数理解析研究所講究録
第 1665 巻 2009 年 139-151

楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)

北海道大学大学院理学研究科数学専攻博士3年　町出　智也 (MACHIDE Tomoya)
Department of Mathematics,
Hokkaido University

1 序章

一位の Bernoulli 関数 $\tilde{B}_1(x)$ を次のように定義する。

$$\tilde{B}_1(x) := \begin{cases} \{x\} - 1/2 & (x \text{ が整数でない時}), \\ 0 & (x \text{ が整数の時}). \end{cases}$$

p と q $(\neq 0)$ が互いに素な整数のとき、Dedekind 和 $s(p,q)$ は

$$s(p,q) := \operatorname{sign} q \sum_{j(|q|)} \tilde{B}_1(\frac{j}{q})\tilde{B}_1(\frac{pj}{q}) \tag{1.1}$$

と定義される。ただし、$\{x\}$ は実数 x の小数部分を、sign q は $q/|q|$ を、そして、和 $\sum_{j(|q|)}$ は $\mathbb{Z}/|q|\mathbb{Z}$ の完全代表系を走るとする。さて、複素数 τ を上半平面の元とし、$\mathrm{e}(x) := \mathrm{e}^{2\pi ix}$ と定義する。Dedekind [De] は、Dedekind の η 関数

$$\eta(\tau) := \mathrm{e}(\tau/24)\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}(m\tau))$$

の modular 群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に関する変換公式の中に、Dedekind 和 $s(p,q)$ が現れる事を発見した。その変換公式とは、次の通りである。$\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ かつ $c>0$ の時、

$$\log\eta(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}) = \log\eta(\tau) + \frac{1}{2}\log(\frac{c\tau+d}{i}) + \pi i\frac{a+d}{12c} - \pi i s(d,c).$$

ここで、log の枝は

$$\log z := \log|z| + i\arg z \quad (-\pi \leq \arg z < \pi)$$

とする。これから、$c \neq 0$ と $cp+dq \neq 0$ を満たす $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ に対して、Dedekind 和 $s(p,q)$ の等式

$$\begin{aligned} &s(p,q) - s(ap+bq, cp+dq) + s(d,c) \\ &\quad = -\frac{1}{4}\operatorname{sign} cq(cp+dq) + \frac{1}{12}\Big(\frac{c}{q(cp+dq)} + \frac{cp+dq}{cq} + \frac{q}{(cp+dq)c}\Big) \end{aligned} \tag{1.2}$$

が導かれる。([As1], [Ca2, Eq. (4,5)], [Ha, Theorem 2], [HH, Eq. (26)], [RG] にこの等式と関連した研究がある。) 特に、Dedekind 和の相互法則と呼ばれる等式は $a=d=0$ かつ $-b=c=1$ の時であり、それは、合同式

$$12qs(p,q) \equiv q+1-2\left(\frac{p}{q}\right) \pmod 8$$

を通して、Jacobi 記号 $\left(\frac{p}{q}\right)$ の相互法則を与える (証明は [RG] を参照のこと)。

さて、Halbritter [Ha] と R.R. Hall *et al* 等 [HWZ] によって研究された generalized Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix}\right)$ を紹介しよう。Bernoulli 多項式 $B_m(x)$ を、生成関数を用いて、$\sum_{n=0}^{\infty}\big(B_n(x)/n!\big)X^{n-1} = \mathrm{e}^{xX}/(\mathrm{e}^X-1)$ と定義する。そして、非負整数 m $(\neq 1)$ に対して、m 位の Bernoulli 関数を $\tilde{B}_m(x) := B_m(\{x\})$ と定める。このとき、$c \geq 1$ を満たす整数 a, b, c に対して、generalized Dedekind-Rademacher 和は

$$S_{m,n}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} := \sum_{j(c)} \tilde{B}_m\Big(a\frac{j+z}{c}-x\Big)\tilde{B}_n\Big(b\frac{j+z}{c}-y\Big). \tag{1.3}$$

と定義される。Dedekind の仕事を参考にして、T.M. Apostol [Ap] は Lambert 級数

$$G_l(\tau) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^l}\frac{\mathrm{e}(m\tau)}{1-\mathrm{e}(m\tau)}.$$

の modular 群上の次の変換公式を与えた。

$$\begin{aligned} &\frac{(l+1)!}{(2\pi i)^l}\Big(G_l(\tau)-(c\tau+d)^{l-1}G_l(V\tau)+\frac{1-(c\tau+d)^{l-1}}{2}\zeta(l)\Big) \\ &\qquad = -\sum_{k=-1}^{l}\binom{l+1}{k+1}\big(-(c\tau+d)\big)^k S_{k+1,l-k}\begin{pmatrix} 1 & d & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

ただし、$V\tau := (a\tau+b)/(c\tau+d)$ であり、$\zeta(s)$ は Riemann zeta 関数である。η 関数の場合と同じように、generalized Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ がその変換公式の中に現れる。ちなみに、

$$\log\eta(\tau) = \frac{\pi i\tau}{12} - G_1(\tau)$$

である。Apostol の変換公式を用いて、Carlitz [Ca1] は generalized Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ のある等式を与えた。その等式は Apostol-Dedekind 和 $S_{1,n}\left(\begin{smallmatrix} 1 & p & q \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ の相互法則を導く。

Arakawa [Ar1, Ar2]、 Berndt [Ber1, Ber2, Ber3]、Iseki [Is]、Lewittes [Le] もまた、Apostol の変換公式の一般化と考えられる変換公式を与えている。Arakawa [Ar1, Ar2] の公式では、$G_l(\tau)$ に対応するものとして、無限級数

$$\eta(\alpha,s,y,x):=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}(mx)}{m^{1-s}}\frac{\mathrm{e}(ym\alpha)}{1-\mathrm{e}(m\alpha)} \tag{1.4}$$

が使われている。そして、generalized Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}\left(\begin{smallmatrix}1&p&q\\0&x&y\end{smallmatrix}\right)$ がその変換公式の中に現れる。ここで、α は上半平面の元ではなく、代数的実無理数である。s が整数、$x=y=0$、そして $s\leq-1$ の時、Arakawa の変換公式は Apostol のそれと同じ形になるので、Carlitz の等式を導く事ができる。

さて、 Dedekind 和の様々な類似が沢山の人々によって研究されている（[As2, Ba1, Ba2, Eg, FY, It1, It3, Sc]）。最近、Fukuhara と Yui [FY] は Apostol-Dedekind 和の楕円類似を構成した。しかし、彼等の楕円類似は Bernoulli 関数の楕円類似を含んではいなかった。また、Sczech 以外の楕円類似は、それ自身が現れる変換公式を持ってはいなかった。(Sczech の楕円類似が現れる変換公式は Ito [It2] によって与えられた。)

この原稿「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (I)」の目的は、generalized Dedekind-Rademacher 和の楕円類似（楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}^{\tau}\left(\begin{smallmatrix}\vec{a}&\vec{b}&\vec{c}\\\vec{x}&\vec{y}&\vec{z}\end{smallmatrix}\right)$）を、Bernoulli 関数の楕円類似である Kronecker の二重級数 $B_m(\vec{x};\tau)$ を用いて定義する事、そして、楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則を構成する事である。もちろんこの相互法則は、パラメーター τ を無限大に向かわせる事により、generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則 [HWZ] を再提供する。また、楕円 Dedekind-Rademacher 和の正当性を強調するために、Kronecker 二重級数の生成関数と Levin [Lev] により研究された（Debye）楕円 polylogarithms の生成関数のある関係についても触れる。

ここでは扱わないが、この原稿の続編である、講究録「保型表現・保型形式と L 関数の周辺、京都大学数理解析研究所（２００８年１月）」に収録予定の原稿「楕円 Dedekind 和とある無限級数の変換公式 (II)」では、楕円 Dedekind-Rademacher 和が現れる、ある無限級数 $H_l^{\tau}(\Xi;\alpha)$ の変換公式を与えるだろう。その変換公式は、 Arakawa の変換公式の s が整数かつ $s\leq-2$ の場合の楕円類似と考えられる。なぜなら、パラメーター τ を無限大に向かわせる事によりそれらが再提供されるから、そして、その変換公式で使われる無限級数が、パラメーター τ 上で、modular 群に関する保型的性質を持つからである。

この原稿は次のように構成される。Section 2 で、楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S_{m,n}^{\tau}\left(\begin{smallmatrix}\vec{a}&\vec{b}&\vec{c}\\\vec{x}&\vec{y}&\vec{z}\end{smallmatrix}\right)$ を定義し、Section 3 で、その相互法則を与える。そして Section 4 で、generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則 [HWZ] を再提供する。楕円 Dedekind-

Rademacher 和の正当性を強調するための、Kronecker 二重級数の生成関数と (Debye) 楕円 polylogarithms の生成関数のある関係は Section 2 で述べられる。

この原稿は、論文 [Ma1] を加筆、省略して、日本語に翻訳したものである。

2 楕円 Dedekind-Rademacher 和

楕円 Dedekind-Rademacher 和 $S^{\tau}_{m,n}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{pmatrix}$ を定義するために、まず、Kronecker 二重級数 $B_m(\vec{x};\tau)$ を紹介しよう。$q=\mathrm{e}(\tau)$ とおく。Jacobi テータ関数を

$$\begin{aligned}\theta(x;\tau) &:= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \mathrm{e}(\frac{1}{2}(m+\frac{1}{2})^2\tau+(m+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})) \\ &= iq^{1/8}(\mathrm{e}(\frac{x}{2})-\mathrm{e}(-\frac{x}{2}))\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}(-x)q^m)(1-\mathrm{e}(x)q^m)(1-q^m)\end{aligned} \tag{2.1}$$

と定義する。この関数は奇関数であり、擬周期性を持つ。

$$\begin{aligned}&\theta(-x;\tau)=-\theta(x;\tau),\\ &\theta(x+1;\tau)=-\theta(x;\tau),\quad \theta(x+\tau;\tau)=-\mathrm{e}(-\frac{\tau}{2}-x)\theta(x;\tau).\end{aligned} \tag{2.2}$$

$x,X\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ に対して、関数を $F(x,X;\tau)$ を

$$F(x,X;\tau):=\frac{\theta'(0;\tau)\theta(x+X;\tau)}{\theta(x;\tau)\theta(X;\tau)}$$

と定義する。ただし、$\theta'(x;\tau)=\dfrac{\partial}{\partial x}\theta(x;\tau)$ とする。(2.1) より、

$$\begin{aligned}F(x,X;\tau) &= 2\pi i\frac{\mathrm{e}(\frac{x+X}{2})-\mathrm{e}(-\frac{x+X}{2})}{(\mathrm{e}(\frac{x}{2})-\mathrm{e}(-\frac{x}{2}))(\mathrm{e}(\frac{X}{2})-\mathrm{e}(-\frac{X}{2}))}\\ &\quad\times\frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}(-x-X)q^m)(1-\mathrm{e}(x+X)q^m)(1-q^m)^2}{\prod_{m=1}^{\infty}(1-\mathrm{e}(-x)q^m)(1-\mathrm{e}(x)q^m)(1-\mathrm{e}(-X)q^m)(1-\mathrm{e}(X)q^m)}.\end{aligned} \tag{2.3}$$

である。従って、$x\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ を固定した時、X の関数として $F(x,X;\tau)$ は、$\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ に一位の極を持つ有理型関数である。更に、(2.2) より、この関数は次の性質を持つ。

$$F(x,X+1;\tau)=F(x,X;\tau),\quad F(x,X+\tau;\tau)=\mathrm{e}(-x)F(x,X;\tau), \tag{2.4}$$

$$\operatorname*{Res}_{X=n'\tau+n}F(x,X;\tau)=\mathrm{e}(-n'x),\qquad (n,n'\in\mathbb{Z}). \tag{2.5}$$

ここで、$\operatorname*{Res}_{X=z_0}G(X)$ は $G(X)$ の $X=z_0$ での留数である。

REMARK 2.1. Egami [Eg] と Fukuhara 、Yui 等 [FY] は、彼等の楕円類似のために、関数 $\varphi(\tau,z)=\frac{1}{2\pi i}F(\frac{z}{2\pi i},\frac{1}{2};\tau)$ を使った。また、Bayad は次の関数を使った（[Ba1, p.34] を参照)。

$$D_{[\omega_1,\omega_2]}(z;\phi)=\frac{1}{\omega_2}\mathrm{e}(\frac{z}{\omega_2}\frac{\mathrm{Im}\ (\frac{\phi}{\omega_2})}{\mathrm{Im}\ \tau})F\left(\frac{z}{\omega_2},\frac{\phi}{\omega_2};\tau\right),$$

ただし、$\tau=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$ かつ $z,\phi\notin\omega_1\mathbb{Z}+\omega_2\mathbb{Z}$ とする。

ベクトル $\vec{x}=(x',x)$ in $\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ に対して、

$$\underline{F}(\vec{x};X;\tau):=\mathrm{e}(xX)F(-x'+x\tau,X;\tau)$$

と定める。この時、この関数は Kronecker 二重級数 $B_m(\vec{x};\tau)$ $(m=0,1,\ldots)$ の生成関数となり、Kronecker 二重級数は

$$\underline{F}(\vec{x};X;\tau)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(\vec{x};\tau)}{m!}(2\pi i)^m X^{m-1} \tag{2.6}$$

と定義される。$\vec{a}\in\mathbb{Z}^2$ とする時、(2.4) と (2.5) から、生成関数 $\underline{F}(\vec{x};X;\tau)$ は変数 X に関して、$\mathbb{Z}+\tau\mathbb{Z}$ に一位の極を持つ有理型関数であり、

$$\underline{F}(\vec{x};X+1;\tau)=\mathrm{e}(x)\underline{F}(\vec{x};X;\tau),\qquad \underline{F}(\vec{x};X+\tau;\tau)=\mathrm{e}(x')\underline{F}(\vec{x};X;\tau), \tag{2.7}$$

$$\underline{F}(-\vec{x};-X;\tau)=-\underline{F}(\vec{x};X;\tau),\qquad \underline{F}(\vec{x}+\vec{a};X;\tau)=\underline{F}(\vec{x};X;\tau) \tag{2.8}$$

という性質を持つ事がわかる。また、(2.6) と (2.8) から、Kronecker 二重級数は、

$$B_m(-\vec{x};\tau)=(-1)^m B_m(\vec{x};\tau),\quad B_m(\vec{x}+\vec{a};\tau)=B_m(\vec{x};\tau) \tag{2.9}$$

という性質を持つことがわかる。そして、

$$F(x,X;\tau)=2\pi i\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^j}{\mathrm{e}(x)-q^j}\mathrm{e}(-jX)-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{q^j}{\mathrm{e}(-x)-q^j}\mathrm{e}(jX)\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\mathrm{e}(x)-1}+\frac{1}{\mathrm{e}(X)-1}+1\right],\quad (|\mathrm{Im}\ x|,|\mathrm{Im}\ X|<\mathrm{Im}\ \tau),$$

から ([We] 参照)、Kronecker 二重級数は、

$$B_m(\vec{x};\tau)=m\left(\sum_{j=1}^{\infty}(x-j)^{m-1}\frac{\mathrm{e}(-x\tau)q^j}{\mathrm{e}(-x')-\mathrm{e}(-x\tau)q^j}\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{\infty}(x+j)^{m-1}\frac{\mathrm{e}(x\tau)q^j}{\mathrm{e}(x')-\mathrm{e}(x\tau)q^j}+x^{m-1}\frac{\mathrm{e}(-x'+x\tau)}{\mathrm{e}(-x'+x\tau)-1}\right)+B_m(x) \tag{2.10}$$

という表示を持つ。従って、$B_1(\vec{x};\tau)$ と $B_2(\vec{x};\tau)$ は $\vec{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ で連続で、$\vec{x}\in\mathbb{Z}^2$ で不連続である。その他の Kronecker 二重級数は任意の $\vec{x}\in\mathbb{R}^2$ で連続である。Kronecker 二重級数は、τ を $i\infty$ に近づけると、例外はあるが Bernoulli 関数 $\tilde{B}_m(x)$ なるのでそれを紹介しよう。

PROPOSITION 2.2. $\vec{x}=(x',x)\in\vec{x}\in\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{Z}^2$ の時、

$$\lim_{\tau\to i\infty}B_m(\vec{x};\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\dfrac{1+\mathrm{e}(x')}{1-\mathrm{e}(x')}=\dfrac{i}{2}\cot(\pi x') & (m=1,\ x\in\mathbb{Z}),\\ \tilde{B}_m(x) & (otherwise)\end{cases}\tag{2.11}$$

となる。特に、

$$\mathrm{Re}\lim_{\tau\to i\infty}B_m(\vec{x};\tau)=\tilde{B}_m(x)\tag{2.12}$$

である。ただし、Re w は複素数 w の虚部を意味する。

証明は省略する。さて、Kronecker 二重級数の生成関数と Levin [Lev] により研究された (Debye) 楕円 polylogarithms のある関係を述べよう。$\Lambda(X;-2\pi ix):=2\pi i\int_X^{i\infty}\dfrac{\mathrm{e}(-xt)}{\mathrm{e}(-t)-1}dt$ とおく。Debye polylogarithms $\Lambda_m(X)$ は

$$2\pi i\int_X^{i\infty}\frac{\mathrm{e}(-xt)}{\mathrm{e}(-t)-1}dt=\sum_{m=0}^{\infty}\Lambda_{m+1}(X)(2\pi i)^{m+1}(-x)^m\tag{2.13}$$

と定義される ([Lev] 参照)。つまり、$\Lambda(X;-2\pi ix)$ は Debye polylogarithms の生成関数である。

$$\frac{\partial}{\partial X}\Lambda(-X;-2\pi ix)=2\pi i\frac{\mathrm{e}(xX)}{\mathrm{e}(X)-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{B_m(x)}{m!}(2\pi i)^mX^{m-1}\tag{2.14}$$

なので、$\dfrac{\partial}{\partial X}\Lambda(-X;-2\pi ix)$ は Bernoulli 関数 (または多項式) の生成関数である。一方、Levin [Lev, Proposition 3.1] は、(Debye) 楕円 polylogarithms の補正された生成関数 $\underline{\Lambda}(X,\tau;\vec{x})$ が

$$\frac{\partial}{\partial X}\underline{\Lambda}(X,\tau;-2\pi i\vec{x})=\underline{F}(\vec{x};X;\tau)\tag{2.15}$$

を満たす事を示した。(2.14) と (2.15) を比較する事により、$\underline{F}(\vec{x};X;\tau)$ は Bernoulli 関数（多項式）の生成関数の楕円類似と考える事ができる。この視点に立つと、Kronecker 二重級数 $B_m(\vec{x};\tau)$ は Bernoulli 関数（多項式）の楕円類似となる。

REMARK 2.3. $Li_m(z)$ を Euler polylogarithm とする。つまり、

$$Li_m(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^m} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Euler polylogarithms の基本的な性質の一つに反復積分表示がある。次の形式的計算により、反復積分表示が、(2.13) において本質的な役割を演じている事が予想される。

$$\begin{aligned}
2\pi i \int \frac{\mathrm{e}(xX)}{\mathrm{e}(X)-1} dX &= 2\pi i \int \mathrm{e}(xX) Li_0(\mathrm{e}(-X)) dX \\
&= -\mathrm{e}(xX) Li_1(\mathrm{e}(-X)) + 2\pi i x \int \mathrm{e}(xX) Li_1(\mathrm{e}(-X)) dX \\
&= \cdots\cdots \\
&= -\mathrm{e}(xX) \Big(\sum_{m=0}^{\infty} Li_{m+1}(\mathrm{e}(-X)) x^m \Big) \\
&= -\sum_{m=0}^{\infty} \Big(\sum_{k=0}^{m} Li_{k+1}(\mathrm{e}(-X)) \frac{(2\pi i)^{-k} X^{m-k}}{(m-k)!} \Big) (2\pi i x)^m \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \Lambda_{m+1}(-X) (2\pi i)^{m+1} (-x)^m.
\end{aligned}$$

ここで、最後の等式で、[Lev, Proposition 1.1(a)] を用いた。この形式的計算が、Euler polylogarithms の楕円類似とその反復積分の研究に何らかの貢献をする事を筆者は願う。

準備ができたので、楕円 Dedekind-Rademacher 和を定義しよう。記号を簡略化するため、始めに次の Lemma を紹介する。証明は簡単なので省略する。

LEMMA 2.4. a, b を正整数、x, y を実数とする。$< a, b >$ を a と b の最大公約数とする。この時、次の条件は互いに同値である。

(i) $ay - bx \notin < a, b > \mathbb{Z}$.

(ii) $a\dfrac{j+y}{b} - x \notin \mathbb{Z} \quad (j = 0, \ldots, b-1)$.

(iii) $(\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{a}\mathbb{Z}) \cap (\dfrac{y}{b} + \dfrac{1}{b}\mathbb{Z}) = \emptyset$.

a, a', b, b', c, c' を正整数, x, x', y, y', z, z' を実数とする。

$$\Big(\frac{a'z' - c'x'}{< a', c' >}, \frac{az - cx}{< a, c >}\Big), \quad \Big(\frac{b'z' - c'y'}{< b', c' >}, \frac{bz - cy}{< b, c >}\Big) \notin \mathbb{Z}^2 \tag{2.16}$$

と仮定する。 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := ((a', a), (b', b), (c', c))$, $\quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := ((x', x), (y', y), (z', z))$

とおく。この時、楕円 Dedekind-Rademacher 和を次のように定義する。

$$S^{\tau}_{m,n}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{pmatrix} := \frac{1}{c'}\sum_{\substack{j(\mathrm{mod}\ c)\\ j'(\mathrm{mod}\ c')}} B_m\Big(a'\frac{j'+z'}{c'}-x', a\frac{j+z}{c}-x; \frac{a'}{a}\tau\Big)$$
$$\times B_n\Big(b'\frac{j'+z'}{c'}-y', b\frac{j+z}{c}-y; \frac{b'}{b}\tau\Big). \quad (2.17)$$

(2.16) と Lemma 2.4(ii) により、$B_1(0,0;\tau)$ と $B_2(0,0;\tau)$ は楕円 Dedekind-Rademacher 和の中には現れない。よって、この定義は well-defined である。

もし $m \neq 1$ かつ $n \neq 1$, ならば、またはもし $az-cx \notin <a,c> \mathbb{Z}$, $bz-cy \notin <b,c> \mathbb{Z}$ ならば、(2.11) と Lemma 2.4(ii) により

$$\lim_{\tau\to i\infty} S^{\tau}_{m,n}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{pmatrix} = S_{m,n}\begin{pmatrix}a & b & c\\ x & y & z\end{pmatrix}$$

が導かれる。ところが、これらの場合以外は $\lim_{\tau\to i\infty} S^{\tau}_{m,n}\big(\begin{smallmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{smallmatrix}\big)$ は簡単な表示では現せられない。原因は、等式

$$\lim_{\tau\to i\infty} B_1(x',0;\tau) = \frac{i}{2}\cot(\pi x') \neq 0 = \tilde{B}_1(0) \quad (x' \notin \frac{1}{2}+\mathbb{Z})$$

のせいである。しかしながら、楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則から generalized Dedekind-Rademacher 和のそれを再提供する際には、明確な表示は必要なく、$\lim_{\tau\to i\infty} S^{\tau}_{m,n}\big(\begin{smallmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{smallmatrix}\big)$ の実部のみが必要になる (定理 4.2 を見よ)。よって、その明確な表示は本原稿では必要がない。

3 楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則

この Section では楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則を与える。generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則 [HWZ] の時と同様に、楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則を記述するには、生成関数

$$\mathfrak{S}^{\tau}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\\ X & Y & Z\end{pmatrix} := \sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{1}{m!n!}S^{\tau}_{m,n}\begin{pmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z}\end{pmatrix}\Big(\frac{X}{a}\Big)^{m-1}\Big(\frac{Y}{b}\Big)^{n-1}$$

用いると便利である。ここで、X, Y, Z は変数で、$X+Y+Z=0$ を満たすとする。(2.6) と (2.17) より、その生成関数は

$$(2\pi i)^2 \mathfrak{S}^\tau \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ 2\pi i X & 2\pi i Y & 2\pi i Z \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{c'} \sum_{\substack{j (\mathrm{mod}\ c) \\ j' (\mathrm{mod}\ c')}} \underline{F}\Big(a'\frac{j'+z'}{c'} - x', a\frac{j+z}{c} - x; \frac{X}{a}; \frac{a'}{a}\tau\Big) \underline{F}\Big(b'\frac{j'+z'}{c'} - y', b\frac{j+z}{c} - y; \frac{Y}{b}; \frac{b'}{b}\tau\Big) \tag{3.1}$$

を満たす。次が楕円 Dedekind-Rademacher 和の相互法則である。

THEOREM 3.1. X, Y, Z を $X+Y+Z=0$ 満たす変数、a, a', b, b', c, c' を正整数、x, y, z を実数とする。x', y', z' を

$$\Big(\frac{a'y'-b'x'}{< a', b' >}, \frac{ay-bx}{< a, b >}\Big), \quad \Big(\frac{a'z'-c'x'}{< a', c' >}, \frac{az-cx}{< a, c >}\Big), \quad \Big(\frac{b'z'-c'y'}{< b', c' >}, \frac{bz-cy}{< b, c >}\Big) \notin \mathbb{Z}^2. \tag{3.2}$$

を満たす実数とする。 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := ((a', a), (b', b), (c', c)), \quad (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := ((x', x), (y', y), (z', z)).$ とおく。この時、次が成り立つ。

$$\mathfrak{S}^\tau \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \\ X & Y & Z \end{pmatrix} + \mathfrak{S}^\tau \begin{pmatrix} \vec{b} & \vec{c} & \vec{a} \\ \vec{y} & \vec{z} & \vec{x} \\ Y & Z & X \end{pmatrix} + \mathfrak{S}^\tau \begin{pmatrix} \vec{c} & \vec{a} & \vec{b} \\ \vec{z} & \vec{x} & \vec{y} \\ Z & X & Y \end{pmatrix} = 0. \tag{3.3}$$

証明は省略するが ([Ma1] を参照せよ)、それは留数定理を用いて成され、[Ba2] と [Eg] において使われていた手法である。

4 generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則

generalized Dedekind-Rademacher 和の生成関数を

$$\mathfrak{S}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{1}{m!n!} S_{m,n}\begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{pmatrix} \Big(\frac{X}{a}\Big)^{m-1} \Big(\frac{Y}{b}\Big)^{n-1}$$

と定義する。(3.3) から generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則 (定理 4.2) を導くために、まず、Dieter [Di] が研究した cotangent 和を紹介しよう。

$$\mathfrak{c}(a, b, c; x, y, z) := \frac{1}{c}{\sum}'_{j (\mathrm{mod}\ c)} \cot\Big(\pi(a\frac{j+z}{c} - x)\Big) \cot\Big(\pi(b\frac{j+z}{c} - y)\Big).$$

ただし、$\sum'_{j(\mathrm{mod}\ c)}$ は $a\frac{j+z}{c} - x \in \mathbb{Z}$ または $b\frac{j+z}{c} - y \in \mathbb{Z}$ となる j は排除する事を意味する。証明しないが（[Ma1] 参照）、次の命題が generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則を再提供するためには必要になる。

PROPOSITION 4.1. a, a', b, b', c, c' を正整数, x, x', y, y', z, z' を実数とする。

$$\left(\frac{a'z' - c'x'}{<a', c'>}, \frac{az - cx}{<a, c>}\right), \quad \left(\frac{b'z' - c'y'}{<b', c'>}, \frac{bz - cy}{<b, c>}\right) \notin \mathbb{Z}^2 \tag{4.1}$$

と仮定する。$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) := ((a', a), (b', b), (c', c))$, $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) := ((x', x), (y', y), (z', z))$. とおく。Re w は複素数 w の実部を意味するとする。この時、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Re} \lim_{\tau \to i\infty} S^{\tau}_{m,n} \begin{pmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{x} & \vec{y} & \vec{z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{cases} S_{1,1} \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix}\right) \\ -\frac{<a,b,c>}{4} \mathfrak{c}(a', b', c'; x', y', z') & (m = n = 1, (x, y, z) \in (a, b, c)\mathbb{R} + \mathbb{Z}^3), \\ S_{m,n} \left(\begin{smallmatrix} a & b & c \\ x & y & z \end{smallmatrix}\right) & (otherwise). \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

さて、 generalized Dedekind-Rademacher 和の相互法則 [HWZ] を与えよう。

THEOREM 4.2 (cf. [HWZ]). X, Y, Z を $X + Y + Z = 0$ を満たす変数、a, b, c を正整数、x, y, z を実数とする。この時、次が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{S} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} + \mathfrak{S} \begin{pmatrix} b & c & a \\ y & z & x \\ Y & Z & X \end{pmatrix} + \mathfrak{S} \begin{pmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ Z & X & Y \end{pmatrix} \\
&\qquad = \begin{cases} -\dfrac{<a, b, c>}{4} & ((x, y, z) \in (a, b, c)\mathbb{R} + \mathbb{Z}^3), \\ 0 & (otherwise). \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Proof. X, Y, Z を実数を値にとる変数としても良いので、そうする。$(x, y, z) \in (a, b, c)\mathbb{R} + \mathbb{Z}^3$ と仮定する。(3.3) において、 τ を $i\infty$ に持っていくとする。その時、その実部に注目すると、(4.2) より、

$$\begin{aligned}
0 = &\mathfrak{S} \begin{pmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{pmatrix} + \mathfrak{S} \begin{pmatrix} b & c & a \\ y & z & x \\ Y & Z & X \end{pmatrix} + \mathfrak{S} \begin{pmatrix} c & a & b \\ z & x & y \\ Z & X & Y \end{pmatrix} \\
&- \frac{<a, b, c>}{4} \left(\mathfrak{c}(a', b', c'; x', y', z') + \mathfrak{c}(b', c', a'; y', z', x') + \mathfrak{c}(c', a', b'; z', x', y')\right)
\end{aligned}$$

が導かれる。ここで、x', y', z' は

$$a'y' - b'x' \notin <a', b'> \mathbb{Z}, \quad a'z' - c'x' \notin <a', c'> \mathbb{Z}, \quad b'z' - c'y' \notin <b', c'> \mathbb{Z}. \tag{4.4}$$

を満たす実数とする。[Di, Theorem 2.3] の中で、cotangent 和 $\mathfrak{c}(a',b',c';x',y',z')$ の相互法則が与えられている。

$$\mathfrak{c}(a',b',c';x',y',z')+\mathfrak{c}(b',c',a';y',z',x')+\mathfrak{c}(c',a',b';z',x',y')=-1. \qquad (4.5)$$

よってこの場合は、定理は示された。他の場合も同様に導かれる。 □

REMARK 4.3. [HWZ, Sect.4] には ミスプリントがある。つまり、(7) の右辺は -1 が掛けられなければならない。

REMARK 4.4. [Di, Theorem 2.3] では、a',b',c' が互いに素であるという仮定があったが、(4.4) の条件の基では、この仮定は必要がない。

謝辞

筆者の講演申し込みを受け入れてくださった、本研究集会の責任者川田先生に感謝致します。

参考文献

[Ap] T. M. Apostol, *Generalized Dedekind sums and transformation formulae of certain Lambert series*, Duke Math. J. **17** (1950), 147–157.

[Ar1] T. Arakawa, *Generalized eta-functions and certain Ray class invariants of real quadratic fields*, Math. Ann. **260** (1982), 475–494.

[Ar2] T. Arakawa, *Dirichlet series* $\sum_{n=1}^{\infty}\cot\pi n\alpha/n^s$, *Dedekind sums, and Hecke L-functions for real quadratic fields*, Comment. Math. Univ. St. Paul. **37** (1988), 209–235.

[As1] T. Asai, *Some arithmetic on Dedekind sums*, J. Math. Soc. Japan 38 (1986), no. 1, 163–172.

[As2] T. Asai, 2006, private email.

[Ba1] A. Bayad, *Sommes de Dedekind elliptiques et formes de Jacobi*, Ann. Inst. Fourier Grenoble, **51** (2001), 29–42.

[Ba2] A. Bayad, *Sommes elliptiques multiples d'Apostol-Dedekind-Zagier*, C. R. Acad. Sci. Paris, **339** (2004), 457–462.

[Ber1] B.C. Berndt, *Generalized Dedekind eta-functions and generalized Dedekind sums*, Trans. Amer. Math. Soc. **178** (1973), 495–508.

[Ber2] B.C. Berndt, *Generalized Eisenstein series and modified Dedekind sums*, J. Reine Angew. Math. **272** (1974), 182–193.

[Ber3] B.C. Berndt, *Dedekind sums and a paper of G. H. Hardy*, J. London Math. Soc. (2) **13** (1976), 129–137.

[Ca1] L. Carlitz, *Some theorems on generalized Dedekind sums*, Pacific J. Math. **3** (1953), 513–522.

[Ca2] L. Carlitz, *A further note on Dedekind sums*, Duke Math. J. **23** (1956), 219–223.

[Di] U. Dieter, *Cotangent sums, a further generalization of Dedekind sums*, J. Number Theory **18** (1984), 289–305.

[De] R. Dedekind, *Erläuterungen zu zwei Fragmenten von Riemann*, Bernhard Riemann's Gesammelte mathematische Werke, 2nd ed., Teubner, Leipzig, 1892, 466–472.

[Eg] S. Egami, *An elliptic analogue of the multiple Dedekind sums*, Compositio Math. **99** (1995), 99–103.

[FY] S. Fukuhara and N. Yui, *Elliptic Apostol sums and their reciprocity laws*, Trans. Amer. Math. Soc. **356** (2004), no.10. 4237–4245.

[Ha] U. Halbritter, *Some new reciprocity formulas for generalized Dedekind sums*, Results Math. **8** (1985), 21–46.

[HH] R.R. Hall and M.N. Huxley, *Dedekind sums and continued fractions*, Acta Arith. **63** (1993), 79–90.

[HWZ] R.R. Hall, J. C. Wilson and D. Zagier, *Reciprocity formulae for general Dedekind-Rademacher sums*, Acta Arith. **73** (1995), 389–396.

[Is] S. Iseki, *The transformation formula for the Dedekind modular function and related functional equations*, Duke Math. J. **24** (1957), 653–662.

[It1] H. Ito, *On a property of elliptic Dedekind sums*, J. Number Theory **27** (1987), 17–21.

[It2] H. Ito, A function on the upper half space which is analogous to the imaginary part of $\log \eta(z)$. J. Reine Angew. Math. 373 (1987), 148–165.

[It3] H. Ito, *A density result for elliptic Dedekind sums*, Acta Arith. **112** (2004), 199–208.

[Lev] A. Levin, *Elliptic polylogarithms : An analytic theory*, Compositio Math. **106** (1997), no.3, 267–282.

[Le] J. Lewittes, *Analytic continuation of Eisenstein series*, Trans. Amer. Math. Soc. **177** (1972), 469–490.

[Ma1] T. Machide, *An elliptic analogue of generalized Dedekind-Rademacher sums*, to appear in J. Number Theory 128 (2008) 820–834.

[RG] H. Rademacher and E. Grosswald, *Dedekind Sums*, Carus Mathematical Monographs, No. 16, The Mathematical Association of America, Washington, D. C., 1972.

[Sc] R. Sczech, *Dedekindsummen mit elliptischen Funktionen*, Invent. Math. **76** (1984), 523–551.

[We] A. Weil, *Elliptic Functions according to Eisenstein and Kronecker*, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.