数理解析研究所講究録
第 1667 巻 2009 年 80-88

Sharp triangle inequality の等号条件について[1]

三谷健一 (新潟工科大学工学部)
斎藤吉助 (新潟大学理学部)

1 序文

X をバナッハ空間とする. X の中の n 個の元における三角不等式は次のとおりである: $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ に対して

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|.$$

本講演では, この三角不等式の精密化した不等式とその等号条件についての最近の結果を述べることを目的とする. 加藤–斎藤–田村 [6] は次の n 個の元においての精密化した三角不等式を与えた.

定理 A.([6]) X をバナッハ空間とする. X の 0 でない元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \min_{1\leq j\leq n} \|x_j\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} \|x_j\| \\
&\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\|.
\end{aligned}$$

$n = 2$ のとき

定理 B. X をバナッハ空間とする. $\|x\| \geq \|y\|$ なる X の 0 でない元 x, y に対して,

[1] 2000 *Mathematics Subject Classification.* 46B20.

Keywords. triangle inequality. reverse inequality. strictly convex

$$\|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|y\|$$
$$\leq \|x\| + \|y\| \tag{1}$$
$$\leq \|x+y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)\|x\|. \tag{2}$$

定理 B の (1), (2) においては Hudzik-Landes [5] や Maligranda [7] の中で与えられている. また, [3, 13] にあるように精密化した三角不等式の応用として, Dunkl-Williams 不等式の研究がなされている.

三谷–斎藤–加藤–田村 [11] は定理 A で与えられた不等式をさらに精密化した.

定理 1. ([11]) X をバナッハ空間とする. $n \geq 2$ とする. $\|x_1\| \geq \|x_2\| \geq \cdots \geq \|x_n\| > 0$ なる X の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|)$$
$$\leq \sum_{j=1}^{n}\|x_j\| \tag{3}$$
$$\leq \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)\left(\|x_{n-k}\| - \|x_{n-(k-1)}\|\right), \tag{4}$$

ここで, $x_0 = x_{n+1} = 0$.

$n = 2$ のとき, 定理 1 は定理 A(定理 B) と一致する. 我々は初めにこの定理の simple proof を与える. これを示すために, 以下の定理 1a の証明を与える.

定理 1a. ([11]) X をバナッハ空間とする. $n \geq 2$ とする. $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\| > 0$ なる X の元 $x_1, \cdots, x_n$ に対して, 不等式 (3) と (4) が成り立つ.

定理 1a から極限操作を用いることにより, 容易に定理 1 が得られる. さらに, sharp triangle inequality の等号条件を考える. 初めに定理 1a における不等式 (3) と (4) が等号

になるための必要十分条件を示す．さらに，一般の場合（定理 1）のときの等号条件を考え，$n=3$ のときの等号になるための必要十分条件を調べる．

2　定理 1 の別証明

初めに定理 1a の証明を与える．この結果を用いて極限操作をすることにより定理 1 を容易に証明することができる．

定理 1a の証明（概略）． 初めに (3) を帰納法により示す．$n=2$ のときは定理 B と同じである．$n \geq 3$ とする．全ての $n-1$ 個の元で, (3) が成立すると仮定する．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\| > 0$ を満たす元とする．

$$u_j = (\|x_j\| - \|x_n\|)\frac{x_j}{\|x_j\|}$$

とおく．このとき

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = \|x_n\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} + \sum_{j=1}^{n-1} u_j \tag{5}$$

かつ $\|u_1\| > \|u_2\| > \cdots > \|u_{n-1}\| > 0$. 仮定より,

$$\left\|\sum_{j=1}^{n-1} u_j\right\| \leq \sum_{j=1}^{n-1}\|u_j\| - \sum_{k=2}^{n-1}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{u_j}{\|u_j\|}\right\|\right)(\|u_k\| - \|u_{k+1}\|) \tag{6}$$

ここで, $u_n = 0$. (5),(6) を用いることにより, 論文 [11] と同様に行って

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| &\leq \|x_n\|\left\|\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\| + \left\|\sum_{j=1}^{n-1} u_j\right\| \\ &= \sum_{j=1}^{n}\|x_j\| - \sum_{k=2}^{n}\left(k - \left\|\sum_{j=1}^{k}\frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|)\end{aligned}$$

が得られる．よって全ての元に対して (3) が成立する．逆の不等式 (4) も同様に示すことが出来る．

定理 1 の証明（概略）． $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $\|x_1\| \geq \cdots \geq \|x_n\|$ を満たす X の元とする．任意の m に対し，

$$x_{k,m} = \left(1 - \frac{k}{m}\right) x_k, \quad k = 1, 2, \cdots, n$$

とおく．このとき $\|x_{1,m}\| > \|x_{2,m}\| > \cdots > \|x_{n,m}\| > 0$． 定理 1a に $x_{1,m}, \cdots, x_{n,m}$ を代入して，$m \to +\infty$ をすることにより，定理 1 の不等式が得られる．

3 Sharp triangle inequality の等号条件

本章では，狭義凸バナッハ空間においての sharp triangle inequality の等号条件を与える． [6, 8] において，三角不等式やその精密化した不等式の等号条件が以下のように得られている．

定理 C. ([8]) X を狭義凸バナッハ空間とする． $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を 0 でない X の元とする．このとき

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

であるときの同値条件は，各 j に対してある $\alpha_j > 0$ が存在し，$x_j = \alpha_j x_1$．

定理 D. ([6]) X を狭義凸バナッハ空間とする． $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を 0 でない X の元とする．また，$\|x_{j_0}\| = \min\{\|x_j\| : 1 \leq j \leq n\}$，$\|x_{j_1}\| = \max\{\|x_j\| : 1 \leq j \leq n\}$，$J_0 = \{j : \|x_j\| = \|x_{j_0}\|, 1 \leq j \leq n\}$ とする．このとき

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\| + \left(n - \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \right\| \right) \min_{1 \leq j \leq n} \|x_j\| = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|$$

が成立するための同値条件は，次の $(a), (b)$ のいずれかを満たすことである:

(a) $\|x_1\| = \|x_2\| = \cdots = \|x_n\|$,

(b) $\frac{x_j}{\|x_j\|} = \frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|}$ $(\forall j \in J_0^c)$, $\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} = \| \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|} \| \frac{x_{j_1}}{\|x_{j_1}\|}$.

定理 E. ([6]) X を狭義凸バナッハ空間とする． $x_1, x_2, \cdots, x_n$ を 0 でない X の元とす

る． $\|x_{j_0}\| = \min\{\|x_j\| : 1 \leq j \leq n\}$, $\|x_{j_1}\| = \max\{\|x_j\| : 1 \leq j \leq n\}$ とする． また, $J_1 = \{j : \|x_j\| = \|x_{j_1}\|, 1 \leq j \leq n\}$. このとき

$$\sum_{j=1}^{n} \|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^{n} x_j\right\| + \left(n - \left\|\sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right) \max_{1\leq j\leq n} \|x_j\| \tag{7}$$

が成立するための同値条件は, 次の $(a), (b)$ のいずれかを満たすことである．

(a) $\|x_1\| = \|x_2\| = \cdots = \|x_n\|$,

(b) $\frac{x_j}{\|x_j\|} = \frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}$ $(\forall j \in J_1^c)$, $\sum_{j=1}^{n} x_j = \|\sum_{j=1}^{n} x_j\| \frac{x_{j_0}}{\|x_{j_0}\|}$.

初めに定理 1a における不等式の等号条件を求める．

$n = 2$ のとき,

定理 2. X を狭義凸バナッハ空間とする． x, y を $\|x\| > \|y\|$ を満たす 0 でない X の元とする． このとき,

$$\|x + y\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) \|y\| = \|x\| + \|y\| \tag{8}$$

が成立するための同値条件は, $0 < \alpha < 1$ かつ $y = \pm\alpha x$ なる α が満たすことである．

$n = 3$ のとき,

定理 3. X を狭義凸バナッハ空間とする． x, y, z を $\|x\| > \|y\| > \|z\|$ を満たす 0 でない X の元とする． このとき,

$$\|x + y + z\| + \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right) \|z\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right) (\|y\| - \|z\|) \tag{9}$$
$$= \|x\| + \|y\| + \|z\|$$

が成立するための同値条件は, $0 < \beta < \alpha < 1$ なる α, β が存在し, 次のいずれかをみたすことである：

(a) $y = \alpha x,\ z = \pm\beta x$,

(b) $y = -\alpha x,\ z = \beta x$.

一般の n に対しての等号条件を与える．各 m に対し $I_m = \{1, 2, \cdots, m\}$ とおく．$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ と $1 \leq m \leq n$ に対して，

$$I_m^+(\alpha) = \{k \in I_m : \alpha_k > 0\}$$

$$I_m^-(\alpha) = \{k \in I_m : \alpha_k < 0\}$$

と定義する．また有限集合 A に対してその個数を $|A|$ とする．このとき，

定理 4. X を狭義凸バナッハ空間とする．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\|$ を満たす 0 でない元とする．このとき，

$$\left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| + \sum_{k=2}^n \left(k - \left\|\sum_{j=1}^k \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_k\| - \|x_{k+1}\|) = \sum_{j=1}^n \|x_j\| \tag{10}$$

が成立するための同値条件は，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し，次を満たすことである:

(a) $1 = \alpha_1 > |\alpha_2| > |\alpha_3| > \cdots > |\alpha_n|$,

(b) $x_m = \alpha_m x_1 \quad (1 \leq m \leq n)$,

(c) $|I_m^+(\alpha)| \geq |I_m^-(\alpha)| \quad (1 \leq m \leq n)$.

続いて，定理 1a の 不等式 (2) を考える．$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ と，$2 \leq m \leq n-1$ なる m に対して $J_m = \{n-(m-1), \cdots, n-1, n\}$, $J_m^+(\alpha) = \{j \in J_m : \alpha_j > 0\}$, $J_m^-(\alpha) = \{j \in J_m : \alpha_j < 0\}$ と定義する．

定理 5. X を狭義凸バナッハ空間とする．$x_1, x_2, \cdots, x_n$ を $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\|$ を満たす 0 でない元とする．このとき，

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\| = \left\|\sum_{j=1}^n x_j\right\| - \sum_{k=2}^n \left(k - \left\|\sum_{j=n-(k-1)}^n \frac{x_j}{\|x_j\|}\right\|\right)(\|x_{n-k}\| - \|x_{n-(k-1)}\|) \tag{11}$$

が成立するための同値条件は，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ が存在し，次を満たすことである:

(a) $|\alpha_1| > |\alpha_2| > \cdots > |\alpha_{n-1}| > \alpha_n = 1$,

(b) $x_m = \alpha_m x_n \quad (1 \leq m \leq n)$,

(c) $|J_m^+(\alpha)| \geq |J_m^-(\alpha)| \quad (2 \leq m \leq n-1)$,

(d) $\sum_{j=1}^n \alpha_j \geq 0$.

4 一般の場合の等号条件

前章では, $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\|$ の場合に対しての精密化した不等式の等号条件を与えたが, 本章では, 一般の場合を考える. $n=3$ のとき,

命題 6. X を狭義凸バナッハ空間とする. x, y, z を0でない元とする. (i). もし $\|x\| = \|y\| = \|z\|$ ならば

$$\|x+y+z\| + \left(3 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|} + \frac{z}{\|z\|}\right\|\right)\|z\| + \left(2 - \left\|\frac{x}{\|x\|} + \frac{y}{\|y\|}\right\|\right)(\|y\| - \|z\|)$$
$$= \|x\| + \|y\| + \|z\| \tag{12}$$

が常に成立.

(ii). もし $\|x\| > \|y\| = \|z\|$ ならば (12) が成立するための同値条件は $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し, $\alpha \geq -\frac{\|y\|}{\|x\|}, y + z = \alpha x$.

(iii). もし $\|x\| = \|y\| > \|z\|$ ならば, (12) が成立するための同値条件は $\alpha \in \mathbb{R}$ が存在し, $\alpha \geq -\frac{\|x\|}{\|z\|}$, $x + y = \alpha z$.

問題. $\|x_1\| > \|x_2\| > \cdots > \|x_n\|$ の場合においての定理1で与えられた不等式の等号条件は何か?

参考文献

[1] J. B. Diaz and F. T. Metcalf, *A complementary triangle inequality in Hilbert and Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 88–97.

[2] S. S. Dragomir, *Reverses of the triangle inequality in Banach spaces,* J. Inequal. Pure and Appl. Math. **6**(5) (2005), Art. 129, pp. 46.

[3] C. F. Dunkl and K. S. Williams, *A simple norm inequality*, Amer. Math. Monthly **71** (1964), 53–54.

[4] C.-Y. Hsu, S.-Y. Shaw and H.-J. Wong, *Refinements of generalized triangle inequalities,* J. Math. Anal. Appl. **344** (2008), 17-31.

[5] H. Hudzik and T. R. Landes, *Characteristic of convexity of Köthe function spaces,* Math. Ann. **294** (1992), 117–124.

[6] M. Kato, K.-S. Saito and T. Tamura, *Sharp triangle inequality and its reverse in Banach spaces*, Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 451–460.

[7] L. Maligranda, *Simple norm inequalities,* Amer. Math. Monthly. **113** (2006), 256–260.

[8] L. Maligranda, *Some remarks on the triangle inequality for norms,* Banach J. Math. Anal. **2**(2008), 31-41.

[9] J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear differential equations and functional analysis I,* Ann. of Math. **67** (1958), 517–573.

[10] P. R. Mercer, *The Dunkl-Williams inequality in an inner product space*, Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 447–450.

[11] K.-I. Mitani, K.-S. Saito, M. Kato and T. Tamura, *On sharp triangle inequalities in Banach spaces*, J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 1178-1186.

[12] D. S. Mitrinović, J. E. Pečarić and A. M. Fink, *Classical and new inequalities in analysis,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1993.

[13] J. Pečarić and R. Rajić, *The Dunkl-Williams inequality with n elements in normed linear spaces,* Math. Inequal. Appl. **10** (2007), 461–470.