数理解析研究所講究録
第 1670 巻 2009 年 72-76

弱順序極小構造上での連結性について

阿南工業高等専門学校・一般教科 田中 広志 (Hiroshi Tanaka)
Anan National College of Technology
htanaka@anan-nct.ac.jp

概要

順序極小構造上におけるセルは definably connected であることが知られている。このノートでは，弱順序極小構造において definably connected に代わる概念として，weakly definably connected という概念を導入する。

1 はじめに

構造 $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を端点を持たない全順序構造とする。

M の部分集合 A が, 任意の $a, b \in A$ に対して, $(a,\ b) \subseteq A$ をみたすとき, A は M の**凸集合**であるという。さらに $\sup A, \inf A \in M \cup \{-\infty, +\infty\}$ のとき, A は M の**区間**であるという。構造 $\mathcal{M}$ の任意の definable 集合 $D \subseteq M$ が, 区間 (または凸集合) の有限和で表せるとき, $\mathcal{M}$ は**順序極小構造** (または**弱順序極小構造**) であるとよぶ。理論 T の任意のモデルが順序極小 (または弱順序極小) になるとき, T は**順序極小理論** (または**弱順序極小理論**) とよぶ。順序極小構造の理論は，順序極小理論になることが知られている。しかしながら，弱順序極小構造の理論は，必ずしも弱順序極小理論になるとは限らないことが知られている ([5])。

このノートでは，構造 $\mathcal{M}$ はすべて弱順序極小構造とする。

2 Weakly definably connected

$C, D \subseteq M$ とする。任意の $c \in C$, $d \in D$ に対して $c < d$ のとき, $C < D$ と書く。空でない集合の対 $\langle C, D\rangle$ が, $C < D$ かつ $C \cup D = M$ でさらに D が最小元を持たないとき, M の**切断**であるという。$\mathcal{M}$ の definable 切断全体を $\overline{M}$ によって表す。任意の $a \in M$ に対して, definable 切断 $\langle(-\infty, a], (a, +\infty)\rangle$ を考えることにより, $M \subseteq \overline{M}$ とみなす。

2000 *Mathematics Subject Classification.* 03C64.
Key words and phrases. Weakly o-minimal, definably connected, weakly definably connected.

さらに $\langle C_1, D_1\rangle < \langle C_2, D_2\rangle$ を $C_1 \subsetneq C_2$ と定義することにより, $(M,<)$ を $(\overline{M},<)$ の部分構造とみなす。

M (または $\overline{M}$) 上に, M (または $\overline{M}$) の開区間を基本開集合として位相を入れる。

n を自然数とし, $A \subseteq M^n$ を definable とする。写像 $f : A \to \overline{M}$ において, 集合 $\{\langle x,y\rangle \in A\times M : y < f(x)\}$ が definable になるとき, f は **definable** であるという。写像 $f : A \to \overline{M}\cup\{-\infty,\infty\}$ が **definable** とは, f が A から $\overline{M}$ への definable 写像であるか, 任意の $x \in A$ に対し $f(x)=\infty$ であるか, または任意の $x \in A$ に対し $f(x)=-\infty$ になるときをいう。

[7] に弱順序極小構造上でのセルの定義がある。

定義 1. 弱順序極小構造 $\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ に対して, セルとその完備化を帰納的に定義する:

1. M の 1 点集合は **0-セル**とする。$C \subseteq M$ が 0-セルのとき, その完備化を $\overline{C} := C$ と定める。
2. M の空でない definable 凸開集合は **1-セル**とする。$C \subseteq M$ が 1-セルのとき, その完備化を $\overline{C} := \{x \in \overline{M} : \exists a, b \in C, a < x < b\}$ と定める。
3. $C \subseteq M^m$ が k-セルで $f : C \to M$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもつとき, グラフ $\Gamma(f)$ は ***k*-セル**とし, その完備化を $\overline{\Gamma(f)} := \Gamma(\overline{f})$ と定める。
4. $C \subseteq M^m$ が k-セルで $g, h : C \to \overline{M}\cup\{-\infty,\infty\}$ が definable で連続, さらに連続な拡張 $\overline{g}, \overline{h} : \overline{C} \to \overline{M}$ をもち, 任意の $x \in \overline{C}$ に対して $\overline{g}(x) < \overline{h}(x)$ のとき,
$$(g,h)_C := \{\langle a,b\rangle \in C\times M : g(a) < b < h(a)\}$$
は **$(k+1)$-セル**とし, その完備化を
$$\overline{(g,h)_C} := \{\langle a,b\rangle \in \overline{C}\times \overline{M} : \overline{g}(a) < b < \overline{h}(a)\}$$
と定める。
5. ある $k \in \mathbb{N}$ が存在して, $C \subseteq M^m$ が k-セルとなるとき, C は**セル**とよぶ。

定義 2. $\mathcal{M}=(M,<,\ldots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X \subseteq M^m$ を空でない definable 集合とする。以下で, X の**セル分解**を m に関して帰納的に定義する。

1. X を M の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D}=\{C_0,\ldots,C_k\}$ をセルによる X の分割とする。このとき, $\mathcal{D}$ は X の**セル分解**であるという。
2. X を M^{m+1} の空でない definable 部分集合で, $\mathcal{D}=\{C_0,\ldots,C_k\}$ をセルによる X の分割とし, $\pi : M^{m+1} \to M^m$ を最後の座標を除く射影とする。このとき, $\{\pi(C_0),\ldots,\pi(C_k)\}$ が $\pi(X)$ のセル分解になるとき, $\mathcal{D}$ は X の**セル分解**であると

いう。

定義 3. $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を弱順序極小構造, $m \in \mathbb{N}$, $X, Y \subseteq M^m$ を definable 集合, $X \neq \emptyset$ とする。また $\mathcal{D}$ を X のセル分解とする。このとき, 任意の $C \in \mathcal{D}$ に対して, $C \subseteq Y$ または $C \cap Y = \emptyset$ となるとき, $\mathcal{D}$ は Y を**分割する**という。

定義 4. $\mathcal{M} = (M, <, \ldots)$ を弱順序極小構造とする。任意の $m, k \in \mathbb{N}$ と definable 集合 $X_1, \ldots, X_k \subseteq M^m$ に対して, $X_1, \ldots, X_k$ のすべてを分割するような M^m のセル分解が存在するとき, $\mathcal{M}$ は**セル分解**を許すという。

セルの完備化は定義 1 で定義した。次に definable 集合の完備化を定義する。

定義 5. $X \subseteq M^n$ を definable とする。このとき，definable 集合 X の**完備化**を

$$\{a \in (\overline{M})^n : \text{あるセル}\ C \subseteq X\ \text{が存在して，}\ a \in \overline{C}\}$$

と定義し，$\overline{X}$ と書く。

$C \subseteq M^n$ をセルとする。このとき，セルの定義による C の完備化と上記の definable 集合としての C の完備化は一致する。

補題 6. $X, Y \subseteq M^n$ を definable, $x \in M^n$ とする。このとき，次が成り立つ。

1. $x \in X \iff x \in \overline{X}$ である。
2. $X \subseteq Y \iff \overline{X} \subseteq \overline{Y}$ である。
3. $\overline{X}$ が開集合ならば，X も開集合である。
4. $\overline{X}$ が閉集合ならば，X も閉集合である。

次に，boundary point ([4, 定義 1.1]) および weakly boundary point を定義する。

定義 7. $X, Y \subseteq M^n$ を definable 集合とし，$\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ とする。

1. $a \in M^n$ が X **での** Y **の boundary point** であるとは，$a \in X$，かつ任意の open box $U \subseteq M^n$ に対して，$a \in U$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となるときをいう。
2. $a \in (\overline{M})^n$ が X **での** Y **の weakly boundary point** であるとは，$a \in \overline{X}$，かつ任意の open box $U \subseteq M^n$ に対して，$a \in \overline{U}$ ならば $U \cap Y \neq \emptyset$ かつ $U \cap (X \setminus Y) \neq \emptyset$ となるときをいう。

次に，definably connected ([4, 定義 2.2]) および weakly definably connected を定義する。

定義 8. $X \subseteq M^n$ を definable とする。

1. X が **definably connected** であるとは，任意の definable 集合 $Y \subseteq M^n$ に対して $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ ならば，X は X での Y の boundary point を少なくとも一つは含むこととする。
2. X が **weakly definably connected**（または **WDC**）であるとは，任意の definable 集合 $Y \subseteq M^n$ に対して $\emptyset \subsetneq Y \subsetneq X$ ならば，$\overline{X}$ は X での Y の weakly boundary point を少なくとも一つは含むこととする。

定義 9. $X, Y \subseteq M^n$ を definable かつ $Y \subseteq X$ とする。このとき，Y が X の **weakly definably connected component**（または **WDC component**）であるとは，Y が X の極大な weakly definably connected 部分集合になることとする。

補題 10. $\mathcal{M}$ を弱順序極小構造とし，$C \subseteq M^n$ を k-セルとする。このとき，ある k-セル $D \subseteq M^k$ と definable 同相写像 $f : C \to D$ と同相写像 $\overline{f} : \overline{C} \to \overline{D}$ が存在して，$\overline{f}|C = f$ が成り立つ。

補題 11. $\mathcal{M}$ を弱順序極小構造とし，$X, Y \subseteq M^n$ を definable とする。このとき，次が成り立つ。

1. X, Y が weakly definably connected でかつ $X \cap Y \neq \emptyset$ ならば，$X \cup Y$ は weakly definably connected である。
2. $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{cl}(X)$ かつ X が weakly definably connected ならば，Y も weakly definably connected である。

得られた結果は以下の 2 つである。

定理 12. $\mathcal{M}$ を弱順序極小構造とし，$X \subseteq M^n$ をセルとする。このとき，X は weakly definably connected である。

定理 13. $\mathcal{M}$ をセル分解を許す弱順序極小構造とし，$X \subseteq M^n$ を definable とする。このとき，X は WDC component が有限個だけある。さらに，それらの WDC component は，X で開かつ閉であり，X の有限分割になっている。

上記の定理 12 において，$\mathcal{M}$ が順序極小な場合は，[4] で示されている。また上記の定理 13 において，$\mathcal{M}$ が順序極小な場合は，[3, p57] で示されている。

参考文献

[1] M. Coste, An introduction to o-minimal geometry, Dottorato di Ricerca in Matematica, Dip. Mat. Univ. Pisa, Istituti Editoriali e Poligrafici Internazionali (2000).

[2] M. A. Dickmann, Elimination of quantifiers for ordered valuation rings, J. Symbolic Logic 52 (1987) 116–128.

[3] L. van den Dries, Tame topology and o-minimal structures, Lecture notes series 248, London Math. Soc. Cambridge Univ. Press (1998).

[4] J. F. Knight, A. Pillay and C. Steinhorn, Definable sets in ordered structures. II, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986) 593–605.

[5] D. Macpherson, D. Marker and C. Steinhorn, Weakly o-minimal structures and real closed fields, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5435–5483.

[6] A. Marcja and C. Toffalori, A guide to classical and modern model theory, Trends in Logic 19, Kluwer Academic Publishers (2003).

[7] R. Wencel, Weakly o-minimal non-valuational structures, Ann. Pure Appl. Logic 154, no. 3, (2008) 139–162.