数理解析研究所講究録
第1658巻 2009年 194-204

Tsallis統計のマクロとミクロ
Macro and Micro Sturctures in Tsallis statistics

須鎗弘樹 (Hiroki Suyari)†，和田達明 (Tatsuaki Wada) ††
† 千葉大学 大学院融合科学研究科 〒263-8522 千葉市稲毛区弥生町1-33
Graduate School of Advanced Integration Science, Chiba University, 263-8522, Japan
suyari@faculty.chiba-u.jp, suyari@ieee.org
†† 茨城大学 工学部電気電子工学科 〒316-8511 日立市中成沢町4-12-1
Dept. of Electrical and Electronic Engineering, Ibaraki University, 316-8511, Japan
wada@mx.ibaraki.ac.jp

はじめに Boltzmann-Gibbs統計力学をマルチフラクタルのような系に拡張する方法の一つとして，Constantino Tsallisは，Shannonエントロピーを1パラメータ拡張した一般化エントロピー（今日，Tsallisエントロピーと言われる）をJaynesのエントロピー最大化原理による統計力学の構成法に適用することを提案した．つまり，マクロな物理量であるエントロピーを出発点にした提案であった．この方法で得られる統計力学の枠組みは，ルジャンドル変換構造などの統計力学の重要な要諦を満たすものの，なぜTsallisエントロピーを出発点にする（できる）のかという根本的な問題を一向に解決できない．つまり，ミクロな視点がないために，統計力学の重要な役割であるミクロとマクロを結ぶことがいつまでたってもできない．これに対し，筆者の一人は，q積という拡張された積を用いて，ミクロなアプローチからTsallisエントロピーを初めとする重要なマクロな物理量が導かれることを示した．また，最近になって，Tsallis統計力学の背景には，自然な数理構造が存在することがわかってきた．端的に書けば，従来のBoltzmann-Gibbs統計力学の数理は，指数関数族 $\frac{dy}{dx}=y$ の数理であり，その拡張であるTsallis統計力学の数理は，その1パラメータ拡張である $\frac{dy}{dx}=y^q$ の数理である．本稿では，その基礎数理について簡潔に述べる．

1 非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y^q$ から導かれる誤差法則の拡張

指数関数の特徴付けとして最も有名な定式化は，基本的な線形微分方程式 $\frac{dy}{dx}=y$ であろう．ここでは，その簡単な一般化として次の非線形微分方程式：

$$\frac{dy}{dx}=y^q \quad (q>0) \tag{1}$$

を出発点にする [1]．この非線形微分方程式を解くと，

$$\frac{y}{\exp_q(C)}=\exp_q\left(\frac{x}{\left(\exp_q(C)\right)^{1-q}}\right) \tag{2}$$

を得る [2]．ここで，Cは，$1+(1-q)C>0$ を満たす任意定数で，$\exp_q$ は q-指数関数と言われる一般化指数関数である [3][4][5].

定義 1 （q-**指数関数**，q-**対数関数**）$q>0$ を任意に固定する．$1+(1-q)x>0$ を満たす $x\in\mathbb{R}$ の集合上の関数

$$\exp_q x := [1+(1-q)x]^{\frac{1}{1-q}} \tag{3}$$

を q-指数関数といい，$\mathbb{R}^+$ 上の関数

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q}-1}{1-q} \tag{4}$$

を q-対数関数という．

q-指数関数に対して

$$\exp_q(x)\otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x+y), \tag{5}$$

あるいは q-対数関数に対して

$$\ln_q(x\otimes_q y) = \ln_q(x)+\ln_q(y) \tag{6}$$

を満たすように，新しい積 $\otimes_q$ を定める．この $\otimes_q$ を q-積という [6][7]．

定義 2 （q-**積**）$x^{1-q}+y^{1-q}-1>0$ を満たす $x,y>0$ に対して，

$$x\otimes_q y := \left[x^{1-q}+y^{1-q}-1\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{7}$$

を x と y の q-積という．

注意 3 $x^{1-q}+y^{1-q}-1>0$ の条件は，q-指数関数の定義域の条件 $1+(1-q)x>0$ と（5）から導かれる．

さて，このように $\frac{dy}{dx}=y^q$ から定まる q-積 $\otimes_q$ が，独立性の拡張と考えられるかを検証するための最初の応用として，**Gauss の誤差法則の拡張**を考えた [8]．

一般に，長さ・重さの測定など，ある測定を n 回独立に行い，その測定結果が

$$x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R} \tag{8}$$

で与えられたとしよう．このとき，各値 x_i $(i=1,\cdots,n)$ は，互いに独立で同一の確率変数 X_i $(i=1,\cdots,n)$ の値と考えられる．このとき，真の値 $x\in\mathbb{R}$ が存在して，次のような加法的な関係：

$$x_i = x+e_i \quad (i=1,\cdots,n), \tag{9}$$

を満たすとする．ここで，e_i は，真の値と観測値との差，つまり，誤差（ゆらぎ）である．したがって，各確率変数 X_i に対して，誤差 e_i を値にとる確率変数 E_i が存在して，

$$X_i = x+E_i \ (i=1,\cdots,n) \tag{10}$$

と表される．確率変数 X_i $(i=1,\cdots,n)$ が独立同一分布にしたがうことから，各 E_i は，同じ確率密度関数 f をもつ．ただし，f は微分可能とする．このとき，θ の関数 $L(\theta)$ として，

$$L(\theta) := f(x_1-\theta)\,f(x_2-\theta)\cdots f(x_n-\theta) \tag{11}$$

を定義する．この $L(\theta)$ を**尤度関数**という．このとき，次の定理が成り立つ．

命題 4 （***Gauss* の誤差法則**）任意に固定された $x_1,x_2,\cdots,x_n$ に対して，$L(\theta)$ が

$$\theta=\theta^* := \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}, \tag{12}$$

において最大値をとるとする．このとき，$x_i-\theta\,(i=1,\cdots,n)$ を値にとる確率変数の確率密度関数 f は *Gauss* 分布で与えられる．

$$f(e) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{e^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{13}$$

上の定理は，**Gaussの誤差法則**として知られており，さまざまな分野において測定に伴う偶然誤差に関する仮定として使われている．Gauss分布の特徴付けとして，中心極限定理などがよく知られているが，エントロピーとの関係では，連続系のShannonエントロピーを，分散に関する制約の下で最大化するとGauss分布が得られる．

そこで，このガウスの誤差法則をq-積によって拡張する．上で述べたGaussの誤差法則と同様の状況を考える．つまり，観測の結果，n個の値を得たと仮定する．

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \tag{14}$$

ただし，ここでは先とは異なり独立性を仮定しない．しかし，n個の確率変数の組$(X_1, \cdots, X_n)$が$(x_1, \cdots, x_n)$を含む無限小の区間に値をとる確率が，次の関数に比例すると仮定する．

$$L_q(\theta) := f(x_1 - \theta) \otimes_q f(x_2 - \theta) \otimes_q \cdots \otimes_q f(x_n - \theta) \tag{15}$$

つまり，尤度関数$L(\theta)$における独立性による積$\times$をq-積$\otimes_q$に置き換えたのが$L_q(\theta)$である．このとき，次の定理が成り立つ．

命題 5 （*Gaussの誤差法則の拡張*）任意に固定した$x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$に対して，$\theta$の関数$L_q(\theta)$が

$$\theta = \theta^* := \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}, \tag{16}$$

において最大値をとるとき，確率密度関数fは，q-*Gauss*分布で与えられる．

$$f(e) = \frac{\exp_q\left(-\beta_q e^2\right)}{\int \exp_q\left(-\beta_q e^2\right) de} \tag{17}$$

ここで，β_qはqに依存した正の定数である．

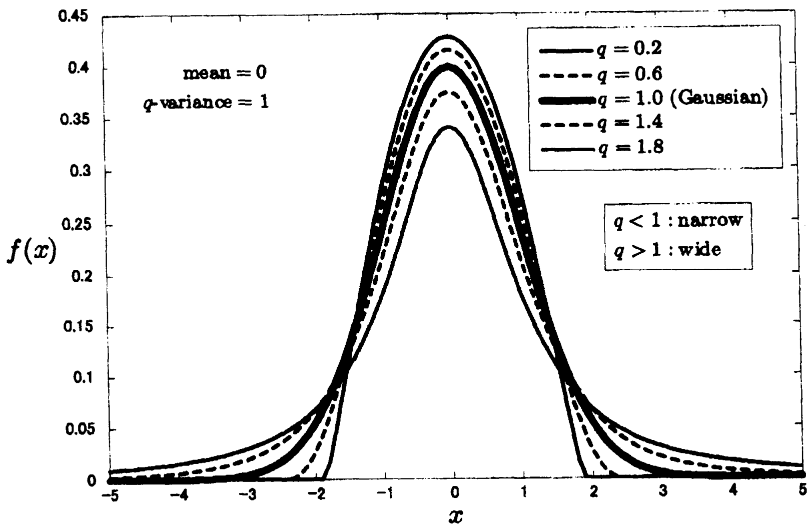

図 1: q-Gauss分布（q-平均は0，q-分散は1）

このq-Gauss分布は，Tsallisエントロピーを分散に関する制約の下で最大化した分布[9][10][11]と数式上で一致する．

命題 6 *(Tsallis エントロピー最大化による q-Gauss 分布の導出)* 条件：

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = 1, \tag{18}$$

$$\frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 (p(x))^q\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (p(x))^q\,dx} = \sigma^2 \tag{19}$$

のもとで，*Tsallis* エントロピー:

$$S_q = \frac{1-\int_{-\infty}^{\infty}(p(x))^q\,dx}{q-1} \tag{20}$$

を最大化する確率分布 $p_q(x)$ は

$$p_q(x) = \frac{1}{Z_q}\left(1-\frac{1-q}{3-q}\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{Z_q}\exp_q\left(-\frac{x^2}{(3-q)\sigma^2}\right) \tag{22}$$

で与えられる．正規化定数 Z_q は，ベータ関数 $B(u,v)$ を用いて次のように計算できる．

$$Z_q := \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{1-q}{3-q}\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{\frac{1}{1-q}}dx = \begin{cases} \left(\frac{3-q}{q-1}\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{3-q}{2(q-1)},\frac{1}{2}\right) & 1\le q<3 \\ \left(\frac{3-q}{1-q}\sigma^2\right)^{\frac{1}{2}} B\left(\frac{2-q}{1-q},\frac{1}{2}\right) & q<1 \end{cases} \tag{23}$$

Gauss の誤差法則の拡張で得られた (17) に対して，上の Tsallis エントロピー最大化で用いた制約 (19) を用いれば，

$$\beta_q = \frac{1}{(3-q)\sigma^2} \tag{24}$$

と求まり，(22) に一致する．

さて，この q-Gauss 分布は，べき分布の典型的な例を特別な場合として含む．

1. $q=1$ のとき，q-Gauss 分布は，通常の **Gauss 分布**に一致する．
2. $q=1+\frac{2}{n+1}$ のとき，q-Gauss 分布は，自由度 n の **t-分布**に一致する．

$$p_{1+\frac{2}{n+1}}(x) = \frac{1}{\sqrt{n}B\left(\frac{n}{2},\frac{1}{2}\right)\sigma}\left(1+\frac{1}{n}\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \tag{25}$$

3. $q=2$ のとき，q-Gauss 分布は，**Cauchy 分布**に一致する．

$$p_2(x) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\sigma}\left(1+\frac{x^2}{\sigma^2}\right)^{-1} \tag{26}$$

Tsallis エントロピー最大化による q-Gauss 分布の導出 [9][10][11] は，上の Gauss の誤差法則の拡張以前に求められており，違うアプローチによる一致を見ることができた．つまり，この拡張により，通常の積（独立性）と Shannon エントロピーの関係は，q-積 $\otimes_q$ と Tsallis エントロピーの関係にも拡張できることがわかった．ただし，Renyi エントロピーも分散に関して同じ条件で最大化することによって，q-Gauss 分布が得られることに注意する必要がある．エントロピー最大化を用いる限り，Tsallis エントロピーも Renyi エントロピーも互いに $\sum_{i=1}^{k} p_i^q$ あるいは $\int_{-\infty}^{\infty}(p(x))^q\,dx$ の増加関数なので，最大化で得られる分布に違いはない．

2 q-多項係数の定式化から導かれるTsallisエントロピー

ここでは，q-積 $\otimes_q$ を用いて，q-多項係数を定式化し，Tsallis エントロピーを導く．

q-積 $\otimes_q$ を用いて，q-積の階乗である q-階乗 $n!_q$ を定義する [12].

定義 7 （q-階乗）自然数 $n \in \mathbb{N}$ と $q > 0$ に対して，

$$n!_q := 1 \otimes_q \cdots \otimes_q n. \tag{27}$$

を q-階乗という．

q-階乗 $n!_q$ に対して，次の q-Stirling の公式が成り立つ [12].

命題 8 （q-*Stirling* の公式）十分大きな自然数 $n \in \mathbb{N}$ に対して，次の近似が成り立つ．

$$\ln_q (n!_q) \simeq \begin{cases} \dfrac{n}{2-q}\ln_q n - \dfrac{n}{2-q} + O(\ln_q n) & \text{if} \quad q \neq 2, \\ n - \ln n + O(1) & \text{if} \quad q = 2. \end{cases} \tag{28}$$

q-積 $\otimes_q$ と同様にして，q-比 $\oslash_q$ は次の等式から定義される [6][7].

$$\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x-y), \tag{29}$$

$$\ln_q(x \oslash_q y) = \ln_q(x) + \ln_q(y). \tag{30}$$

定義 9 （q-比）$x^{1-q} - y^{1-q} + 1 > 0$ を満たす $x, y > 0$ に対して，

$$x \oslash_q y := \left[x^{1-q} - y^{1-q} + 1\right]^{\frac{1}{1-q}} \tag{31}$$

を x と y の q-比という．

q-積 $\otimes_q$ と q-比 $\oslash_q$ を用いて，q-多項係数が次のように定義される [12].

定義 10 （q-多項係数）$n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ と $n_i \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \cdots, k)$ に対して，

$$\begin{bmatrix} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{bmatrix}_q := (n!_q) \oslash_q \left[(n_1!_q) \otimes_q \cdots \otimes_q (n_k!_q)\right] \tag{32}$$

を q-多項係数という．

さて，以上の定式化の目的は，すべて次の有名な関係式を拡張するためである．

$$\ln \begin{bmatrix} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{bmatrix} \simeq n S_1\left(\frac{n_1}{n}, \cdots, \frac{n_k}{n}\right) \tag{33}$$

つまり，(33) の左辺の対数と多項係数は，それぞれ (4) と (32) に拡張されており，Stirling の公式による近似を表す $\simeq$ は，(28) によって q-Stirling の公式として拡張・定式化されている．以上の準備のもと，(33) の左辺の拡張に上記の定式化と近似を使えば，右辺には Tsallis エントロピーが現れる．つまり，出発点の非線形微分方程式 (1) $\frac{dy}{dx} = y^q$ に対応するエントロピーは，Tsallis エントロピーであることがわかる [12].

定理 11 （q-多項係数による *Tsallis* エントロピーの導出）n が十分に大きいとき，q-多項係数 *(32)* の q-対数から，*Tsallis* エントロピー S_q が導かれる．

$$\ln_q \begin{bmatrix} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{bmatrix}_q \simeq \begin{cases} \dfrac{n^{2-q}}{2-q} \cdot S_{2-q}\left(\dfrac{n_1}{n}, \cdots, \dfrac{n_k}{n}\right), & q \neq 2 \text{ のとき}, \\ -S_1(n) + \sum\limits_{i=1}^{k} S_1(n_i), & q = 2 \text{ のとき}. \end{cases} \tag{34}$$

ここで，S_q は *Tsallis* エントロピー：

$$S_q(p_1,\cdots,p_k) := \frac{1-\sum_{i=1}^{k} p_i^q}{q-1}, \tag{35}$$

$S_1(n)$ は，

$$S_1(n) := \ln n. \tag{36}$$

(34) において，Tsallis 統計に頻出する加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ が自然に導かれていることがわかる．実は，上の定式化は，Tsallis 統計の代表的な 4 つの数理を特別な場合として含むように，もう少し一般化できる．それについては次章で述べる．

なお，同様の定式化から Rényi エントロピーも導けなくもないが，(34) のような綺麗な対称性は見られない．Rényi エントロピーの最大化においても，q-指数関数など Tsallis 統計に特徴的な関数が見られるが，q-指数関数の数理から見れば，対応する自然な情報量は，Rényi エントロピーではなく Tsallis エントロピーであることが，上の定理からわかる．

3 Tsallis 統計の 4 つの数理構造

(34) において，$q \neq 2$ のときは，加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ を表している．この加法的双対性以外に，Tsallis 統計力学では，乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ や q-トリプレットなどの関係が知られている．(ただし，著者らが理論的に見つけるまでは，q-トリプレットは数値計算による conjecture であった [13].) そこで，加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ が現れている関係 (34) を，乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ も表現できるように拡張したところ，q-トリプレットなど，Tsallis 統計力学の代表的な 4 つの数理構造が自然に導かれる [14]．ここでは，その結果だけを簡潔に書いておく．

定義 12 *((μ,ν)-階乗)* $n \in \mathbb{N}$ と $\mu,\nu \in \mathbb{R}$ に対して，(μ,ν)-階乗 $n!_{(\mu,\nu)}$ を次のように定義する．

$$n!_{(\mu,\nu)} := 1^\nu \otimes_\mu 2^\nu \otimes_\mu \cdots \otimes_\mu n^\nu. \tag{37}$$

ただし，$\nu \neq 0$ とする．

定理 13 ((μ,ν)-Stirling の公式)

$$\ln_\mu\left(n!_{(\mu,\nu)}\right) = \begin{cases} \dfrac{n\ln_\mu n^\nu - \nu n}{\nu(1-\mu)+1} + O(\ln_\mu n) & \text{if} \quad \nu(1-\mu)+1 \neq 0, \\ \nu(n-\ln n) + O(1) & \text{if} \quad \nu(1-\mu)+1 = 0. \end{cases} \tag{38}$$

定義 14 *((μ,ν)-多項係数)* 自然数 $n_i \in \mathbb{N}$ $(i=1,\cdots,k)$ と $n=\sum_{i=1}^{k} n_i$ に対して，(μ,ν)-多項係数を (μ,ν)-階乗 *(37)* を用いて次のように定義する．

$$\begin{bmatrix} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{bmatrix}_{(\mu,\nu)} := \left(n!_{(\mu,\nu)}\right) \oslash_\mu \left[\left(n_1!_{(\mu,\nu)}\right) \otimes_\mu \cdots \otimes_\mu \left(n_k!_{(\mu,\nu)}\right)\right]. \tag{39}$$

定理 15 ((μ,ν)-多項係数と Tsallis エントロピー S_q の関係) n が十分大きいとき，(μ,ν)-多項係数の μ-対数は *Tsallis* エントロピー *(35)* に一致する．

$$\frac{1}{\nu}\ln_\mu \begin{bmatrix} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{bmatrix}_{(\mu,\nu)} \simeq \begin{cases} \dfrac{n^q}{q}\cdot S_q\left(\dfrac{n_1}{n},\cdots,\dfrac{n_k}{n}\right) & \text{if} \quad q \neq 0 \\ -S_1(n) + \sum_{i=1}^{k} S_1(n_i) & \text{if} \quad q = 0 \end{cases} \tag{40}$$

ただし，$\nu \neq 0$,

$$\nu(1-\mu)+1=q, \tag{41}$$

S_q は *Tsallis* エントロピー *(35)* で，$S_1(n) := \ln n$.

ここで重要なのは，(41) である（これを著者らは，(μ,ν,q) **トリプレット**と呼んでいる）．ν の値によって，(40) は，次のような典型的な 4 つの数理構造を特別な場合として含んでいることがわかる．

1. **加法的双対性**：$\nu = 1$ のとき，(μ,ν,q) トリプレット (41) より，μ は次のように与えられる．

$$\mu = 2-q. \tag{42}$$

したがって，このとき，(40) は，

$$\ln_{2-q}\left[\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{array}\right]_{2-q} \simeq \frac{n^q}{q}\cdot S_q\left(\frac{n_1}{n},\cdots,\frac{n_k}{n}\right) \tag{43}$$

となる．これは，(34) において q と $2-q$ を入れ替えたときの式に一致する．つまり，加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ を表す．

2. **乗法的双対性**：$\nu = q$ のとき，(μ,ν,q) トリプレット (41) より，μ は次のように与えられる．

$$\mu = \frac{1}{q}. \tag{44}$$

したがって，このとき，(40) は，

$$\ln_{\frac{1}{q}}\left[\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{array}\right]_{\left(\frac{1}{q},q\right)} \simeq n^q\cdot S_q\left(\frac{n_1}{n},\cdots,\frac{n_k}{n}\right) \tag{45}$$

となり，乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ を表す．つまり，q と $\frac{1}{q}$ を入れ替えても式は成り立つ．

3. **q-トリプレット**：$\nu = 2-q$ のとき，(μ,ν,q) トリプレット (41) より，μ は次のように与えられる．

$$\mu = \frac{3-2q}{2-q}. \tag{46}$$

したがって，(40) は，

$$\frac{1}{2-q}\ln_{\frac{3-2q}{2-q}}\left[\begin{array}{ccc} & n & \\ n_1 & \cdots & n_k \end{array}\right]_{\left(\frac{3-2q}{2-q},2-q\right)} \simeq \frac{n^q}{q}\cdot S_q\left(\frac{n_1}{n},\cdots,\frac{n_k}{n}\right) \tag{47}$$

となる．このとき，(μ,ν,q) トリプレット (41) は，Tsallis によって数値計算により予想されていた q-トリプレット$(q_{\mathrm{sen}},q_{\mathrm{rel}},q_{\mathrm{stat}})$ と一致する [13][14].

4. **マルチフラクタル-トリプレット**：$\nu = \dfrac{1}{q}$ のとき，(μ,ν,q) トリプレット (41) より，μ は次のように与えられる．

$$\frac{1}{1-\mu} = \frac{1}{q-1} - \frac{1}{q}. \tag{48}$$

この関係は，近年，Tsallis らによって理論的に求められていた

$$\frac{1}{1-q_{\mathrm{sen}}} = \frac{1}{\alpha_{\min}} - \frac{1}{\alpha_{\max}} \tag{49}$$

に酷似している [15]．ここで，$\alpha_{\min}, \alpha_{\max} (\alpha_{\min} < \alpha_{\max})$ は，マルチフラクタルの理論に現れる $f(\alpha)$ スペクトラムにおいて，$f(\alpha)=0$ を満たす 2 つの α である．(48) と (49) を比べればわかるよう

に，(49) を $\alpha_{\max} - \alpha_{\min} = 1$ を満たすように α をリスケールすると，(48) と一致する．そのとき，(μ, ν, q) トリプレット (41) は，$q_{\mathrm{sen}}, \alpha_{\max}$ と次の意味で一致する．

$$\mu = q_{\mathrm{sen}}, \quad \nu = \frac{1}{\alpha_{\max}}, \quad q = \alpha_{\max} \tag{50}$$

この (50) を q-トリプレット $(q_{\mathrm{sen}}, q_{\mathrm{rel}}, q_{\mathrm{stat}})$ と区別するために，著者らはマルチフラクタル-トリプレットと呼んでいる [14].

以上，非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ だけから Tsallis エントロピーを導き，しかも，Tsallis 統計力学における代表的な 4 つの数理構造が自然に導かれることがわかった．このなかでも，特に後者の 2 つは物理的に重要な応用をもつが，これらは (μ, ν, q) トリプレット (41) の特別な場合であり，一般的な (μ, ν, q) トリプレット (41) の物理的な意味あるいは幾何学的な意味などは，これからの課題である．

4　Tsallis エントロピーからマルチフラクタルへ

1988 年の Tsallis エントロピーの導入 [16][4] では，マルチフラクタルの定式化に頻出する確率の q 乗 (p_i^q) を一般化エントロピーの定式化に使うことが発端であったことが読み取れる．フラクタルやマルチフラクタルで，最も重要な特徴は，対象となる系の次元が非整数次元であることである．実際，マルチフラクタルについて様々な文献を調べると，必ず現れるのが次の一般化次元 D_q である．

定義 16 (一般化次元) 空でない有界な任意の集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ に対して，A の ε 被覆を $\{U_i : i = 1, \cdots, n(\varepsilon)\} \subset \mathbb{R}^n$ とする．また，集合 A から N 個の点 $\{x_k : k = 1, \cdots, N\}$ を任意に取り出し，U_i に入る x_k の数を N_i とする．このとき，確率

$$p_i := \lim_{N \to \infty} \frac{N_i}{N} \quad (i = 1, \cdots, n(\varepsilon)) \tag{51}$$

に対して，

$$D_q := -\frac{1}{1-q} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q}{\ln \varepsilon} \tag{52}$$

を集合 A の一般化次元という．

この定義において，$\varepsilon \to 0$ のとき，$n(\varepsilon) \to \infty$ であることに注意する必要がある．この一般化次元において，特に，$q = 0, 1, 2$ のときは，それぞれ容量次元，情報次元，相関次元を表し，いわゆるカントール集合やコッホ曲線のような図形のフラクタル次元は，容量次元のことを指す．この一般化次元 D_q は，Tsallis エントロピーが導入された 1988 年当時まで，Rényi エントロピー：

$$S_q^{\text{Rényi}}(p_1, \cdots, p_n) := \frac{\ln \sum_{i=1}^{n} p_i^q}{1-q} \tag{53}$$

との関係がよく知られていた [17]．Rényi エントロピー $S_q^{\text{Rényi}}$ と Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} の両者の定式化には $\sum_{i=1}^{n} p_i^q$ が含まれ，非常に似ている．実は，$\varepsilon (> 0)$ が十分小さいとき，これらの間には，次のような関係がある．

定理 17 (一般化次元と Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの関係) $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき，次が成り立つ．

$$\exp\left(S_q^{Rényi}(p_i)\right) = \exp_q\left(S_q^{Tsallis}(p_i)\right) = \exp_{\frac{1}{q}}\left(S_{\frac{1}{q}}^{Tsallis}(P_i)\right) \simeq \varepsilon^{-D_q} \tag{54}$$

ここで，P_j は p_i のエスコート分布で，

$$P_j := \frac{p_j^q}{\sum_{i=1}^{n} p_i^q} \tag{55}$$

で定義される．

エスコート分布が現れるときは，乗法的双対性 $q \leftrightarrow \frac{1}{q}$ が存在することが多い．実際，(54) の 2 番目の等号もまた乗法的双対性の表現の 1 つである．また，エスコート分布は，ここで見たようにマルチフラクタルに特徴的に現れ [18]，Tsallis 統計の定式化では，期待値の定義に使われることが多い [19]．

この関係式（54）からわかるように，今まで述べてきた Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} の q は，一般化次元 D_q の q に他ならない．また，(54) の関係式は，1910 年の Einstein の論文 [20] で，Boltzmann の式 $S = k_B \ln W$ を逆さまにした $\exp(S/k_B) = W$ の一般化に対応していることがわかる．

5 おわりに

本論文で述べてきたことを簡潔に書くと，次のように表すことができる．記号 $\Rightarrow$ の意味は，$A \Rightarrow B$ は，A から B を導くことができるという意味である．

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad \Rightarrow \quad q\text{-対数関数}, q\text{-指数関数} \tag{56}$$

$$\Rightarrow \quad q\text{-積}, q\text{-スターリングの公式}, q\text{-多項係数} \tag{57}$$

$$\Rightarrow \quad \text{Tsallis エントロピー } S_q \tag{58}$$

$$\Rightarrow \quad q\text{-トリプレット，マルチフラクタル-トリプレット} \tag{59}$$

$$\Rightarrow \quad \text{一般化次元 } D_q \tag{60}$$

これよりわかるように，非線形微分方程式 $\frac{dy}{dx} = y^q$ だけを出発点にして，豊かな数理が展開できることがわかる [21]．さらに，Boltzmann-Gibbs 統計と Tsallis 統計には，次のような対応関係があることが最近明らかになっている．

	Boltzmann-Gibbs 統計	Tsallis 統計
基本方程式	$\frac{dy}{dx} = y$	$\frac{dy}{dx} = y^q$
基本情報量	Shannon エントロピー	Tsallis エントロピー
乗法	$\times$ (積)(統計的独立性)	$\otimes_q$ (q-積)
q	$q = 1$	$q \neq 1$ (一般化次元D_qにおける q)
基本 演算子	微分演算子 $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$	Jackson の q-微分演算子 $\frac{d_q f}{d_q x} = \frac{f(qx)-f(x)}{(q-1)x}$
ダイバージェンス	Kullback-Leibler ダイバージェンス	α-ダイバージェンス（情報幾何） $q = \frac{1-\alpha}{2} \quad (\alpha \neq \pm 1)$

Jackson の q-微分演算子との関係については [22][23][24] を参照，α-ダイバージェンスとの関係については [25][26] を参照されたい．

参考文献

[1] C. Tsallis, What should a statistical mechanics satisfy to reflect nature ?, Physica D, 193, 3-34, 2004.

[2] H. Suyari and T. Wada, Scaling property and Tsallis entropy derived from a fundamental nonlinear differential equation, Proc. of the 2006 Inter. Sym. on Inform. Theory and its Appli. (ISITA2006), pp.75-80, 2006. [LANL e-print cond-mat/0608007]

[3] C. Tsallis et al., Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, edited by S. Abe and Y. Okamoto (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).

[4] C. Tsallis et al., Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications, edited by M. Gell-Mann and C. Tsallis (Oxford Univ. Press, New York, 2004).

[5] C. Tsallis, Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World, Springer, 2009.

[6] L. Nivanen, A. Le Mehaute, Q.A. Wang, Generalized algebra within a nonextensive statistics, Rep. Math. Phys. 52, 437-434, 2003.

[7] E.P. Borges, A possible deformed algebra and calculus inspired in nonextensive thermostatistics, Physica A 340, 95–101, 2004.

[8] H. Suyari and M. Tsukada, Law of error in Tsallis statistics, IEEE Trans. Inform. Theory, vol.51, pp.753-757, 2005.

[9] C. Tsallis, S.V.F. Levy, A.M.C. Souza and R. Maynard, Statistical-mechanical foundation of the ubiquity of Lévy distributions in nature, Phys. Rev. Lett. 75, 3589-3593, 1995 [Erratum: 77, 5442 (1996)].

[10] D. Prato and C. Tsallis, Nonextensive foundation of Lévy distributions, Phys. Rev. E 60, 2398-2401, 2000.

[11] 田中勝, q-正規分布族に関する考察, 電子情報通信学会論文誌 D, vol.J85-D2, pp.161-173, 2002.

[12] H. Suyari, M. Tsukada and Y. Uesaka, Mathematical structures derived from the q-product uniquely determined by Tsallis entropy, Proc. of the 2005 IEEE Inter. Sym. on Inform. Theory (2005IEEE-ISIT), pp.2364-2368, 2005.; H. Suyari, Mathematical structure derived from the q-multinomial coefficient in Tsallis statistics, Physica A, vol.368, pp.63-82, 2006.

[13] C. Tsallis, M. Gell-Mann and Y. Sato, Asymptotically scale-invariant occupancy of phase space makes the entropy S_q extensive, Proc.Natl.Acad.Sciences, vol.102, 15377-15382, 2005.

[14] H. Suyari and T. Wada, Multiplicative duality, q-triplet and (μ, ν, q)-relation derived from the one-to-one correspondence between the (μ, ν)-multinomial coefficient and Tsallis entropy S_q, Physica A, vol. 387, 71-83, 2008.

[15] M. L. Lyra and C. Tsallis, Nonextensivity and multifractality in low-dimensional dissipative systems, Phys.Rev.Lett. vol.80, 53-56, 1998.

[16] C. Tsallis, Possible generalization of Boltzmann-Gibbs statistics, J.Stat.Phys. vol.52, pp.479-487, 1988.

[17] P. Grassberger, Generalized dimension of strange attractors, Phys.Lett.A, vol.97, 227-229, 1983.

[18] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門, 培風館, 1992.

[19] C. Tsallis, R.S. Mendes, A.R. Plastino, The role of constraints within generalized nonextensive statistics, Physica A, vol.261, 534-554, 1998.

[20] A. Einstein, Theorie der Opaleszenz von homogenen Flüssigkeiten und Flüssigkeitsgemischen in der Nähe des kritischen Zustandes, Annalen der Physik, vol.33, 1275-1298, 1910.

[21] 須鎗弘樹，Tsallis 統計力学の背景と新展開，日本物理学会誌, vol.63, no.6, pp.450-454, 2008.

[22] S. Abe, A note on the q-deformation-theoretic aspect of the generalized entropies in nonextensive physics, Phys.Lett.A, vol.224, 326-330, 1997.

[23] R.S. Johal, q calculus and entropy in nonextensive statistical physics, Phys.Rev.E. vol.58, 4147-4151, 1998.

[24] T. Wada and H. Suyari, A two-parameter generalization of Shannon–Khinchin axioms and the uniqueness theorem, Phys.Lett.A, vol.368, pp.199-205, 2007.

[25] A. Ohara, Geometry of distributions associated with Tsallis statistics and properties of relative entropy minimization, Phys.Lett.A, vol.370, 184-193, 2007.

[26] A. Ohara and T. Wada, Information geometry of q-Gaussian densities and behaviors of solutions to related diffusion equations, LANL e-print arXiv:0810.0624