場が零質量や虚質量を獲得することを禁止するために、展開成分場の混合や変曲点の再調整などの "対称性の破れの詳細な機構" が必要となる。本論考の目的は、そのような "詳細な対称性の破れ" の機構を考察し、具体的に水平対称性のゲージ場理論を構成することである。

[1]大きく異なる複数のスケールで対称性を破る理論形式には「階層性の困難」が付きまとうが、ここでは、この問題は論じない。その困難を回避する方法の一つは、超対称性を仮定することである。

2 水平対称性

ここで採用するパウリ代数の中心拡大 $\check{\mathcal{A}}$ は単純リー代数 $\mathfrak{su}(3)$ の部分代数である。この代数は 4 個の独立な生成子をもち、それらはゲルマン行列 λ_j $(j = 1, 2, \cdots, 8)$ の線形結合で表される。その中心元は、射影演算子

$$\check{D} = \frac{1}{3}(I + \lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \check{D}^2 \tag{1}$$

である。他の 3 個の生成子は

$$\begin{cases} \check{\tau}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_3 - \lambda_4 + \lambda_6) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \check{\tau}_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(\lambda_2 - \lambda_5 + \lambda_7) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 & -i & i \\ i & 0 & -i \\ -i & i & 0 \end{pmatrix}, \\ \check{\tau}_3 = \frac{1}{3}(-2\lambda_1 + \lambda_4 + \lambda_6 + \sqrt{3}\lambda_8) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \end{cases} \tag{2}$$

と与えられる。これらの生成子は、パウリ型の積法則

$$\check{\tau}_j\,\check{\tau}_k = \delta_{jk}\,(I - \check{D}) + i\,\epsilon_{jkl}\,\check{\tau}_l \tag{3}$$

を満たし、$\check{D}$ と $\check{\tau}_j$ は

$$\check{D}\check{\tau}_j = \check{\tau}_j\check{D} = 0 \tag{4}$$

の意味で直交する。

リー群 $\mathrm{G}(\check{\mathcal{A}})$ は、代数 $\check{\mathcal{A}} = \{\check{D}, \check{\tau}_1, \check{\tau}_2, \check{\tau}_3\}$ の元のすべての可能な線形結合の指数関数写像として

$$\mathrm{G}(\check{\mathcal{A}}) = \left\{ \Omega(\vartheta) = \exp\left(i\vartheta_0\check{D} + i\sum_{j=1}^{3} \vartheta_j\,\check{\tau}_j \right) : \vartheta_0, \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \tag{5}$$

のように構成される。水平対称性をもつ場の理論は、このリー群をゲージ化することで定式化される。この群は、以下のような二つの部分群

$$\mathrm{SU_H}(2) = \left\{ \Omega_2(\vartheta) = \exp\left(i\sum_{j=1}^{3} \vartheta_j\,\check{\tau}_j \right) : \vartheta_j \in \mathbb{R} \right\} \tag{6}$$

および

$$\mathrm{U_H}(1) = \left\{ \Omega_1(\vartheta_0) = \exp(i\vartheta_0\check{D}) : \vartheta_0 \in \mathbb{R} \right\} \tag{7}$$

をもっている。

生成子 $\check{\tau}_3$ および $\check{D}$ の同時固有ベクトルは

$$|\,1\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\,2\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad |\,3\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

と求められる。これらの固有ベクトルは、水平対称性の基本３重項を表現する基底として有用である。とくに、ベクトル $|3\rangle$ は群 $\mathrm{SU_H}(2)$ の作用に対して不変であることに留意しなければならない。すなわち、$\Omega_2(\vartheta)|3\rangle = |3\rangle$。

3 場とラグランジュアン密度

スケール $\breve{\Lambda}$ を越える高エネルギー領域では、垂直対称性の同じ量子数をもち定まったカイラリティをもつ３世代の基本フェルミオンは

$$\Psi_h^f(x) = {}^{\breve{t}}\Big(\ \psi_{h1}^f(x),\quad \psi_{h2}^f(x),\quad \psi_{h3}^f(x)\ \Big) \tag{9}$$

水平対称性の基本表現を構成すると要請する。ここで $f\,(=q,u,d;l,\nu,e)$ は電弱多重項を識別し、$h\,(=L,R)$ はカイラリティを表す。また、記号 $\breve{t}$ は水平対称性の表現に関する転置操作を意味する。具体的には、$\Psi_L^f\ (=\Psi_L^q,\ \Psi_L^l)$ は電弱２重項を成分とする水平対称３重項であり、$\Psi_R^f\ (=\Psi_R^u,\ \Psi_R^d,\ \Psi_R^\nu,\ \Psi_R^e)$ は電弱１重項から成る３重項である。これらのフェルミオン多重項の水平対称ハイパー荷はすべてゼロであると仮定する。

水平対称性のゲージ場は、３重項 $\breve{A}_\mu^{(2)j}(x)$ および１重項 $\breve{A}_\mu^{(1)}(x)$ として存在し

$$\breve{\tau}_j \ \leftrightarrow\ \breve{A}_\mu^{(2)j}(x), \quad \breve{D}\ \leftrightarrow\ \breve{A}_\mu^{(1)}(x) \tag{10}$$

のように生成子 $\breve{\tau}_j\ (j=1,\,2,\,3)$ と $\breve{D}$ に対応するものと要請する。ゲージ場 $\breve{A}_\mu^{(k)}(x)$ の相互作用定数は、$\breve{g}_k\ (k=1,\,2)$ であり、場の強度テンソルは

$$\breve{F}_{\mu\nu}^{(1)} = \partial_\mu \breve{A}_\nu^{(1)} - \partial_\nu \breve{A}_\mu^{(1)}, \quad \breve{F}_{\mu\nu}^{(2)j} = \partial_\mu \breve{A}_\nu^{(2)j} - \partial_\nu \breve{A}_\mu^{(2)j} + \breve{g}_2\,\epsilon_{jkl}\,\breve{A}_\mu^{(2)k}\breve{A}_\nu^{(2)l} \tag{11}$$

である。

高エネルギースケール $\breve{\Lambda}$ で、水平対称性を破るためにスカラー３重項

$$\breve{\Phi}(x) = {}^{\breve{t}}\Big(\ \phi_1(x),\quad \phi_2(x),\quad \phi_3(x)\ \Big) \tag{12}$$

が必要となる。この３重項は零でない水平対称ハイパー荷 $\breve{y}_{\breve{\Phi}}$ をもつ。これから $\widetilde{\breve{\Phi}}(x) = (i\breve{\tau}_2)\breve{\Phi}^*(x)$ と、新しい３重項を定義しよう。これら二つの３重項 $\breve{\Phi}(x)$ および $\widetilde{\breve{\Phi}}(x)$ は $\mathrm{SU_H}(2)$ の作用の下で同じ変換性を示す。

低エネルギースケール Λ で電弱対称性を破るために、もう一つのスカラー３重項

$$\Phi(x) = {}^{\breve{t}}\Big(\ \Phi_1,\quad \Phi_2,\quad \Phi_3\ \Big) = {}^{\breve{t}}\left(\ \begin{pmatrix}\phi_1^+\\ \phi_1^0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\phi_2^+\\ \phi_2^0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\phi_3^+\\ \phi_3^0\end{pmatrix}\ \right) \tag{13}$$

を導入する。３重項 $\Phi(x)$ の水平対称ハイパー荷は零であり、成分場 $\Phi_j(x)\ (j=1,\,2,\,3)$ は電弱ハイパー荷 $Y_{\mathrm{EW}}=1$ を担う電弱２重項である。これと $\widetilde{\Phi}(x) = (i\breve{\tau}_2)(i\tau_2)\Phi^*(x)$ によって定義される多重項は、水平対称群 $\mathrm{SU_H}(2)$ と電弱アイソスピン群 $\mathrm{SU_{EW}}(2)$ の下で同じ変換性をもつ。

任意の水平対称３重項を T とし、その成分の和によって、新たな量

$$\{\!\{T\}\!\} = \sum_{i=1}^{3} T_i = \sqrt{3}\,\langle\, 3 \,|\, T \,\rangle \tag{14}$$

を定義し、それを "T のH和" と名付ける。T への群 $\mathrm{G}(\breve{A})$ の作用 $T \to \Omega(\vartheta)T$ によって、H和は $\{\!\{T\}\!\} \to \exp(i\vartheta_0)\{\!\{T\}\!\}$ のような変換をうける。とくに、群 $\mathrm{SU_H}(2)$ の下で、H和 $\{\!\{T\}\!\}$ は不変量である。

このH和の特性を利用することにより、セクター f の湯川相互作用のラグランジュ密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{Y}}^{f}$ は、群 $\mathrm{EW}\times\mathrm{H}$ の不変量の和として構成することができる。すなわち、電弱アイソスピンのアップ状態 $(f' = q,\, f = u)$ および $(f' = l,\, f = \nu)$ に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{Y}}^{f} &= Y_{f1}\,\bar{\Psi}_L^{f'}\,\widetilde{\Phi}\,\{\!\{\Psi_R^f\}\!\} + Y_{f2}\,\{\!\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\!\}\,{}^{\check{t}}\widetilde{\Phi} i\check{\tau}_2 \Psi_R^f \\ &\quad + Y_{f3}\,\bar{\Psi}_L^{f'} i\tau_2 \{\!\{\Phi^*\}\!\}\Psi_R^f + Y_{f4}\,\{\!\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\!\} i\tau_2 \{\!\{\Phi^*\}\!\}\{\!\{\Psi_R^f\}\!\} + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{15}$$

また、電弱アイソスピンのダウン状態 $(f' = q,\, f = d)$ および $(f' = l,\, f = e)$ に対しては

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathrm{Y}}^{f} &= Y_{f1}\,\bar{\Psi}_L^{f'}\,\Phi\,\{\!\{\Psi_R^f\}\!\} + Y_{f2}\,\{\!\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\!\}\,{}^{\check{t}}\Phi i\check{\tau}_2 \Psi_R^f \\ &\quad + Y_{f3}\,\bar{\Psi}_L^{f'} \{\!\{\Phi\}\!\}\Psi_R^f + Y_{f4}\,\{\!\{\bar{\Psi}_L^{f'}\}\!\} \{\!\{\Phi\}\!\}\{\!\{\Psi_R^f\}\!\} + \mathrm{h.c.} \end{aligned} \tag{16}$$

を得る。ここで、Y_{fi} $(i = 1, \cdots, 4)$ は、未知の湯川相互作用定数である。標準模型に比べると、その数は 4/9 に減少[2]している。

ニュートリノのカイラル３重項 Ψ_R^{ν} の荷電共役３重項は

$$\Psi_L^{\nu c} = C\,{}^{\check{t}t}\overline{\Psi_R^{\nu}} \tag{17}$$

によって定義される。ここで、C は荷電共役行列であり、t はローレンツスピノールに関する転置操作を示す。水平対称不変なマジョラナ相互作用のラグランジュ密度 $\mathcal{L}_{\mathrm{M}}$ は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{M}} = \breve{g}_{\mathrm{M1}}\overline{\Psi_L^{\nu c}}\,\check{\tau}_2\breve{\Phi}\{\!\{\Psi_R^{\nu}\}\!\} + \breve{g}_{\mathrm{M2}}\{\!\{\overline{\Psi_L^{\nu c}}\}\!\}\,{}^{\check{t}}\breve{\Phi}\check{\tau}_2\Psi_R^{\nu} + \breve{m}_{\mathrm{M}}\overline{\Psi_L^{\nu c}}\,\check{\tau}_2\,\Psi_R^{\nu} + \mathrm{h.c.} \tag{18}$$

となる。ここで、$\breve{g}_{\mathrm{M}j}(j = 1, 2)$ と $\breve{m}_{\mathrm{M}}$ はマジョラナ相互作用定数とマジョラナ質量である。

スカラー多重項のラグランジュアン密度は

$$\mathcal{L}_{\mathrm{scalar}} = (\mathcal{D}^{\mu}\breve{\Phi})^{\dagger}(\mathcal{D}_{\mu}\breve{\Phi}) + (\mathcal{D}^{\mu}\Phi)^{\dagger}(\mathcal{D}_{\mu}\Phi) - V_{\mathrm{T}}(\Phi,\, \breve{\Phi}) \tag{19}$$

と書き下すことができる。ここで、$\breve{\Phi}(x)$ と $\Phi(x)$ に対する共変微分は

$$\mathcal{D}_{\mu}\breve{\Phi} = \left(\partial_{\mu} - i\breve{g}_2\,\breve{A}_{\mu}^{(2)j}\,\frac{1}{2}\,\check{\tau}_j - i\breve{g}_1\,\breve{A}_{\mu}^{(1)}\,\breve{y}_{\breve{\Phi}}\breve{D}\right)\breve{\Phi} \tag{20}$$

および

$$\mathcal{D}_{\mu}\Phi = \left(\partial_{\mu} - ig_2\,A_{\mu}^{(2)j}\,\frac{1}{2}\,\tau_j - ig_1\,A_{\mu}^{(1)}\frac{1}{2} - i\breve{g}_2\,\breve{A}_{\mu}^{(2)j}\,\frac{1}{2}\,\check{\tau}_j\right)\Phi \tag{21}$$

[2] ３重項 $\Psi_h^f(x)$ および $\Phi(x)$ に零でない水平対称ハイパー荷を付与することによって、ラグランジュ密度を更に簡潔にすることができる。しかし、その場合、クォーク質量や混合行列に関する観測データーを再現することが不可能になってしまう。

であり、$V_{\mathrm{T}}(\Phi, \breve{\Phi})$ はスカラー多重項の全ヒッグスポテンシャルである。

スカラー多重項の全ヒッグスポテンシャル $V_T(\Phi, \breve{\Phi})$ は、一般性を失うことなく

$$V_T(\Phi, \breve{\Phi}) = V_1(\breve{\Phi}) + V_2(\Phi) + V_3(\Phi, \breve{\Phi}) \tag{22}$$

のように、三つの部分の和として表すことができる。第1項の $V_1(\breve{\Phi})$ と第2項の $V_2(\Phi)$ は、それぞれ、電弱1重項 $\breve{\Phi}(x)$ と電弱2重項 $\Phi(x)$ の自己相互作用部分である。それに対して、第3項の $V_3(\Phi, \breve{\Phi})$ は $\breve{\Phi}(x)$ と $\Phi(x)$ の相互作用部分である。

水平対称性により、ポテンシャル $V_1(\breve{\Phi})$ の最も一般的な形は

$$\begin{aligned} V_1(\breve{\Phi}) &= -\breve{m}_1^2 \breve{\Phi}^\dagger \breve{\Phi} - \breve{m}_2^2 \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}^\dagger \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\} + \tfrac{1}{2} \breve{\lambda}_1 \left(\breve{\Phi}^\dagger \breve{\Phi}\right)^2 + \tfrac{1}{2} \breve{\lambda}_2 \left(\{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}^\dagger \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}\right)^2 \\ &\quad + \breve{\lambda}_3 \left(\breve{\Phi}^\dagger \breve{\Phi}\right) \left(\{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}^\dagger \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}\right) + \breve{V}(0) \end{aligned} \tag{23}$$

と定まる。ここで、$\breve{\lambda}_1, \breve{\lambda}_2$ および $\breve{\lambda}_3$ は正定値な相互作用定数である。このポテンシャルから、スケール $\breve{\Lambda}$ の近くで電弱対称性を保ちつつ水平対称性を部分的に破る変曲点を決定し、そのまわりで水平対称性を完全に破るように $\breve{\Phi}(x)$ を成分場に展開する。

電弱2重項 $\Phi(x)$ の自己相互作用を表すポテンシャル部分 $V_2(\Phi)$ の最も一般的な形は、水平対称性と電弱対称性によって

$$\begin{aligned} V_2(\Phi) &= -m_1^2 \Phi^\dagger \Phi - m_2^2 \{\!\{\Phi\}\!\}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\} + \tfrac{1}{2} \bar{\lambda}_1 \left(\Phi^\dagger \Phi\right)^2 + \tfrac{1}{2} \bar{\lambda}_2 \left(\{\!\{\Phi\}\!\}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\}\right)^2 \\ &\quad + \bar{\lambda}_3 \left(\Phi^\dagger \Phi\right) \left(\{\!\{\Phi\}\!\}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\}\right) + \bar{\lambda}_4 |\Phi^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\}|^2 + \bar{\lambda}_5 \Phi^\dagger i\tau_2 {}^{\breve{t}}\Phi^{*t} \Phi i\tau_2 \Phi \\ &\quad + \widetilde{\lambda}_1 |\Phi^\dagger \widetilde{\Phi}|^2 + \widetilde{\lambda}_2 |\widetilde{\Phi}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\}|^2 + \widetilde{\lambda}_3 |\widetilde{\Phi}^\dagger (i\tau_2) \{\!\{\Phi^*\}\!\}|^2 \end{aligned} \tag{24}$$

である。5個の $\bar{\lambda}_j$ は $\Phi(x)$ のみに関わる相互作用項の係数であり、3個の $\widetilde{\lambda}_j$ は $\Phi(x)$ と $\widetilde{\Phi}(x)$ を含む相互作用項の係数である。係数 $\bar{\lambda}_5$ をもつ相互作用項では、水平対称性に関するスカラー積は、「先頭の $\Phi^\dagger$ と末尾の Φ の間」および「中央部の ${}^{\breve{t}}\Phi^*$ と ${}^t\Phi$ の間」でとられる。

最後に、3重項 $\breve{\Phi}(x)$ と $\Phi(x)$ の間の相互作用を表すポテンシャル $V_3(\Phi, \breve{\Phi})$ の最も一般的な形は

$$\begin{aligned} V_3(\Phi, \breve{\Phi}) &= \dot{\lambda}_1 (\Phi^\dagger \Phi)(\breve{\Phi}^\dagger \breve{\Phi}) + \dot{\lambda}_2 (\Phi^\dagger \Phi)(\{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}^\dagger \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}) \\ &\quad + \dot{\lambda}_3 (\{\!\{\Phi\}\!\}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\})(\breve{\Phi}^\dagger \breve{\Phi}) + \dot{\lambda}_4 (\{\!\{\Phi\}\!\}^\dagger \{\!\{\Phi\}\!\})(\{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}^\dagger \{\!\{\breve{\Phi}\}\!\}) \\ &\quad + \dot{\lambda}_5 (\widetilde{\Phi}^\dagger \breve{\Phi})(\breve{\Phi}^\dagger \widetilde{\Phi}) + \dot{\lambda}_6 |\Phi^\dagger (I - \breve{D}) \breve{\Phi}|^2 + \dot{\lambda}_7 |\Phi^\dagger \breve{D} \breve{\Phi}|^2 \end{aligned} \tag{25}$$

と定められる。

これらのポテンシャルの形を決定するためには、水平対称性と電弱対称性に関わる内部空間の詳しい考察が必要となる。その空間には、水平アイソスピン $\breve{\tau}_i$ や電弱アイソスピン τ_i を含む内部ベクトルやテンソルが存在する。幸い、そのようなベクトルやテンソルから構成される不変量はすべて、それらを含まない不変量に還元することが可能である。その詳しい分析は、他の機会に発表する。

4 対称性の破れ

"有効理論" が、低エネルギー領域のフレーバー物理現象の分析で "有効" であるためには、理論に含まれる未知パラメーターの数は可能なかぎり少なくなければならない。(15) と (16) で示されたように、水平対称性は湯川相互作用の未知係数を大幅に減少させる。しかし、基本フェルミオンの質量スペクトルと弱混合行列について、計算によって予言値を与え得るほど有効ではない。したがって、可能な限り未知数を増やさないように対称性を破ることが望ましい。そこで、まず、各スケールの近くで、対称性を部分的に破るようにヒッグスポテンシャルの変曲点を暫定的に選び、その破れを完全にするように、変曲点のまわりでスカラー多重項を成分場に展開する。

高エネルギースケール $\breve{\Lambda}$ の近傍で、スカラー３重項 $\breve{\Phi}(x)$ の振舞いにはスカラー３重項 $\Phi(x)$ はほとんど影響を与えない。そこで、$\breve{\Phi}$ の真空期待値 $\langle\breve{\Phi}\rangle$ をポテンシャル $V_1(\breve{\Phi})$ の変曲点によって決定する。その真空期待値は、１個のパラメーター $\breve{v}$ のみを用いて

$$\langle\breve{\Phi}\rangle = {}^t\begin{pmatrix} 0, & 0, & \breve{v} \end{pmatrix} = -\sqrt{\frac{2}{3}}\,\breve{v}\,|\,2\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\breve{v}\,|\,3\,\rangle \tag{26}$$

と表されると仮定する。$V_1(\breve{v})$ を $\breve{v}$ で微分し、対称性を破る解 $(\breve{v} \neq 0)$ として

$$\breve{v} = \frac{\breve{m}_1^2 + \breve{m}_2^2}{\breve{\lambda}_1 + \breve{\lambda}_2 + 2\breve{\lambda}_3} \tag{27}$$

を得る。

水平対称性の破れが、低エネルギースケール Λ での対称性の破れに影響を与えると見なすことは不自然なことではない。そこで、３重項 $\Phi(x)$ の真空期待値を定める際に、ポテンシャル $V_2(\Phi) + V_3(\Phi,\, \breve{v})$ の変曲点を分析する。ここでも、低エネルギーの有効理論で未知パラメーターの数を増やさないために、暫定的な変曲点が一つのパラメーター v_0 で指定されるとし、真空期待値の形を

$$\langle\,\Phi\,\rangle = {}^t\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}\right) = -\sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}|\,2\,\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}|\,3\,\rangle \tag{28}$$

と要請する。$V_2(v_0) + V_3(v_0,\, \breve{v})$ を v_0 微分し、対称性を破る解 $(v_0 \neq 0)$ として

$$v_0^2 = \frac{m_1^2 + m_2^2 - (\dot{\lambda}_1 + \dot{\lambda}_2 + \dot{\lambda}_3 + \dot{\lambda}_4 + \frac{4}{9}\dot{\lambda}_6 + \frac{1}{9}\dot{\lambda}_7)\breve{v}^2}{\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3 + 2\bar{\lambda}_4 + \frac{4}{3}\bar{\lambda}_5 + \frac{4}{3}\widetilde{\lambda}_3} \tag{29}$$

を得る。

明らかに、(26) と (28) の真空期待値は水平対称性を部分的にしか破っていない。以下で具体的に示されるように、破られていない対称性の結果、零質量の南部・ゴールドストーン（ＮＧ）モードが残ってしまう。この危険性を除くために、(26) と (28) のように、真空期待値が (8) で与えられた状態ベクトル $|2\rangle$ と $|3\rangle$ の線形結合で表されることに注目する。この自由度を利用すると、３重項を成分場に展開する際に、調整可能な混合角パラメーターを含ませることが可能になる。そのような展開は、以下の (31) および (44) に示されている。成分場と共に導入する混合角を、適切に選ぶことによって、零質量の場の出現を回避することができる。

スカラー３重項の展開 (31) や (44) をラグランジュ密度に代入すると、ある展開成分の場を１次で含む "非物理的" な項が出現する。そのような有害な項の係数は、それに含まれる混合角に適切な有限値を与えることによって消し去ることできる。その結果、状態 (26) や (28) に残されていた部分的な対称性を破り、ＮＧモードを除去することができるのである。

しかし、低エネルギースケールでの対称性の破れの場合は、この混合効果だけでは、非物理的な場の出現を禁止することができない。対称性を部分的に破るパラメーター v_0 の条件式 (29) が、成分場の２乗質量の間に強い関係を与えてしまう。これは v_0 で決まる変曲点が鞍点であることの反映である。その結果、一つの成分場が虚質量をもつことになる。この困難を避けるためには、v_0 の値を再調整する自由度を活用しなければならない。((43) 式参照。)

4.1　高エネルギースケール $\breve{\Lambda}$ での対称性の破れ

水平対称性が破られるスケール $\breve{\Lambda}=\breve{v}$ のまわりで、スカラー３重項 $\breve{\Phi}(x)$ ゲージを

$$\breve{\Phi}(x)=\Omega(\breve{\vartheta}(x))\,\breve{\Phi}_0(x) \tag{30}$$

のように固定する。ここで、$\Omega(\breve{\vartheta}(x))$ はゲージ場成分に組み込まれる４個の局所場 $\breve{\vartheta}_j(x)$ ($j=$ 0, 1, 2, 3) を含む水平対称群の要素であり、$\breve{\Phi}_0(x)$ は

$$\breve{\Phi}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{\xi}_1(x)|\,1\,\rangle+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{\alpha}\,\breve{\xi}_2(x)-\sqrt{\frac{2}{3}}\breve{v}\right)|\,2\,\rangle+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\breve{\beta}\,\breve{\xi}_2(x)+\frac{1}{\sqrt{3}}\breve{v}\right)|\,3\,\rangle \tag{31}$$

である。この表示で、$\breve{\xi}_1(x)$ と $\breve{\xi}_2(x)$ は実のスカラー成分場で、$\breve{\alpha}=\cos\breve{\theta}$ と $\breve{\beta}=\sin\breve{\theta}$ は混合のパラメーターである。スカラー３重項 $\breve{\Phi}(x)$ が失う４個の局所場 $\breve{\vartheta}_j(x)$ ($j=0,\,1,\,2,\,3$) はゲージ場 $\breve{A}_\mu(x)$ に移行し、質量を獲得したベクトル場 $\breve{A}'_\mu(x)$ が形成される。この変容 $\breve{A}_\mu(x)\to\breve{A}'_\mu(x)$ は、関係式

$$\mathcal{D}_\mu(\breve{A}')=\Omega^{-1}(\breve{\vartheta}(x))\mathcal{D}_\mu(\breve{A})\Omega(\breve{\vartheta}(x)) \tag{32}$$

で記述される。ここで、$\mathcal{D}_\mu(\breve{A})$ は３重項 $\breve{\Phi}(x)$ の共変微分である。

スケール $\breve{\Lambda}$ でのスカラー３重項 $\breve{\Phi}(x)$ のゲージ固定は、必然的に、水平対称性をもつ他のすべての多重項に影響を及ぼす。すなわち、ラグランジュ密度の不変性から、スカラー３重項 $\Phi(x)$ およびフェルミオン３重項 $\Psi^f_h(x)$ も

$$\Phi(x)=\Omega(\breve{\vartheta}(x))\underline{\Phi}(x),\quad \Psi^f_h(x)=\Omega(\breve{\vartheta}(x))\underline{\Psi}^f_h(x) \tag{33}$$

のように、ゲージ固定を受ける。ここで、$\Omega(\breve{\vartheta}(x))$ は (30) と同じ水平対称群のユニタリー位相因子である。位相因子を分離された $\Phi(x)$ と $\Psi^f_h(x)$ のゲージ固定部分は $\underline{\Phi}(x)$ および $\underline{\Psi}^f_h(x)$ と表されている。

展開 (31) を (23) のポテンシャル $V_1(\breve{\Phi}_0)$ に代入すると、成分場 $\breve{\xi}_2(x)$ について線形な異常項が出現する。その非物理的な項の係数が消えることを要求することによって、パラメーター $\breve{\theta}$ は

$$\tan\breve{\theta}=\sqrt{2}\frac{\breve{m}_1^2-(\breve{\lambda}_1+\breve{\lambda}_3)\breve{v}^2}{\breve{m}_1^2+3\breve{m}_2^2-(\breve{\lambda}_1+3\breve{\lambda}_2+4\breve{\lambda}_3)\breve{v}^2} \tag{34}$$

のように決定される。また、実スカラー成分場 $\breve{\xi}_1(x)$ および $\breve{\xi}_2(x)$ の２乗質量は

$$m^2_{\breve{\xi}_1} = -\breve{m}^2_1 + (\breve{\lambda}_1 + \breve{\lambda}_3)\breve{v}^2 \propto \sin\breve{\theta} \tag{35}$$

および

$$\begin{aligned} m^2_{\breve{\xi}_2} = m^2_{\breve{\xi}_1} - 3\breve{m}^2_2 \sin^2\breve{\theta} + \frac{1}{3}\Big[& 4\breve{\lambda}_1 \cos^2\breve{\theta} - 2\sqrt{2}(\breve{\lambda}_1 + 3\breve{\lambda}_3)\sin 2\breve{\theta} \\ & + (2\breve{\lambda}_1 + 27\breve{\lambda}_2 + 21\breve{\lambda}_3)\sin^2\breve{\theta}\Big]\breve{v}^2 \end{aligned} \tag{36}$$

と計算される。明らかに、$\breve{\xi}_1(x)$ の２乗質量は $\sin\breve{\theta}$ に比例している。すなわち、(31) の展開で混合角が零であれば成分場 $\breve{\xi}_1(x)$ は零質量のＮＧモードに留まることになる。すなわち、この展開で、成分場 $\breve{\xi}_2(x)$ が $|\,2\,\rangle$ と $|\,3\,\rangle$ の双方の係数に含まれることで、水平対称性が完全に破られ、成分場 $\breve{\xi}_1(x)$ がＮＧ定理の呪縛から解き放たれるのである。

ゲージ固定されたスカラー３重項 $\breve{\Phi}_0(x)$ に作用する共変微分 (32) はベクトル場 $\breve{A}'_\mu(x)$ を含む。この共変微分を (31) の $\breve{\Phi}_0(x)$ に作用させることにより、ベクトル場の暫定的な質量固有モードを求めスカラー成分場との相互作用を決定することができる。暫定的な質量固有モードを $\breve{W}_\mu(x), \breve{Y}_\mu(x)$ および $\breve{Z}_\mu(x)$ と表すと、それらは $\breve{A}'_\mu(x)$ によって

$$\breve{W}_\mu = \frac{\breve{A}^{(2)\prime 1}_\mu - i\breve{A}^{(2)\prime 2}_\mu}{\sqrt{2}},\ \breve{Y}_\mu = \frac{\breve{g}_2\breve{A}^{(2)\prime 3}_\mu + 2\breve{g}_1\breve{y}_\Phi\breve{A}^{(1)\prime}_\mu}{\sqrt{\breve{g}^2_2 + 4\breve{g}^2_1\breve{y}^2_\Phi}},\ \breve{Z}_\mu = \frac{\breve{g}_2\breve{A}^{(2)\prime 3}_\mu - \breve{g}_1\breve{y}_\Phi\breve{A}^{(1)\prime}_\mu}{\sqrt{\breve{g}^2_2 + \breve{g}^2_1\breve{y}^2_\Phi}} \tag{37}$$

と表され、２乗質量は $M^2_{\breve{W}} = \frac{1}{3}\breve{g}^2\breve{v}^2$、$M^2_{\breve{Y}} = \frac{1}{9}\left(\breve{g}^2_2 + 4\breve{g}^2_1\breve{y}^2_\Phi\right)\breve{v}^2$、$M^2_{\breve{Z}} = \frac{2}{9}\left(\breve{g}^2_2 + \breve{g}^2_1\breve{y}^2_\Phi\right)\breve{v}^2$ と求められる。

これらのベクトル場への移行を完全なものにするためには、水平対称部分のゲージ場のラグランジュ密度

$$\mathcal{L}_{\mathrm{GH}} \equiv -\frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}\breve{F}^{(2)j}_{\mu\nu}\breve{F}^{(2)j\,\mu\nu} - \frac{1}{4}\breve{F}^{(1)}_{\mu\nu}\breve{F}^{(1)\,\mu\nu} \tag{38}$$

を“対角化”しなければならない。この密度に、(37) を代入すると、$\partial_\mu\breve{Y}_\nu\,\partial^\mu\breve{Z}^\nu$ のような非対角的な項が残る。そのような項を消すためには、水平ハイパー荷 $\breve{y}^2_\Phi$ と相互作用係数の間に、つぎのような関係

$$\breve{g}^2_2 = 2\breve{g}^2_1\breve{y}^2_\Phi \tag{39}$$

がなければならない。この条件が満たされると、(37) は

$$\breve{W}_\mu = \frac{\breve{A}^{(2)\prime 1}_\mu - i\breve{A}^{(2)\prime 2}_\mu}{\sqrt{2}},\ \breve{Y}_\mu = \frac{1}{\sqrt{3}}\breve{A}^{(2)\prime 3}_\mu + \sqrt{\frac{2}{3}}\breve{A}^{(1)\prime}_\mu,\ \breve{Z}_\mu = \sqrt{\frac{2}{3}}\breve{A}^{(2)\prime 3}_\mu - \frac{1}{\sqrt{3}}\breve{A}^{(1)\prime}_\mu \tag{40}$$

となり、ベクトル場の質量は縮退し、$M^2_{\breve{Y}} = M^2_{\breve{Z}} = M^2_{\breve{W}} = \frac{1}{3}\breve{g}^2_2\breve{v}^2$ となる。

エネルギースケール $\breve{\Lambda}$ での水平対称性の破れによって、ニュートリノ族はマジョラナ型の質量を獲得する。ゲージ固定の後に、$\breve{\Phi}_0$ の表示を (18) に代入すると、ニュートリノ族に対するマジョラナ型質量行列 $\breve{\mathcal{M}}_\nu$ が

$$\breve{\mathcal{M}}_\nu = \frac{1}{\sqrt{3}}B_{\nu 1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}B_{\nu 2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + C_\nu\breve{\tau}_2 \tag{41}$$

と求められる。ここで、$B_{\nu 1} = \breve{g}_{\mathrm{M1}}\breve{v}$、$B_{\nu 2} = \breve{g}_{\mathrm{M2}}\breve{v}$ および $C_\nu = \breve{m}_{\mathrm{M}}$ である。

4.2 低エネルギースケール Λ での対称性の破れ

低エネルギースケール Λ の近くで、対称性の破れを考察する。そのために、3重項 $\underline{\Phi}(x)$ および $\underline{\Psi}(x)$ の電弱ゲージを

$$\underline{\Phi}(x) = \Omega_{\rm EW}(\theta(x))\Phi_0(x), \quad \underline{\Psi}^f_h(x) = \Omega_{\rm EW}(\theta(x))\Psi^f_{h0}(x) \tag{42}$$

と固定する。ここで、$\Omega_{\rm EW}(\theta(x))$ は電弱対称性のユニタリー群要素であり、ベクトル場に移行する局所場を含む。このようにゲージ固定された3重項 Φ_0 を (28) のまわりで展開すると、以下で示すように成分場の中に虚質量をもつものが現れる。その困難を回避するために、変曲点を指定するパラメーターを v_0 から新しい値 v へ

$$v^2 = Z\,v_0^2 \ \ (Z > 1) \tag{43}$$

と再調整する。この v で指定される状態のまわりで、ゲージ固定された3重項 $\Phi_0(x)$ は

$$\Phi_0(x) = \begin{pmatrix} \zeta_1^+(x) \\ \zeta_1^0(x) \end{pmatrix} |\,1\,\rangle + \begin{pmatrix} \zeta_2^+(x) \\ \zeta_2^0(x) - \sqrt{\frac{2}{3}}v \end{pmatrix} |\,2\,\rangle + \begin{pmatrix} 0 \\ \zeta_3^0(x) + \frac{1}{\sqrt{3}}v \end{pmatrix} |\,3\,\rangle \tag{44}$$

と展開される。ここで、$\zeta_i^+(x)\,(i=1,\,2)$ および $\zeta_i^0(x)\,(i=1,\,2,\,3)$ は複素成分場である。

つぎに、展開 (44) をポテンシャル $V_2(\Phi_0) + V_3(\Phi_0,\,\breve{v})$ に代入する。その結果、成分場の線形結合 $\zeta_2^{0*}(x) + \zeta_2^0(x)$ および $\zeta_3^{0*}(x) + \zeta_3^0(x)$ を1次で含む項が現れる。それらの非物理的な項を消去するために、複素場 $\zeta_2^0(x)$ と $\zeta_3^0(x)$ を

$$\zeta_2^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\eta_1(x)\cos\theta + i\eta_2(x)], \quad \zeta_3^0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[\,\eta_1(x)\sin\theta + i\eta_3(x)] \tag{45}$$

のように、新たな実場 $\eta_i(x)\,(i=1,\,2,\,3)$ で表現し直す。ここで θ は混合角である。その結果、非物理的な1次項は 新しい場 $\eta_1(x)$ のみで表される。その危険な項が消えることを要請すると、混合角 θ を定める条件式

$$\tan\theta = \sqrt{2}\frac{m_1'^2 - (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_3 + \bar\lambda_4 + \widetilde\lambda_3)v^2 + \frac{2}{3}\dot\lambda_6\breve{v}^2}{m_1'^2 + 3m_2'^2 - (\bar\lambda_1 + 3\bar\lambda_2 + 4\bar\lambda_3 + 4\bar\lambda_4 + 2\widetilde\lambda_3)v^2 + \frac{1}{3}\dot\lambda_7\breve{v}^2} \tag{46}$$

が導かれる。ここで、$m_1'^2 = m_1^2 - (\breve\lambda_1 + \breve\lambda_2)\breve{v}^2$、$m_2'^2 = m_2^2 - (\breve\lambda_1 + \breve\lambda_2)\breve{v}^2$ とおいた。

こうして、低エネルギー領域での対称性の破れの結果として、3種類の複素場 $\zeta_1^+(x)$、$\zeta_2^+(x)$、$\zeta_1^0(x)$ と3種類の実場 $\eta_i(x)\,(i=1,\,2,\,3)$ が出現することになる。複素場は2乗質量

$$\begin{aligned} m^2_{\zeta_1^+} &= -m_1'^2 + (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_3 - 2\bar\lambda_5 + \tfrac{8}{3}\widetilde\lambda_1 + \widetilde\lambda_2)v^2 + \tfrac{2}{3}\dot\lambda_5\breve{v}^2, \\ m^2_{\zeta_2^+} &= -m_1'^2 + (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_3 - \tfrac{2}{3}\bar\lambda_5 + \widetilde\lambda_2)v^2 + \tfrac{2}{3}\dot\lambda_6\breve{v}^2, \\ m^2_{\zeta_1^0} &= -m_1'^2 + (\bar\lambda_1 + \bar\lambda_3 + \bar\lambda_4 + \widetilde\lambda_3)v^2 + \tfrac{2}{3}\dot\lambda_5\breve{v}^2 \end{aligned} \tag{47}$$

をもち、実場の２乗質量は

$$
\begin{aligned}
m_{\eta_1}^2 &= m_{\eta_2}^2 \cos^2\theta + m_{\eta_3}^2 \sin^2\theta \\
&\quad + 4\left[\tfrac{1}{3}\bar{\lambda}_1\cos^2\theta + \left(\tfrac{1}{6}\bar{\lambda}_1 + \tfrac{3}{2}\bar{\lambda}_2 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4\right)\sin^2\theta \right.\\
&\qquad \left. -\sqrt{2}\left(\tfrac{1}{3}\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \widetilde{\lambda}_3\right)\cos\theta\sin\theta\right] v^2 \\
&\quad + \left(\tfrac{2}{3}\dot{\lambda}_6\cos^2\theta + \tfrac{1}{3}\dot{\lambda}_7\sin^2\theta\right)\breve{v}^2, \\
m_{\eta_2}^2 &= -m_1'^2 + (\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_3 + \bar{\lambda}_4 + \widetilde{\lambda}_3)v^2 + \tfrac{2}{3}\dot{\lambda}_6\breve{v}^2 \ \propto\ \sin\theta, \\
m_{\eta_3}^2 &= -m_1'^2 - 3m_2'^2 + (\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 4\bar{\lambda}_3 + 4\bar{\lambda}_4 + 2\widetilde{\lambda}_3)v^2 + \tfrac{1}{3}\dot{\lambda}_7\breve{v}^2
\end{aligned}
\tag{48}
$$

と計算される。実場 η_2 の２乗質量 $m_{\eta_2}^2$ は $\sin\theta$ に比例する。したがって、もし (44) と (45) で表される展開で混合角が零であれば、実場 $\eta_2(x)$ は零質量のＮＧボソンになってしまう。

これら６種類のスカラー成分場の２乗質量に関する表式は、６種類以上に未知の相互作用定数を含んでいる。したがって、それらの定数の値を適当に調整すれば、２乗質量を定正値にすることができるように思われる。しかし、パラメーター v_0^2 の定義式 (28) を用いると、$m_{\eta_2}^2$ と $m_{\eta_3}^2$ に対する恒等関係

$$
2m_{\eta_2}^2 + m_{\eta_3}^2 = (Z-1)(3\bar{\lambda}_1 + 3\bar{\lambda}_2 + 6\bar{\lambda}_3 + 6\bar{\lambda}_4 + 4\widetilde{\lambda}_3)v_0^2 \tag{49}
$$

が容易に導かれる。したがって、もしも v_0 を v に再調整せず $Z=1$ であれば、$2m_{\eta_2}^2 + m_{\eta_3}^2 = 0$ であり、$m_{\eta_2}^2$ か $m_{\eta_3}^2$ のいづれかの値が負であることが判明する。そのような虚質量モードを排除するためには、(43) のごとく v_0 を v に再調整し条件 $Z>1$ を課さなければならない。ここで、混合角が零であり変曲点のパラメーターの再調整を行わない場合 ($\theta=0$、$v=v_0$) を想定してみよう。その場合は、$m_{\eta_2} = m_{\eta_3} = 0$ であり、二つの実場 $\eta_2(x)$ と $\eta_3(x)$ が共にＮＧボソンとなる。これは、(28) および (29) で定まる状態では水平対称性の破れが不完全であることの結果である。混合角が (46) を満たす有限値をとるがパラメーターを再調整しない状態は、変曲点が鞍点になることを意味する。

水平対称性と電弱対称性に対するゲージ固定は３重項 $\Phi(x)$ の共変微分 (21) を

$$
\mathcal{D}_\mu(\breve{A}', A') = \Omega^{-1}(\breve{\vartheta}(x))\Omega_{\rm EW}^{-1}(\theta(x))\mathcal{D}_\mu(\breve{A}, A)\Omega_{\rm EW}(\theta(x))\Omega(\breve{\vartheta}(x)) \tag{50}
$$

のように変換する。ここで、$A'_\mu(x)$ は対称性の破れた相でのベクトル場である。このベクトル場の構造を定め、それらとスカラー成分場との相互作用を知るためには、ゲージ固定されたスカラー３重項に対する共変微分の作用を調べなければならない。その計算では、スケール $\breve{v} \simeq \breve{\Lambda}$ の巨大な質量をもつベクトル場 $\breve{W}_\mu(x)$、$\breve{Y}_\mu(x)$、$\breve{Z}_\mu(x)$ の効果を無視することができる。その結果、電弱相互作用に関するワインバーグ・サラムの成果をすべて再現すると共に、スカラー成分場と弱ベクトル場と電磁場の相互作用が決定される。

(44) の表現を用いると、(15) と (16) の湯川相互作用から基本フェルミオン族のディラック型質量行列 $\mathcal{M}_f$ が統一的に求められ、スカラー成分場との相互作用が決定される。電弱アイソスピンが上向きの状態 ($f=u,\,\nu$) に対しては、質量行列は

$$
\mathcal{M}_f = a_f I + \frac{1}{3}b_{f1}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{f2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c_f\breve{D} \tag{51}
$$

と求められる。ここで、$a_f = Y_{f3}\,v$、$b_{f1} = Y_{f2}\,v$、 $b_{f2} = -Y_{f1}\,v$、$c_f = 3Y_{f4}v$ である。同様に、電弱アイソスピンが下向きの状態 $(f = d,\, e)$ に対しては、質量行列は

$$\mathcal{M}_f = a_f\,I + b_{f1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}}b_{f2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} + c_f\,\check{D} \tag{52}$$

と定まる。ここで、$a_f = Y_{f3}\,v$、 $b_{f1} = Y_{f1}\,v$、 $b_{f2} = Y_{f2}\,v$、$c_f = 3Y_{f4}\,v$ である。このようにして導出した質量行列 (51) と (52) が含む未知パラメーターの数は、(15) と (16) の湯川相互作用定数の数に等しい。

これらの行列は、特殊な形をしており、自己エルミート共役ではない。したがって、それらを対角化するためには双ユニタリー変換を行わなければならず、質量スペクトルを求めるためには固有値問題

$$\mathcal{M}_f\mathcal{M}_f^\dagger|\boldsymbol{v}^{(f)i}\rangle = m_{(f)i}{}^2\,|\boldsymbol{v}^{(f)i}\rangle \tag{53}$$

を解かなければならない。この問題の固有ベクトルを用いることによって、クォークセクターの弱フレーバー混合行列は $V = \left(\langle \boldsymbol{v}^{(u)i}|\boldsymbol{v}^{(d)j}\rangle\right)$ と決定される。

5 議論

このように、水平対称性をゲージ化することによってＳＭを一般化し、“対称性の破れの構造的な機構” によって低エネルギーのフレーバー現象を記述する有効理論を導いた。この機構では、単一パラメーターで指定され対称性を部分的に破る擬似的真空を暫定的に選び、スカラー多重項を展開する際に生じる自由度を活用する。すなわち、成分場の混合や変曲点の再調整などによって、成分場が零質量や虚質量をもつことを禁止することができた。

この有効理論は、基本フェルミオン族の各セクターに対してディラック型の質量行列と、ニュートリノの右手カイラル成分に対するマジョラナ型の質量行列を統一的に導くことができる。水平対称性は湯川相互作用に効果的な制約を与え、相互作用定数の数をＳＭのそれの４/９へと大幅に限定する。また、対称性の破れに関する “構造的な機構” によって、湯川相互作用定数と同じ数の未知パラメーターを含み階層構造をもつ質量行列が導き出される。

この理論は、また、多くの多様なボーズ場の存在を予言する。ただし、現段階では、それらの質量値を理論的に確定することはできない。しかし、$\check{\xi}_i(x)$ のようにニュートリノ族以外のフェルミオンとは相互作用をしない興味深いスカラー場が存在することは注目に値する。もし、これらの場のいづれかの質量が他のスカラー場の質量より小さい場合には、それは、極めて長い寿命をもつことになり、宇宙の進化に大きい影響を及ぼすことになる。それらのスカラー場は、宇宙の主要な構成要素である暗黒物質や暗黒エネルギーの候補である可能性があることを指摘しておく。

参考文献

[1] I. S. Sogami, Prog. Theor. Phys. **114** (2005), 873; **115** (2006), 461.

[2] I. S. Sogami and Y. Konishi, Prog. Theor. Phys. **119** (2008), 339.