数理解析研究所講究録
第 1666 巻 2009 年 87-97

係数に誤差を含む多項式同士の整除性判定

中山 裕貴　　関川 浩
HIROKI NAKAYAMA*　　HIROSHI SEKIGAWA†
日本電信電話株式会社
NTT コミュニケーション科学基礎研究所
NTT COMMUNICATION SCIENCE LABORATORIES

Abstract

本研究では実区間多項式の組 P, F に対し，P に含まれる多項式 p, F に含まれる多項式 f が存在し，p が f で割り切れるかの判定法を与える．我々はこの問題を非線型代数方程式の可解判定問題として捉え，区間解析をもとにした反復アルゴリズムを用いることで，解が存在する場合はその解が含まれる領域を出力し，存在しない場合はその事実を出力する手法を提案する．また，区間解析を一般化したモード区間解析を適用することで得られる結果についても述べる．

1　はじめに

2 つの与えられた多項式について，一方が他方で割り切れるかを判定する「整除性判定問題」は，グレブナ基底などと密接な関係を持ち，計算代数の分野における重要な問題である．本研究では，整除性を多項式が誤差を含む場合に拡張し，与えられた誤差の範囲内で整除性を満たすかという判定問題を扱う．

本来，計算代数の分野ではすべての計算が正確に行われるものであったが，数値計算との融合による近似代数の概念が 1988 年に佐々木 [16] によって提案され，その考えに基づいた近似 GCD [17]，近似因数分解 [18] といった分野の研究が活発に行われている．本論文では，入力多項式は係数に誤差を持ち，その誤差は区間として表現されるものとする．このような多項式を区間多項式と呼び，区間多項式は多項式の連続集合と見なすことができる．今回扱う「区間多項式間の整除性判定問題」は，以下の通り表される．

問題 1 与えられた $l_\alpha, l'_\beta, h_\alpha, h'_\beta \in \mathbb{R}$ に対し，多変数多項式

$$\begin{aligned} p &= \textstyle\sum_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_k^{\alpha_k} \quad (\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)) \\ f &= \textstyle\sum_\beta b_\beta x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} \cdots x_k^{\beta_k} \quad (\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)) \end{aligned}$$

（ただし $l_\alpha \le a_\alpha \le h_\alpha$, $l'_\beta \le b_\beta \le h'_\beta$）が存在し，$p$ は f で割り切れるか？

被除多項式のみが区間多項式，除多項式が通常の固定された多項式である場合は，その剰余多項式から得られる制約はすべて線型であり，その集合がなす凸多面体について，原点がその領域内に含まれるか調べることで厳密に判定できる [19]．一方，除多項式も区間多項式である場合については，その剰余多項式に対する領域は多面体ではなく，また非凸であるため，判定は難しい．以降，除多項式も誤差を持つものとして考える．

*h-nakayama@cs.brl.ntt.co.jp
†sekigawa@theory.brl.ntt.co.jp

剰余多項式に対応する領域は非線型制約の集合として表されるため，整除性判定問題は非線型連立代数方程式の可解性判定と見なすことができる．非線型連立方程式の解を求める手段としては，区間解析を用いて全ての解を列挙する手法が Moore によって提案され [13]，さらに改良が加えられることで，与えられた領域内の全ての解を精度保証付きで，かつ有限ステップで求めることが可能となっている [7]．制約に対し変数の個数が多いため解の個数が有限でない場合についても，一部の変数をパラメータと見なすことで，解全体を包み込む区間の集合が得られる [8].

区間解析を用いた手法において，区間演算による区間幅の極端な広がりはアルゴリズムの効率の低下に直結する．そのため，アフィン演算 [1] や最良乗算 [11] を用いることで，区間幅の余分な拡がりを抑制する．この手法を可解性判定に利用したものとして [12] に加え，アフィン演算や最良乗算を行列の各要素に適用することで，方程式系が過剰決定である場合にも適用可能とした [14] の研究がある.

さらに，従来の区間解析では区間 $[a,b]$ は $a \leq b$ を満たすものであったが，$a > b$ なるものも認めたモード区間解析 (MIA) が提案され [3]，公差解析などの分野に対して適用が行われている [23]．本研究ではこれを可解性判定に用い，非線型方程式系をより一般化した量化非線型方程式系を解くことで解の領域を得る.

今回扱う問題と関連する分野の研究を以下に述べる．被除多項式が固定され，さらに一変数かつ線型（$x-\gamma$ の形）という限定された状況では，問題は γ を零点とする係数が誤差内の多項式が存在するか否かの判定と言い換えられ，この最適化版を扱ったものに [22] などがある．この問題を一般化した，与えられた領域 $D \subset \mathbb{C}$ 内に零点を持つ係数の誤差が最小の多項式を求める問題については，2-ノルムの場合は [5] など，∞-ノルムの場合には [20] などがある．また，与えられた多項式 $p(\mathbf{x})$ に対し，因数分解可能な $p(\mathbf{x})$ に近い多項式を求める問題については，過剰決定の双線型方程式系の近似解を求める問題として解く [6] の研究が知られている.

2 区間多項式

2.1 定義

まず，区間多項式について，記法，用語，必要な性質の説明をする（さらなる詳細については，[4] を参照のこと）．簡単のため，変数 $x_1, \ldots, x_k$ をまとめて $\mathbf{x}$ と書き，また $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ として，$\mathbf{x}^\alpha$ は $x_1^{\alpha_1} \cdots x_k^{\alpha_k}$ のこととする．また，単位行列を I で表す.

定義 1 (区間多項式) $i = 1, \ldots, n$ について，$e_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}[\mathbf{x}]$ を非零多項式，また $l_i, h_i \in \mathbb{R}$ は $(l_i, h_i) \neq (0,0)$ であるとする．多項式の連続集合

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} c_i e_i(\mathbf{x}) \;\middle|\; l_i \leq c_i \leq h_i \right\} \subset \mathbb{R}[\mathbf{x}]$$

を区間多項式と呼び，区間多項式の係数として現れる区間数 $[l_i, h_i] = \{c_i \in \mathbb{R} \mid l_i \leq c_i \leq h_i\}$ を特に区間係数と呼ぶ．区間数および区間多項式全体の集合をそれぞれ $\mathbb{IR}$，$\mathbb{IR}[\mathbf{x}]$ で表す.

各区間 $[l_i, h_i] \in \mathbb{IR}$ 中に含まれる値 c_i を定めることで，通常の多項式が得られる．区間 $[l_i, h_i]$ について，その中心を $\mathrm{mid}([l_i, h_i]) = (h_i + l_i)/2$，半径を $\mathrm{rad}([l_i, h_i]) = (h_i - l_i)/2$ と表す．これらの定義は区間数をベクトル $\mathbb{IR}^n$ や行列 $\mathbb{IR}^{m \times n}$ に拡張したものに対しても自然に定義される.

続いて，通常の多項式における因子の概念を拡張した，区間多項式の擬因子を定義する.

定義 2 (擬因子) $a_1, \ldots, a_s, b_1, \ldots, b_t$ を区間数，$P = \sum_{i=1}^{s} a_i e_i(\mathbf{x})$，$F = \sum_{j=1}^{t} b_j d_j(\mathbf{x})$ をそれぞれ区間多項式であるとする．区間多項式 P, F に含まれる通常の多項式 $p \in P$，$f \in F$ について，p が f で割り切れるような p，f が存在するとき，F は P の擬因子であるという.

この定義は [19] のものを，除多項式 f も区間多項式 F に拡張したものである．

2.2 問題の定式化

区間多項式 $P=\sum_{i=1}^{s} a_i e_i(\mathbf{x})$ および $F=\sum_{j=1}^{t} b_j d_j(\mathbf{x})$ が与えられたとき，以下の問題を考える．

問題 2 F は P の擬因子であるか？

問題 2 を連立代数方程式の可解性判定問題に変形するため，各区間係数 $a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t$ をシンボルと見なし，P を F で割った剰余を考える．P, F それぞれについて，式を展開して項順序 $>$ に従って並べなおしたものを $P=\sum_{\alpha} f_{\alpha}(a_1,\ldots,a_s)\cdot\mathbf{x}^{\alpha}$，$F=\sum_{\alpha} g_{\alpha}(b_1,\ldots,b_t)\cdot\mathbf{x}^{\alpha}$ と書き，P を F で割った剰余多項式 $P'=\mathrm{rem}(P,\,F)$ を

$$P'=\sum_{\alpha} c_{\alpha}(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)\cdot\mathbf{x}^{\alpha}$$

と書く．ここで，除多項式 F の頭項の区間係数は 0 を含まないものとする．このとき，問題 2 は以下のように書き換えられる．

問題 3 P を F で割って得られる剰余多項式 P' について，$P'=0$ であるか？

$P'=0$ という条件は，P' の α についての全ての係数 $c_{\alpha}(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)$ が同時に 0 になる $a_1,\ldots,a_s$, $b_1,\ldots,b_t$ の値が存在することであると言える．よって，問題 2 は以下のような連立代数方程式の可解性判定として書き表される．

問題 4 連立代数方程式

$$\{c_{\alpha}(a_1,\ldots,a_s,b_1,\ldots,b_t)=0 \mid \mathbf{x}^{\alpha}\in P'\}$$

について，$l_i\le a_i\le h_i$ かつ $l'_j\le b_j\le h'_j\quad(i=1,\ldots,s;\ j=1,\ldots,t)$ を満たす解が存在するか？

3 非線型方程式の可解性判定

3.1 区間ニュートン法アルゴリズム

この章以降では，解くべき問題を元々の問題である整除性判定（問題 2）の代わりに，それと等価である連立非線型代数方程式の可解性判定（問題 4）として扱う．連立方程式系の変数を $\mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)$，制約を $\mathbf{f}=(f_1,\ldots,f_m)$ と書き直すことで，問題は以下のように定式化される．

$$\begin{aligned}
&\text{find} && \mathbf{c}=(c_1,\ldots,c_n)\\
&\text{s.t.} && f_j(\mathbf{c})=0\quad(j=1,\ldots,m)\\
& && l_i\le c_i\le h_i\quad(i=1,\ldots,n)
\end{aligned}\tag{1}$$

以後，方程式系の変数の個数を n，制約の個数を m で表す．この章では解が高々有限個となる $m\ge n$ の場合について説明し，$m<n$ となり解が無数に存在する場合は 4 章で扱う．

1 章でも述べたように，この問題の解を代数的手法により求めることは難しい．そこで，区間ニュートン法を用いて解が存在する範囲を徐々に狭め，解をそれが含まれる十分小さい超直方体の領域として出力する手法を適用する．

まず，区間ニュートン法の概要について以下で述べる（詳細については [4] を参照のこと）．ステップ中の解が点ではなく区間であることを明記して $\mathbf{c}^{\mathbf{I}} \in \mathbb{IR}^n$ と書き，領域中に含まれる 1 点 $\mathbf{c} \in \mathbf{c}^{\mathbf{I}}$ と区別して表す．区間ニュートン法のステップを表す式は以下のように与えられる．

$$\mathbf{0} = \mathbf{f}(\mathbf{c}) + \mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}}) \cdot (\mathbf{d}^{\mathbf{I}} - \mathbf{c}) \tag{2}$$

$\mathbf{c}$ は $\mathbf{c}^{\mathbf{I}}$ 中の任意に選んだ 1 点であるが，通常は中心点 $\mathrm{mid}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ とする．また，$\mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}}) \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ は $\mathbf{f}$ のヤコビアンであり，引数の $(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ は $\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}^{\mathbf{I}}$ がともに用いられることを表している．具体的には

$$J_{ij}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}}) \quad = \quad \frac{\partial f_i}{\partial c_j}(c_1^{\mathbf{I}}, \ldots, c_j^{\mathbf{I}}, c_{j+1}, \ldots, c_n) \qquad (i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$$

と定義される．上式の各引数について，c_i となっている箇所は区間中の 1 点を，$c_i^{\mathbf{I}}$ となっている箇所は区間を代入することで，$\mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ は区間数を要素とする行列として得られる．区間の上下界の評価にはアフィン演算 [1] および最良演算 [11] を用いる．このように一部の変数を区間から点に置き換えることで，すべての変数に区間数を代入することで得られる区間行列 $\mathbf{J}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ よりも行列の各要素の区間の拡がりを抑えられる．

式 (2) において，$\mathbf{c}, \mathbf{f}(\mathbf{c}), \mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ の値は既知であるため，$\mathbf{d}^{\mathbf{I}}$ は区間線型方程式を解くことで得られる．しかし，区間線型方程式の解となる領域そのものを求める問題は NP 困難である [21] ため，解をその中に含む直方体の領域を後述の区間ガウスの消去法を用いて求め，それを式 (2) の緩和解とする．

区間ガウスの消去法を適用する前に，区間行列の正規化を行う．区間行列 $\mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}})$ の各要素について，区間である場合には中点で置き換えた行列を $\mathbf{J}$ の中点行列といい，$\mathrm{mid}(\mathbf{J}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ で表す．行列 $\mathbf{M}^c = \mathbf{B} \cdot \mathrm{mid}(\mathbf{J})$ について，$M_{ii}^c = 1$，それ以外の要素が 0 になるような $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ をかけることを正規化と呼ぶ．$\mathbf{M}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}})$，$\mathbf{r}(\mathbf{c}) = -\mathbf{B} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{c})$ と置くと，式 (2) を正規化した結果は

$$\mathbf{M}(\mathbf{c}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}}) \cdot (\mathbf{d}^{\mathbf{I}} - \mathbf{c}) = \mathbf{r}(\mathbf{c}) \tag{3}$$

と表される．こうして得られた区間線型多項式に対し，以下の区間ガウスの消去法を適用する．これにより，区間線型方程式の解全体をその中に含む領域が得られる．

アルゴリズム 1 ([2]，区間ガウスの消去法)
入力：区間行列 $\mathbf{A}^{\mathbf{I}} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ および区間ベクトル $\mathbf{b}^{\mathbf{I}} \in \mathbb{IR}^m$ $(m \geq n)$
出力：ある $A \in \mathbf{A}^{\mathbf{I}}$, $b \in \mathbf{b}^{\mathbf{I}}$ が存在し，$Ax = b$ を満たす解 x の集合を含む直方体領域 $\mathbf{x}^{\mathbf{I}}$
for $k = 1$ *to* $n - 1$
  for $i = k + 1$ *to* m
    $c_{ik}^{\mathbf{I}} = a_{ik}^{\mathbf{I}^k} / a_{kk}^{\mathbf{I}^k}$
    for $j = i + 1$ *to* n
      $a_{ij}^{\mathbf{I}^{k+1}} = a_{ij}^{\mathbf{I}^k} - c_{ik}^{\mathbf{I}} a_{kj}^{\mathbf{I}^k}$
    $b_i^{\mathbf{I}^{k+1}} = b_i^{\mathbf{I}^k} - c_{ik}^{\mathbf{I}} b_k^{\mathbf{I}^k}$
$x_n^{\mathbf{I}} = [-\infty, +\infty]$
for $i = m$ *downto* n
  $x_n^{\mathbf{I}} = x_n^{\mathbf{I}} \cap (b_i^{\mathbf{I}^i} / a_{in}^{\mathbf{I}^i})$
for $i = n - 1$ *downto* 1
  $x_i^{\mathbf{I}} = (b_i^{\mathbf{I}^i} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}^{\mathbf{I}^i} x_j^{\mathbf{I}}) / a_{ii}^{\mathbf{I}^i}$

区間線型方程式 (3) を，反復ステップによって現在の領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ から次の領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ を求めるための式であることを明示して以下のように書き換える．

$$\mathbf{M}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}) \cdot \left(\mathbf{N}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}) - \mathbf{c}^{(k)}\right) = \mathbf{r}(\mathbf{c}^{(k)}) \tag{4}$$

このもとで，新たな領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ は現在の領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ と $\mathbf{N}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}})$ の共通部分

$$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}} = \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}} \cap \mathbf{N}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}) \tag{5}$$

として得られる．明らかに，式 (4), (5) の反復ステップにおいて $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}} \subseteq \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ が成立する．

3.2 アルゴリズムの終了条件

前節の反復において領域は単調非増加であるが，アルゴリズムが有限の反復回数で終了するためには適切な終了条件を設定する必要がある．具体的には，各ステップの終了時において

1. 解が存在しないと判定する条件．解を含む区間が発見されないまま探索領域が縮小し，空になった時
2. 現在の領域中に解が存在すると判定する条件．これが満たされるとき，その領域を解として出力する
3. 現在の領域中に唯一の解が存在すると判定する条件

の判定を行う．また，一回のステップにより領域が変化しない，つまり $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}} = \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ となる場合は，現在の領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ を分割し，各々の部分領域に対し反復アルゴリズムを実行する．

上記の各条件は，以下の定理により与えられる．

定理 1 ([4]) $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ から $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ を得るステップにおいて，切り捨てられた領域 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}} \setminus \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ 中に $\mathbf{f}$ の零点は存在しない．

系 1 、$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ から $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ を得るステップにおいて，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}} = \emptyset$ であるとき，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ 中に $\mathbf{f}$ の零点は存在しない．

一方，範囲 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ の中に $\mathbf{f}$ の零点が含まれることを保証する規準は，ブラウアーの不動点定理より以下で与えられる．

定理 2 ([4]) $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ から $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ を得るステップにおいて，$\mathbf{N}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}) \subseteq \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ であるとき，$\mathbf{f}$ の零点は $\mathbf{N}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}})$ 中に存在する

次に，範囲 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ の中に $\mathbf{f}$ の零点が唯一含まれていることを保証する規準を与える．

定義 3 ([4]，区間行列のノルム) 区間行列 $\mathbf{A}^{\mathbf{I}} \in \mathbb{IR}^{m\times n}$ について，各要素 $a_{ij}^{\mathbf{I}} = [l_{ij}, h_{ij}]$ の絶対値 $|a_{ij}^{\mathbf{I}}|$ を $\max(|l_{ij}|, |h_{ij}|)$ とする． このとき，$\mathbf{A}^{\mathbf{I}}$ のノルム $||\mathbf{A}^{\mathbf{I}}||$ を以下で定める．

$$||\mathbf{A}^{\mathbf{I}}|| = \max_i \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}^{\mathbf{I}}|$$

定理 3 ([4]) $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}}$ から $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ を得るステップにおいて，定理 *2* の条件が成り立ち，さらに

$$R^{(k)} = I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{c}^{(k)}, \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k)}})$$

について，$||R^{(k)}|| < 1$ が成り立つとき，$\mathbf{f}$ は $\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{(k+1)}}$ 内に唯一の零点を持つ．

連立代数方程式 (1) が解を持つか判定するだけであれば，定理 2 により解の存在を判定すれば十分であるが，領域中の全ての解を列挙したい場合は，定理 3 と領域の分割を併用して行う．

以上から，$m \geq n$ の場合に非線型代数方程式 (1) の全ての解を列挙するアルゴリズムは以下で表わされる．

アルゴリズム 2
入力： 多項式の集合 $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = (f_1, \ldots, f_m)$ および $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ の初期領域 $\mathbf{c^I}_{init}$
出力： $\mathbf{f}$ の零点を含む区間のリスト，解が存在しないとき空集合を返す
1. $L = \{\mathbf{c^I}_{init}\}$ とする
2. L から要素を *1* つ取り出し，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k=0)}$ とする．存在しない場合はアルゴリズムを終了する
3. $\mathbf{f}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k)})$ をアフィン演算を用い評価し，原点を含まない場合，解は存在しない． *2.* に戻る
4. $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k)}$ をもとに $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k+1)}$ を，正規化および区間ガウスの消去法により得る
5. $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k+1)} = \emptyset$ であるとき，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}(0)}$ に解は存在しない．*2.* に戻る
6. $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k+1)} = \mathbf{c}^{\mathbf{I}(k)}$ であるとき，区間 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k)}$ を *2* つに分割し，それぞれを L に入れて *2.* に戻る
7. $\mathbf{N}(\mathbf{c}, \mathbf{c^I}) \subseteq \mathbf{c}^{\mathbf{I}(k)}$ かつ $||R^{(k)}|| < 1$ を満たすとき，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k+1)}$ 中に $\mathbf{f}$ の零点は唯一存在する．解として区間 $\mathbf{c}^{\mathbf{I}(k+1)}$ を出力し，*2.* に戻る．そうでないとき，k の値を 1 増やして *3.* に戻る

4 方程式系の解が無数に存在する場合

4.1 基底変数を設定した解法

連立代数方程式 (1) において $m < n$ が成り立つ時，解は無数に存在するため，前節の手法によりすべての解を列挙することはできない．

そこで，変数集合 $\mathrm{var}(\mathbf{c}) = \{c_1, \ldots, c_n\}$（ただし $m < n$，また領域中の 1 点 $\mathbf{c}$ と区別するために $\mathrm{var}(\mathbf{c})$ と表す）を基底変数 $\mathrm{var}(\mathbf{c}_b) = \{c_{i_1}, \ldots, c_{i_m}\} \subset \mathrm{var}(\mathbf{c})$ と非基底変数 $\mathrm{var}(\mathbf{c}_{nb}) = \mathrm{var}(\mathbf{c}) \setminus \mathrm{var}(\mathbf{c}_b)$ に分け,「非基底変数の値 $\mathbf{c}_{nb} \in \mathbf{c^I}_{nb}$ を固定すると，基底変数 $\mathbf{c}_b$ の解が一意に定まる」領域を列挙することで，結果すべての解を包含する区間の集合を得る．この手法は文献 [8] に基づく．

アルゴリズムは 2 つの局面からなる．まず前半で基底変数を取り換えつつ領域を絞り,「任意の $\mathbf{c}_{nb} \in \mathbf{c^I}_{nb}$ に対し，非基底変数をその値に固定した m 変数 m 制約連立方程式は唯一つの解を持つ」ところまで狭める．可解性判定のためにはここまでで十分であるが，より精密な領域を得たい場合は後半のステップを適用する．後半では前半で得られた各領域に対し，基底変数を固定したまま，全ての領域の半径のノルムが任意に定めた値 δ より小さい領域の集合を得る．

アルゴリズム 3
入力： 多項式の集合 $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = (f_1, \ldots, f_m)$ および $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ の初期領域 $\mathbf{c^I}_{init}$，閾値 $\delta > 0$
出力： $\mathbf{f}$ の零点を含む区間のリスト，解が存在しないとき空集合を返す
前半：
1. $L = \{\mathbf{c^I}_{init}\}$ とする
2. L から要素を *1* つ取り出し，これを $\mathbf{c^I}$ とする．存在しない場合は後半へ
3. $\mathbf{f}(\mathbf{c^I})$ をアフィン演算を用い評価し，原点を含まない場合，解は存在しない． *2.* に戻る
4. 基底変数 $\mathrm{var}(\mathbf{c}_b) \subset \mathrm{var}(\mathbf{c})$ を適切に選ぶ
5. 選んだ基底のもとで，区間 $\mathbf{c^I} = \mathbf{c^I}_b \times \mathbf{c^I}_{nb}$ に対する写像 $\mathbf{N}(\mathbf{c}, \mathbf{c^I}) : \mathbb{IR}^n \to \mathbb{IR}^m$ を

$$\begin{aligned} M &= I - \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}_b(\mathbf{c}, \mathbf{c^I}) \\ \mathbf{N}(\mathbf{c}, \mathbf{c^I}) &= \mathbf{c}_b - \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}(\varepsilon\mathbf{c^I}_b, \mathbf{c^I}_{nb}) + M \cdot (\mathbf{c^I}_b - \mathbf{c}_b) \end{aligned}$$

で定める．ここで $\varepsilon\mathbf{c^I}_b$ とは中心が $\mathbf{c}_b = \mathrm{mid}(\mathbf{c^I}_b)$，半径が $\varepsilon \cdot \mathrm{rad}(\mathbf{c^I}_b)$ なる領域であり，また区間行列 $\mathbf{J}_b$ は $\mathbf{J}$ の基底変数に対応する列を抜き出した正方行列であり，$\mathbf{B} = \mathrm{mid}(\mathbf{J}_b)^{-1}$ とする．
6. $||M|| < 1$ かつ $\mathbf{N}(\mathbf{c}, \mathbf{c^I}) \subset \mathbf{c^I}_b$ が成立するならば，任意の $\mathbf{c}_{nb} \in \mathbf{c^I}_{nb}$ に対して $\mathbf{f}(\mathbf{c}_b, \mathbf{c}_{nb}) = \mathbf{0}$ を満たす

$\mathbf{c}_b \in \mathbf{c^I}_b$ が唯一つ存在する．$(\mathbf{c^I}_b, \mathbf{c^I}_{nb})$ をリスト S に入れる

7. *6.* の条件が成り立たない場合，区間 $\mathbf{c^I}$ を任意に分割し，それぞれを L に入れて *2.* に戻る

後半：

1. S から要素を *1* つ取り出し，$(\mathbf{c^I}_b, \mathbf{c^I}_{nb})$ とする．存在しない場合はアルゴリズムを終了する

2. 有理数行列 κ を $||\kappa + |M|\,|| < 1$ を満たすように定める．ただし，$|M|$ は区間行列 M の各要素の区間の絶対値を要素に持つ行列である

3. m 次元有理数ベクトル p, q を $p + q \leq \kappa \cdot \mathrm{rad}(\mathbf{c^I}_b)$ を満たすよう定める

4. $R = \mathbf{B} \cdot \mathbf{f}(\varepsilon \mathbf{c^I}_b, \mathbf{c^I}_{nb})$ を計算する

5. $\mathrm{rad}(R) \geq p$ ならば $\mathbf{c^I}_{nb}$ を分割し，各々を S に加えて *1.* に戻る．そうでなければ *6.* へ

6. $\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{I}}_b = \mathbf{c}_b - R + M \cdot (\mathbf{c^I}_b - \mathbf{c}_b)$ を計算し，$||\mathrm{rad}(\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{I}}_b)|| < \delta$ ならばそれを出力して *1.* に戻る．そうでなければ $\tilde{\mathbf{c}}^{\mathbf{I}}_b$ を誤差 q 以内で外側に丸め，$\mathbf{c^I}_b$ との共通部分を S に加えて *1.* に戻る

実行例を以下に示す.

例 1 区間多項式を $P = x^3 + [l_0, h_0]x^2 + 1/2$, $F = x^2 - [l_1, h_1]x - [l_2, h_2]$, 区間の範囲を $[l_0, h_0] = [l_1, h_1] = [l_2, h_2] = [-1, 1]$ とする.

このとき $P' = ([l_1, h_1]^2 + [l_0, h_0][l_1, h_1] + [l_2, h_2]) \cdot x + [l_1, h_1][l_2, h_2] + [l_0, h_0][l_2, h_2] + 1/2$ より多項式系は

$$\begin{aligned} c_1^2 + c_0c_1 + c_2 &= 0 \\ c_1c_2 + c_0c_2 + 1/2 &= 0 \\ -1 \leq c_0, c_1, c_2 &\leq 1 \end{aligned}$$

となる．これの区間内の解は $(-0.293, 1, -0.707)$ から $(1, 0.297, -0.385)$ へ通り抜ける曲線全体となる．これに対しアルゴリズム *3* を適用した結果，非基底変数を c_0 として任意の $c_0 \in [0.875, 1]$ に対し，基底変数 (c_1, c_2) の唯一の解が $([0.25, 0.5], [-0.5, 0])$ 内に存在することが分かる．さらに $\delta = 0.05$ として (c_1, c_2) の範囲を狭めることで，(c_1, c_2) の解は $([0.267, 0.364], [-0.430, -0.354])$ 内に存在することが分かり，実際これは真の解領域 $([0.297, 0.339], [-0.411, -0.385])$ をその中に含んでいる.

4.2 2-ノルムのもとでの最適化

これまでは与えられた直方体の空間内に解が存在するかという，言わば ∞-ノルム上の問題を扱ってきたが，これに対しユークリッドノルムのもとで中心からの誤差が最も小さい解を求める問題を考える．この問題は最適化問題であり，以下のように定式化される.

$$\begin{array}{ll} \min & \sum_{i=1}^{n} \left(c_i - (h_i + l_i)/2\right)^2 \\ \text{s.t.} & f_j(\mathbf{c}) = 0 \quad (j = 1, \ldots, m) \\ & l_i \leq c_i \leq h_i \quad (i = 1, \ldots, n) \end{array} \tag{6}$$

式 (6) の解を得るための手段として，KKT 条件を一般化した John 条件がある．これは制約 $\mathbf{f}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ および目的関数 $g(\mathbf{c})$ が与えられたとき，目的関数が極小となる条件を表すものであり，

$$\begin{aligned} u + \sum_j E_j v_j &= 0 \\ u \frac{\partial g}{\partial c_i}(\mathbf{c}) + \sum_j v_j \frac{\partial f_j}{\partial c_i}(\mathbf{c}) &= 0 \\ f_j(\mathbf{c}) &= 0 \end{aligned} \tag{7}$$

で表される．$E_i \in [1, 1+\epsilon]$（ϵ は非常に小さい正の数），$u \geq 0$ とする．上記 (7) において，上段の式は変数 $u, v_1, \ldots, v_m$ の正規化条件，中段の式は $g(\mathbf{c})$ が極値である条件，下段の式はもとの制約に対応する．

この方程式系 (7) の変数および制約の個数はともに $m+n+1$ となり，解は有限個となる．よって，$g(\mathbf{c})$ を最小にする $\mathbf{c}$ を求めるには，十分広くとった初期領域内の (7) の解をすべて求め，各々の解について目的関数の値を計算し，最小のものを選べばよい．

5 モード区間解析を用いた手法

5.1 モード区間の定義

ここでは，従来の区間解析とモード区間解析の主な違いについて述べる．まず，$[a,b]$ に対して $a > b$ なるものも認めた区間（以後，モード区間と書く）全体の集合を $\mathbb{KR}$ と書く．区間 $[a,b] \in \mathbb{KR}$ について，$a \leq b$ であるとき proper と呼びその全体の集合を $\mathbb{IR}$ と表し，$a > b$ であるとき improper と呼びその全体の集合を $\overline{\mathbb{IR}}$ と表す．また，$[a,b] \in \mathbb{KR}$ の中心を $\mathrm{mid}([a,b]) = (a+b)/2$，半径を $\mathrm{rad}([a,b]) = |b-a|/2$ と表す．

続いて，モード区間に特有の操作を導入する．$\mathrm{pro}([a,b]) = [\min(a,b), \max(a,b)]$，$\mathrm{imp}([a,b]) = [\max(a,b), \min(a,b)]$，$\mathrm{dual}([a,b]) = [b,a]$ と定義する．また，モード区間の間の包含関係を $[a,b] \subseteq [a',b'] \Leftrightarrow (a' \leq a) \wedge (b \leq b')$ で定める．従来の区間と同様，これらの定義はベクトル $\mathbb{KR}^n$ や行列 $\mathbb{KR}^{m\times n}$ に拡張したものについても同様に定義される．

このもとで，モード区間線型方程式 $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} = \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解を，$\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \subseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ かつ $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \supseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ を満たす $\mathbf{x}^\mathbf{I}$ として定義する．この解を求めるための反復アルゴリズムを以下に示す．収束条件を満たすとき，十分な反復回数の後にアルゴリズム 4 は $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} = \mathbf{b}^\mathbf{I}$ なる解を返す．この結果は通常の区間解析における区間ガウスの消去法（アルゴリズム 1）によるものとは異なることに注意する．

定理 4 ([23]) $\mathbf{A}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^{n\times n}, \mathbf{b}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^n, \mathbf{x}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^n$ に対し，ヤコビ区間演算子 $\mathfrak{J}$ を

$$\mathfrak{J}(x_i^\mathbf{I}) = \frac{b_i^\mathbf{I} - \sum_{i\neq j} \mathrm{dual}(a_{ij}^\mathbf{I}) \cdot \mathrm{dual}(x_j^\mathbf{I})}{\mathrm{dual}(a_{ii}^\mathbf{I})} \qquad (0 \notin a_{ii}^\mathbf{I},\ i = 1, \ldots, n)$$

で定める．このとき以下が成立する．

1. $\mathbf{x}^\mathbf{I}$ が $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \subseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解ならば，$\mathfrak{J}(\mathbf{x}^\mathbf{I})$ は $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \supseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解

2. $\mathbf{x}^\mathbf{I}$ が $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \supseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解ならば，$\mathfrak{J}(\mathbf{x}^\mathbf{I})$ は $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \subseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解

アルゴリズム 4 (モード区間線型方程式の求解)
入力： $\mathbf{A}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^{n\times n}, \mathbf{b}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^n$
出力： モード区間線型方程式 $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} = \mathbf{b}^\mathbf{I}$ の解となる $\mathbf{x}^\mathbf{I} \in \mathbb{KR}^n$
1. $\mathrm{imp}(\mathbf{A}^\mathbf{I}) \cdot \mathbf{y}^\mathbf{I} \subseteq \mathrm{pro}(\mathbf{b}^\mathbf{I})$ を満たす $\mathbf{y}^\mathbf{I}$ を，通常の線型方程式 $\mathrm{mid}(\mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathrm{mid}(\mathbf{b})$ を解いて得る
2. $\mathbf{x}^{\mathbf{I}^{(0)}} = \mathfrak{J}(\mathbf{y}^\mathbf{I})$ とする．このとき $\mathbf{A}^\mathbf{I}\mathbf{x}^\mathbf{I} \supseteq \mathbf{b}^\mathbf{I}$ が成立
3. $\mathbf{x}^{\mathbf{I}^{(k)}} = \mathfrak{J}(\mathbf{x}^{\mathbf{I}^{(k-1)}})$ を十分収束するまで繰り返す

5.2 モード区間と量化制約充足問題との関係

ここでは，連立方程式 (1) が $m \leq n$ を満たすとき，その解を含む領域の集合をモード区間解析を用いて得る手法について説明する．4.1 章と同じく変数を基底変数 $\mathrm{var}(\mathbf{c}_b)$ と非基底変数 $\mathrm{var}(\mathbf{c}_{nb})$ に分け，

$\mathbf{f}:\mathbb{KR}^{n-m}\times\mathbb{KR}^{m}\to\mathbb{KR}^{m}$ がつくる非線型系 $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{nb},\mathbf{c}_b)=\mathbf{0}$（ただし $\mathbf{c}_{nb}\in\mathbb{KR}^{n-m}$，$\mathbf{c}_b\in\mathbb{KR}^{m}$）の解を含む領域 $(\mathbf{c^I}_{nb},\mathbf{c^I}_b)$ を，量化区間制約充足問題

$$(\forall\mathbf{c}_{nb}\in\mathbf{c^I}_{nb})\,(\exists\mathbf{c}_b\in\mathbf{c^I}_b)\,(\mathbf{f}(\mathbf{c}_b,\mathbf{c}_{nb})=\mathbf{0})$$

を解くことで得ることを考える．まず，非線型系の解全体を包む領域を見積もるための Hansen-Sengupta 演算子を導入する．

定義 4 (Hansen-Sengupta 演算子 [23]) 従来の区間線型方程式 $\mathbf{A^I x^I}=\mathbf{b^I}$ を解く際に用いる区間ガウス-ザイデル演算子を，

$$\Gamma(\mathbf{A^I},\mathbf{b^I},x_i^{\mathbf{I}})=\frac{b_i^{\mathbf{I}}-\sum_{i\neq j}a_{ij}^{\mathbf{I}}\cdot x_j^{\mathbf{I}}}{a_{ii}^{\mathbf{I}}}\cap x_i^{\mathbf{I}}\qquad(0\notin a_{ii}^{\mathbf{I}},\ i=1,\ldots,n)$$

で定める．このもとで Hansen-Sengupta（以下 HS）演算子は，

$$\mathrm{H}(\mathbf{f},\mathbf{J},C,\mathbf{x^I},\mathbf{x}_0)=\mathbf{x}_0+\Gamma(C\mathbf{J},-C\mathbf{f}(\mathbf{x}_0),\mathbf{x^I}-\mathbf{x}_0)$$

で与えられる．ここで $\mathbf{x}_0\in\mathbf{x^I}$，$\mathbf{J}$ は $\mathbf{f}$ のヤコビアンを評価したもの，C は前処理行列 $\mathrm{mid}(\mathbf{J})^{-1}$ である．

これをモード区間解析に拡張し，以下の 2 つのアルゴリズムにおいて用いる．これらのアルゴリズムは互いに双対の関係にある．

アルゴリズム 5 (proper transform HS の適用，[23])
入力： 多項式の集合 $\mathbf{f}(\mathbf{c})=(f_1,\ldots,f_m)$ および非基底変数の領域 $\mathbf{c^I}_{nb}$
出力： 任意の $\mathbf{c}_{nb}\in\mathbf{c^I}_{nb}$ に対し，ある $\mathbf{c}_b\in\mathbf{c^I}_b$ が存在して $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{nb},\mathbf{c}_b)=\mathbf{0}$ となる区間 $\mathbf{c^I}_b$
1. 任意の $\mathbf{c}_{nb}\in\mathbf{c^I}_{nb}$ に対しある $\mathbf{c}_b\in\mathrm{pro}(\mathbf{c^I}_b)$ が存在して $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{nb},\mathbf{c}_b)=\mathbf{0}$ となる領域 $\mathbf{c^I}_b$ を見積もり，初期領域とする
2. $\mathbf{J}_{nb}=\mathrm{pro}(\partial f/\partial c_{nb})$，$\mathbf{J}_b=\mathrm{pro}(\partial f/\partial c_b)$，$C=\mathrm{mid}(\mathbf{J}_b)^{-1}$，$\mathbf{c}^c_{nb}=\mathrm{mid}(\mathbf{c^I}_{nb})$，$\mathbf{c}^c_b=\mathrm{mid}(\mathbf{c^I}_b)$，$\mathbf{A^I}=C\cdot\mathrm{pro}(\mathbf{J}_b)$，および $\mathbf{b^I}=C\cdot[-\mathbf{f}(\mathbf{c}^c_{nb},\mathbf{c}^c_b)-\mathrm{dual}\,(\mathrm{pro}(\mathbf{J}_{nb})\cdot(\mathbf{c^I}_{nb}-\mathbf{c}^c_{nb}))]$ を計算する
3. $\mathbf{A^I x^I}=\mathbf{b^I}$ の解区間 $\mathbf{x^I}$ をアルゴリズム *4* を用いて求め，$\mathbf{c^I}_b=\mathbf{x^I}+\mathbf{c}^c_b$ とする
4. $\mathbf{c^I}_b$ が十分に収束していなければ，*2.* に戻りアルゴリズムを続行する

アルゴリズム 6 (improper transform HS の適用，[23])
入力： 多項式の集合 $\mathbf{f}(\mathbf{c})=(f_1,\ldots,f_m)$ および非基底変数の領域 $\mathbf{c^I}_{nb}$
出力： 任意の $\mathbf{c}_{nb}\in\mathbf{c^I}_{nb}$ に対し，ある $\mathbf{c}_b\in\mathbf{c^I}_b$ が存在して $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{nb},\mathbf{c}_b)=\mathbf{0}$ となる区間 $\mathbf{c^I}_b$
1. 任意の $\mathbf{c}_{nb}\in\mathbf{c^I}_{nb}$ に対しある $\mathbf{c}_b\in\mathrm{pro}(\mathbf{c^I}_b)$ が存在して $\mathbf{f}(\mathbf{c}_{nb},\mathbf{c}_b)=\mathbf{0}$ となる領域 $\mathbf{c^I}_b$ を見積もり，初期領域とする
2. $\mathbf{J}_{nb}=\mathrm{pro}(\partial f/\partial c_{nb})$，$\mathbf{J}_b=\mathrm{pro}(\partial f/\partial c_b)$，$C=\mathrm{mid}(\mathbf{J}_b)^{-1}$，$\mathbf{c}^c_{nb}=\mathrm{mid}(\mathbf{c^I}_{nb})$，$\mathbf{c}^c_b=\mathrm{mid}(\mathbf{c^I}_b)$，$\mathbf{A^I}=C\cdot\mathrm{imp}(\mathbf{J}_b)$，および $\mathbf{b^I}=C\cdot[-\mathbf{f}(\mathbf{c}^c_{nb},\mathbf{c}^c_b)-\mathrm{dual}\,(\mathrm{imp}(\mathbf{J}_{nb})\cdot(\mathbf{c^I}_{nb}-\mathbf{c}^c_{nb}))]$ を計算する
3. $\mathbf{A^I x^I}=\mathbf{b^I}$ の解区間 $\mathbf{x^I}$ をアルゴリズム *4* を用いて求め，$\mathbf{c^I}_b=\mathbf{x^I}+\mathbf{c}^c_b$ とする
4. $\mathbf{c^I}_b$ が十分に収束していなければ，*2.* に戻りアルゴリズムを続行する

定理 5 ([23]) アルゴリズム *5, 6* に対応する量化区間制約充足問題は，それぞれ以下の通りである．ここで，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_b,\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_{nb}$ とはそれぞれ $\mathbf{c^I}_b,\mathbf{c^I}_{nb}$ のうち *proper* である要素のみを取ってきた部分集合，$\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_b,\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_{nb}$ とはそれぞれ $\mathbf{c^I}_b,\mathbf{c^I}_{nb}$ のうち *improper* である要素のみを取ってきた部分集合である．

1. *proper transform HS* を適用する場合,

$$(\forall \mathbf{c}_{nb} \in \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_{nb})\,(\forall \mathbf{c}_{b} \in \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_{b})\,(\exists J \in \mathbf{J})\,(\exists \mathbf{c}_{nb} \in \mathrm{pro}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_{nb})\,)\,(\exists \mathbf{c}_{b} \in \mathrm{pro}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_{b})\,)\,(\mathbf{f}(\mathbf{c}_b, \mathbf{c}_{nb}) = \mathbf{0})$$

2. *improper transform HS* を適用する場合,

$$(\forall \mathbf{c}_{nb} \in \mathrm{pro}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_{nb})\,)\,(\forall \mathbf{c}_{b} \in \mathrm{pro}(\mathbf{c}^{\mathbf{I}^{imp}}_{b})\,)\,(\exists J \in \mathbf{J})\,(\exists \mathbf{c}_{nb} \in \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_{nb})\,(\exists \mathbf{c}_{b} \in \mathbf{c}^{\mathbf{I}^{pro}}_{b})\,(\mathbf{f}(\mathbf{c}_b, \mathbf{c}_{nb}) = \mathbf{0})$$

5.3 実験結果

前節で述べた手法を, 4.1 節の例 1 に対して適用する.

例 2 (例 1 の続き) 基底変数を $\{c_1, c_2\}$, 非基底変数を $\{c_0\}$ とする. このとき任意の $c_0 \in [0.875, 1]$ に対して解 (c_1, c_2) が存在する範囲 $(c_1^{\mathbf{I}}, c_2^{\mathbf{I}})$ を求める量化区間制約充足問題は, 以下の式により表される.

$$\big(\forall c_0 \in [0.875, 1]\big)\ \big(\exists (c_1, c_2) \in (c_1^{\mathbf{I}}, c_2^{\mathbf{I}})\big)\ \big(\mathbf{f}(c_0, c_1, c_2) = \mathbf{0}\big)$$

ただし $\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (c_1^2 + c_0c_1 + c_2,\ c_1c_2 + c_0c_2 + 1/2)$ である. これに対し,

- *proper transform HS* (アルゴリズム *5*) を適用する場合, $\mathbf{c^I}_{nb}$ の領域として *improper* な区間 $[1, 0.875]$ を与える. 出力として, *proper* な区間 $([0.294, 0.340], [-0.419, -0.376])$ が得られる
- *improper transform HS* (アルゴリズム *6*) を適用する場合, $\mathbf{c^I}_{nb}$ の領域として *proper* な区間 $[0.875, 1]$ を与える. 出力として, *improper* な区間 $([0.340, 0.294], [-0.376, -0.419])$ が得られる

よってこれら *2* つのアルゴリズムによる結果は等価なものであり, 真の解領域 $([0.297, 0.339], [-0.411, -0.385])$ を含む区間 $([0.294, 0.340], [-0.419, -0.376])$ が得られる.

6 まとめ

本研究では, 係数に誤差を持つ多項式同士の整除性を, 対応する非線型方程式系の解を区間として求めることで判定する手法を提案し, 適用を行った. 今後の課題としては, 非線型方程式系を多項式最適化問題 (POP) と見なし, 凸最適化問題の 1 つである半正定値計画問題 (SDP) へ緩和して解く手法 ([10, 15] などを参照) と比較した解析を行うことなどが挙げられる.

参 考 文 献

[1] M. V. A. Andrade, J. L. D. Comba and J. Stolfi, "Affine arithmetic," In *Proc. INTERVAL '94*, pp. 36–40, 1994.

[2] A. Frommer, "A Feasibility Result for Interval Gaussian Elimination Relying on Graph Structure," In *Symbolic Algebraic Methods and Verification Methods*, Springer, Wien, pp. 79–86, 2001.

[3] E. Gardenes, M. A. Sainz, L. Jorba, R. Calm, R. Estela, H. Mielgo and A. Trepat, "Modal Intervals," *Reliable Computing*, Vol. 7, Issue. 2, pp. 77–111, 2001.

[4] E. Hansen and G. W. Walster, *Global Optimization Using Interval Analysis: Revised and Expanded*, Marcel Dekker Inc., New York, 2nd Edition, 2003.

[5] M. A. Hitz, E. Kaltofen and Y. N. Lakshman, "Efficient Algorithms for Computing the Nearest Polynomial with a Real Root and Related Problems," In *Proc. ISSAC1999*, pp. 205–212, 1999.

[6] Y. Huang, W. Wu, H. J. Stetter and L. Zhi, "Pseudofactors of Multivariate Polynomials," In *Proc. ISSAC2000*, pp. 161–168, 2000.

[7] 神沢雄智，柏木雅英，大石進一, 中村晴幸，"有限ステップで停止する非線形方程式のすべての解を精度保証付きで求めるアルゴリズム," 信学論 (A), Vol. J80-A, No. 7, pp. 1130-1137, 1997.

[8] 神沢雄智，柏木雅英，大石進一，"パラメータ依存非線形方程式の解を含む区間の反復改良アルゴリズム," 信学論 (A), Vol. J83-A, No. 5, pp. 511–516, 2000.

[9] 柏木雅英，大石進一，"区間解析と有理数演算による非線形方程式の近似解の精度保証," 信学論 (A), Vol. J77-A, No. 10, pp. 1372–1382, 1994.

[10] J. B. Lasserre, "Global Optimization with Polynomials and the Problems of Moments," *SIAM Journal on Optimization*, Vol. 11, pp. 796–817, 2001.

[11] 宮島信也，宮田孝富，柏木雅英，"アフィン演算における最良乗算について," 信学論 (A), Vol. J86-A, No. 3, pp. 232–240, 2003.

[12] S. Miyajima and M. Kashiwagi, "Existence Test for Solution of Nonlinear Systems Applying Affine Arithmetic," *J. Comp. Appl. Math.*, Vol. 199, Issue. 2, pp. 304–309, 2007.

[13] R. E. Moore, "A Test for Existence of Solutions to Nonlinear Systems," *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 47, No. 4, pp. 611–615, 1977.

[14] 中山裕貴，関川浩，"係数に誤差を持つ多項式同士の整除性判定," 情報処理学会アルゴリズム研究会研究報告 2009-AL-122, pp. 67–74, 2009.

[15] P. A. Parrilo, "Semidefinite Programming Relaxation for Semialgebraic Problems," *Mathematical Programming*, Vol. 96, pp. 293–320, 2003.

[16] 佐々木建昭，"近似的代数計算", 京都大学数理解析研究所講究録 676, pp. 307–319, 1988.

[17] T. Sasaki and M-T. Noda, "Approximate Square-free Decomposition and Root Finding of Ill-conditioned Algebraic Equations," *J. Inf. Process.*, Vol. 12, No. 2, pp. 159–168, 1989.

[18] T. Sasaki, M. Suzuki, M. Kolar and M. Sasaki, "Approximate Factorization of Multivariate Polynomials and Absolute Irreducibility Testing," *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, Vol. 8, pp. 357–375, 1991.

[19] H. Sekigawa, "On Real Factors of Real Interval Polynomials," In *Proc. ISSAC2007*, pp. 331–338, 2007.

[20] H. Sekigawa, "The Nearest Polynomial with a Zero in a Given Domain from a Geometrical Viewpoint," In *Proc. ISSAC2008*, pp. 287–294, 2008.

[21] S. P. Shary, "Algebraic Approach to the Interval Linear Static Identification, Tolerance, and Control Problems, or One More Application of Kaucher Aritmetic," *Reliable Computing*, Vol. 2, No. 1, pp. 3–33, 1996.

[22] H. J. Stetter, "The Nearest Polynomial with a Given Zero, and Similar Problems," *ACM SIGSAM Bulletin*, Vol. 33, No. 4, pp. 2–4, 1999.

[23] Y. Wang, "Interpretable Interval Constraint Solvers in Semantic Tolerance Analysis," *Computer-Aided Design and Applications*, Vol. 5, Issue. 5, pp. 654–666, 2008.