数理解析研究所講究録
第 1681 巻 2010 年 65-72

Semicontinuous maps to topological vector lattices and their applications

高崎経済大学・経済学部
(Faculty of Economics, Takasaki City University of Economics)
山崎 薫里
(Kaori YAMAZAKI)

1 研究の背景

以下, 位相空間はすべてハウスドルフであることを仮定する. $\mathbb{R}$ を実数全体の集合, κ を無限濃度とする. 半順序実線形空間 $(Y,\leq)$ は, 以下の (i), (ii), (iii) の条件を満たすとき, **ベクトル束** (a *vector lattice*, a *Riesz space*) と呼ばれる[1]: 任意の $x,y,z\in Y$ について,

(i) $x\leq y$ であるとき, $x+z\leq y+z$ である,

(ii) $x\leq y$ であるとき, 任意の $r\geq 0$ $(r\in\mathbb{R})$ について $rx\leq ry$ である,

(iii) 2 点 x,y は, 最小上界 $x\vee y$ と最大下界 $x\wedge y$ をもつ.

ベクトル束 Y の元 y について, $|y|=y\vee(-y)$ と定義する. また, $A\subset Y$ が '$|y|\leq|x|,\ x\in A,\ y\in Y\Rightarrow y\in A$' を満たすとき, A は **solid** であると呼ばれる. 実線形位相空間 Y が**位相ベクトル束** (a *topological vector lattice*, a *topological Riesz space*) であるとは, Y がベクトル束で locally solid である (つまり, Y の原点は solid 集合からなる近傍基をもつ) ことである. この 'locally solid' という条件は, 束演算 $\vee,\wedge:Y\times Y\to Y$ の連続性を導く条件である. **ノルム束** (a *normed lattice*) とは, 以下の (iv) を満たすようなノルムが導入されているベクトル束のことである.

(iv) $|x|\leq|y|$ のとき, $\|x\|\leq\|y\|$ である.

特に, ノルム束がバナッハ空間であるとき, **バナッハ束** (a *Banach lattice*) と呼ばれる. よく知られているバナッハ空間, 例えば, $l_p, l_p(\kappa), L_p([0,1])$, $(1\leq p\leq\infty)$, c_0, c などは, 自然な順序によってバナッハ束となる. また, 位相空間 Z に対し, Z 上の実数値連続関数 s で, 各 $\varepsilon>0$ について $\{z\in Z:|s(z)|\geq\varepsilon\}$ がコンパクトとなるような s 全体に sup-norm を導入した空間 $C_0(Z)$ もまたバナッハ束となる. 特に, Z が濃度 κ の離散空間であるとき $C_0(Z)$ は $c_0(\kappa)$ と表わされ, $c_0(\omega)=c_0$ である.

[1] 半順序実線形空間 Y が (i), (ii) を満たす線形位相空間で, 正錐 $S=\{y\in Y:y\geq 0\}$ が閉集合であるとき, an ordered topological vector space と呼ばれる.

定義 1.1. X を位相空間とする. 実数値関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が**下半連続** (*lower semi-continuous*) であるとは, 任意の $r \in \mathbb{R}$ について $\{x : f(x) \leq r\}$ が閉集合 ($\{x : f(x) > r\}$ が開集合) であることをいう. 同様に, $f : X \to \mathbb{R}$ が**上半連続** (*upper semi-continuous*) であるとは, 任意の $r \in \mathbb{R}$ について $\{x : f(x) \geq r\}$ が閉集合 ($\{x : f(x) < r\}$ が開集合) であることをいう.

定理 1.2 (Katětov-Tong Insertion Theorem[2]; Katětov [5], Tong [9]). 位相空間 X が正規であるための必要十分条件は, 下半連続関数 $h : X \to \mathbb{R}$ と上半連続関数 $g : X \to \mathbb{R}$ で $g \leq h$ となっているものに対し連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を $g \leq f \leq h$ を満たすようにとれることである.

定理 1.2 の '$\mathbb{R}$' は, いくつかの性質を付加した半順序集合 Y へ様々な形で一般化できることが知られている[3]. 一方で, これらの研究に見られる半順序集合 Y が線形空間であったとしても, 線形位相空間として自然な位相が入っているとは限らないことが多い. 例えば, $C_0(Z)$ への半連続関数の定義として定義 1.1 の '$\mathbb{R}$' を '$C_0(Z)$' に変えたものを採用したとき, これらの定義によって得られる $f : X \to C_0(Z)$ の半連続性は, '上かつ下半連続性' が '連続性 ($C_0(Z)$ には通常のノルム位相が入っている)' と一致しない定義となってしまう. 例えば, $f : X \to Y$ が下半連続 (resp. 上半連続) であることを任意の $y \in C_0(Z)$ について $\{x : f(x) \leq y\}$ (resp. $\{x : f(x) \geq y\}$) が閉集合であると定義すると, 上かつ下半連続であるが連続でない関数 $f : X \to C_0(Z)$ が構成できてしまう. 一方, $f : X \to Y$ が下半連続 (resp. 上半連続) であることを任意の $y \in C_0(Z)$ について $\{x : f(x) > y\}$ (resp. $\{x : f(x) < y\}$) が開集合であると定義すると, 連続関数であるが下 (上) 半連続でない関数 $f : X \to C_0(Z)$ が構成できてしまう. このように, 位相ベクトル束 Y への関数 $f : X \to Y$ に半連続性を定義する場合には, 定義 1.1 の自然な拡張になっているということの他に, 上かつ下半連続性が連続性と一致する (すなわち, この上位相と下位相によって生成される Y の位相が Y のもとの位相と一致する), $f : X \to Y$ が下半連続であることと $-f : X \to Y$ が上半連続であることが同値である (すなわち, Y の上位相と下位相が対称的である) といった自然な制約をもった定義を導入する必要がある[4].

本稿では, 位相ベクトル束への半連続関数の定義について考察する. その応用として, 位相ベクトル束への Duality Theorem (双対定理) と Insertion Theorem (挿入定理) を与える.

[2] X が距離空間の場合に H. Hahn (1917), パラコンパクト空間の場合に J. Dieudonné (1944) によって与えられていたことから, 'Hahn-Dieudonné-Tong Insertion Theorem' と呼ばれることもある.

[3] R.L.Blair-M.A.Swardson (1987), Y.Liu-M.Luo (1992), F.van Gool (1992), D.Zhang (1997), Z.Yang (2003), J.G.García-T.Kubiak-M.A.de P.Vicente (2006) など.

[4] [4] において, $f : X \to C_0(Z)$ の半連続性の定義として, (やや技巧的に見える) 定理 2.1 (5) を採用した理由である.

$(Y,\leq)$ を位相ベクトル束, $K\subset Y$, $a,b\in Y$, $S=\{y\in Y:y\geq 0\}$ とする. K の最小上界 (resp. 最大下界) が存在すれば, それを $\vee K$ (resp. $\wedge K$) で表わす. $[a,b]:=\{y\in Y:a\leq y\leq b\}$ $(=(a+S)\cap(b-S))$ を**順序閉区間** (an *order interval*) と呼ぶ. $x\leq y$ かつ $x\neq y$ であるとき, $x<y$ と表わす. 関数 $f,g:X\to Y$ は, 任意の $x\in X$ について $f(x)\leq g(x)$ であるとき, $f\leq g$ と表わされる. 関数 $f,g:X\to Y$ に対し, 集合値関数 $(-\infty,f],[g,\infty),[g,f]:X\to 2^Y$ は $(-\infty,f](x)=f(x)-S$, $[g,\infty)(x)=g(x)+S$, $[g,f](x)=[g(x),f(x)]$, $x\in X$, と定義される. 以下, 定義されていない用語は [3] [8] に従う.

2 位相ベクトル束への半連続関数

Borwein-Thera [2] ([1], [7] も参照) は位相空間 X から位相ベクトル束 Y[5] への関数 $f:X\to Y$ が (Borwein-Penot-Thera の意味での) **下半連続** (*lower semi-continuous*) であるとは, 集合値関数 $(-\infty,f]:X\to 2^Y$ が下半連続である (すなわち, Y の任意の開集合 U について $\{x\in X:(-\infty,f](x)\cap U\neq\emptyset\}$ が開集合である) こと, $f:X\to Y$ が (Borwein-Penot-Thera の意味での) **上半連続**であるとは, $-f$ が下半連続であることと定義した. 特に, $Y=C_0(Z)$ のときの $f:X\to Y$ の半連続性の定義は, Gutev-大田-山崎 [4] でも与えられているが, Borwein-Penot-Thera のものと一致することが以下のようにわかる.

定理 2.1. X を位相空間, Y を位相ベクトル束, $S=\{y\in Y:y\geq 0\}$, $f:X\to Y$ を関数とする. このとき, 以下の条件は同値である[6].

(1) f は (Borwein-Penot-Thera の意味での) 下半連続 (resp. 上半連続関数) である.

(2) 任意の $x\in X$ と Y の原点の任意の近傍 V に対して, x の近傍 G で

$$\forall x'\in G,\quad f(x')\in f(x)+V+S$$
$$(\text{resp. } f(x')\in f(x)+V-S)$$

を満たすものが存在する.

(3) 任意の $x\in X$ と Y の原点の任意の近傍 V に対して, x の近傍 G で

$$\forall x'\in G,\quad f(x)-f(x)\wedge f(x')\in V$$
$$(\text{resp. } f(x)\vee f(x')-f(x)\in V)$$

を満たすものが存在する.

[5] より一般に 'an ordered topological vector space Y' で定義されている.

[6] (1) $\Leftrightarrow$ (2) は, [1], [2], [7] で 'an ordered topological vector space Y' について, 本質的に知られていた.

もし, Y がノルム束であるとき, (1) は次の (4) と同値である.

(4) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x の近傍 G で

$$\begin{aligned} \forall x' \in G, \quad & \|f(x) - f(x) \wedge f(x')\| < \varepsilon \\ (\text{resp.} \quad & \|f(x) \vee f(x') - f(x)\| < \varepsilon) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

もし, $Y = C_0(Z)$ であるとき, (1) は次の (5) と同値である.

(5) Gutev-大田-山崎 [4] の意味で f は下半連続 (resp. 上半連続), すなわち, 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, x の近傍 G で

$$\begin{aligned} \forall x' \in G, \quad \forall z \in Z, \quad & f(x')(z) > f(x)(z) - \varepsilon \\ (\text{resp.} \quad & f(x')(z) < f(x)(z) + \varepsilon) \end{aligned}$$

を満たすものが存在する.

(3) の形の特徴づけは, よく知られた束演算を用いることができるために使いやすい. 実際, 本研究では殆どすべての証明において, (3) を半連続性の定義として採用し計算している.

3 応用 1: Duality Theorem

X を位相空間, Y を位相ベクトル束とする. 上下半連続関数 $h, g : X \to Y$ が作る集合値関数 $[g, h] : X \to 2^Y$ の半連続性と, 半連続集合値関数 $\varphi : X \to 2^Y$ が与える一価関数 $\vee\varphi, \wedge\varphi : X \to Y$ の半連続性の関係を論じる. 得られる結果には, 半連続関数の上下の間に, また, 集合値関数と一価関数の間に自然な双対性がみられるため, 双対定理と呼ばれることもある.

定理 3.1 (Penot-Thera, [7]). X を位相空間, Y を位相ベクトル束, $h : X \to Y$ を下半連続関数, $g : X \to Y$ を上半連続関数で $g \leq h$ を満たすものとするとき, 集合値関数 $[g, h] : X \to 2^Y$ は下半連続である.

Gutev-大田-山崎は $C_0(Z)$ または $c_0(\kappa)$ への半連続関数の上下の間に, また, 集合値関数と一価関数の間に自然な双対性があることを示した ([4, 補題 2.6 と補題 2.8]). 本章では, これらの結果における $C_0(Z)$ または $c_0(\kappa)$ を, 他の位相ベクトル束へ置き換えることを試みる.

定理 3.2. X を位相空間, Y を位相ベクトル束とする. $g : X \to Y$ を下半連続関数, $h : X \to Y$ を上半連続関数で $g \leq h$ となるようなもので, 任意の $x \in X$ について $[g(x), h(x)]$ がコンパクトであるとき, 集合値関数 $[g, h] : X \to 2^Y$ は上半連続である.

これは, 定理 3.1 と双対的な関係にあり, Gutev-大田-山﨑 [4, 補題 2.6 (4)] の拡張である.

位相ベクトル束 Y は, その下有向集合 $\{y_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$ で $\wedge_{\alpha\in\Gamma}y_\alpha = 0$ となるようなものは常に 0 に収束するとき, **Dini** であると呼ばれる ([1], [2]). 任意の反射的バナッハ束, l_1, $c_0(\kappa)$ などは Dini となる. 特に, ノルム束が Dini であるとき, **順序連続** (*order continuous*) であると呼ばれる.

定理 3.3. X を位相空間, Y を Dini であるような位相ベクトル束とする. 集合値関数 $\varphi : X \to 2^Y$ が下半連続で, 各 $x \in X$ について $\vee\varphi(x)$ (resp. $\wedge\varphi(x)$) が存在するとき, $\vee\varphi$ (resp. $\wedge\varphi$) $: X \to Y$ は下半連続 (resp. 上半連続) である.

'Y が Dini である' という条件は省けない. 実際, 下半連続集合値関数 $\varphi : [1,\omega] \to 2^{l_\infty}$ ($\varphi(n) = \{e_i : 1 \leq i \leq n\}$ $(1 \leq n < \omega)$, $\varphi(\omega) = \{e_i : 1 \leq i < \omega\}$; ここで, $e_n \in l_\infty$ は, $e_n(n) = 1$, $n \neq m$ のとき $e_n(m) = 0$ と定義) について, $\vee\varphi : [1,\omega] \to l_\infty$ は下半連続とならない.

定理 3.4. X を位相空間, Y を位相ベクトル束, $S = \{y \in Y : y \geq 0\}$ とする. 集合値関数 $\varphi : X \to 2^Y$ が上半連続で, 各 $x \in X$ について $\vee\varphi(x)$ (resp. $\wedge\varphi(x)$) が存在すると仮定する. Y が Dini かつ,

(*) '$a_1, a_2 \in S \cap U$ のとき常に $a_1 \vee a_2 \in U$' となるような集合 U からなる原点の近傍基をもつ

とき, $\vee\varphi$ (resp. $\wedge\varphi$) $: X \to Y$ は上半連続 (resp. 下半連続) である.

'(*)' の条件は省けない. 実際, 上半連続集合値関数 $\varphi : [1,\omega] \to 2^{l_1}$ ($\varphi(n) = \{(2^{-i+1} + n^{-1})e_i : 1 \leq i \leq n\}$ $(1 \leq n < \omega)$, $\varphi(\omega) = \{2^{-i+1}e_i, 0 : 1 \leq i < \omega\}$; ここで, $e_n \in l_1$ は, $e_n(n) = 1$, $n \neq m$ のとき $e_n(m) = 0$ と定義) について, $\vee\varphi : [1,\omega] \to l_1$ は上半連続とならない.

4 応用 2: 挿入定理

X を位相空間, Y を位相ベクトル束とする. 任意の下半連続関数 $h : X \to Y$ と上半連続関数 $g : X \to Y$ で $g \leq h$ となっているものについて連続関数 $f : X \to Y$ を $g \leq f \leq h$ を満たすようにとれるとき, (X,Y) が**挿入性** (an *insertion property*) をもつと呼ぶことにする. この用語を用いると, 既知の事実は以下のようにまとめられる; X が正規空間であることと $(X,\mathbb{R})$ が挿入性をもつことは同値 (定理 1.2); X がパラコンパクトであることと, 任意のバナッハ束 Y に対して (X,Y) が挿入性をもつことは同値 (Borwein-Théra [2], 大田 [6])[7]; X の濃度 $\leq \kappa$ な点有限な開被覆が正規であることと, $(X, c_0(\kappa))$

[7] 'X がパラコンパクトならば, 任意のバナッハ束 Y に対して (X,Y) が挿入性をもつ' は [2], 逆は [6] による. 両者の半連続性のオリジナルの定義 (よって, 挿入性の定義) は異なるが, 定理 2.1 により 2 つの定義は一致する.

が挿入性をもつことは同値 (Gutev-大田-山崎 [4]). 本章では, 他のバナッハ束への関数の挿入性を考察する. 定理 3.1 によって Michael の選択定理が使えるので, 本研究の主眼は, どのようなバナッハ束 Y をテスト空間としてとれば X の位相的性質を (X,Y) が挿入性をもつこととして特徴づけられるかを調べることにある.

Y を位相ベクトル束, $S=\{y\in Y : y\geq 0\}$ とする. 次の条件を考える.

$(*_1)_\kappa$ 次を満たすような $\{e_\alpha : \alpha<\kappa\}\subset S$ と原点の近傍 U が存在する:
$\{e_\alpha+U+S : \alpha<\kappa\}$ が Y において局所有限

$(*_2)_\kappa$ $\alpha<\beta$ のとき $e_\alpha<e_\beta$ となるような $\{e_\alpha : \alpha<\kappa\}\subset S$ と原点の近傍 U で次を満たすようなものが存在する:
$\forall y\geq e_0\ \exists\alpha<\kappa$ s.t. $(e_\alpha+S)\cap(y+U)=\emptyset$

$(*_3)_\kappa$ $\alpha<\beta$ のとき $e_\alpha<e_\beta<d_\beta<d_\alpha$ となるような $\{d_\alpha, e_\alpha : \alpha<\kappa\}\subset S$ と原点の近傍 U で次を満たすようなものが存在する:
$\forall y\in[e_0,d_0]\ \exists\alpha<\kappa$ s.t. $((e_\alpha+S)\cap(y+U)=\emptyset$ or $(d_\alpha-S)\cap(y+U)=\emptyset)$

例えば, $l_p(\kappa)$ $(1\leq p<\infty), c_0(\kappa)$ は $(*_1)_\kappa$ を満たす. $C_0(\kappa)$ は $(*_2)_\kappa$ を満たし, l_p $(1\leq p<\infty)$, c_0, c は $(*_2)_\omega$ を満たす. c は $(*_3)_\omega$ を満たす.

定理 4.1. X を位相空間とするとき, 次は同値である[8].

(1) X 正規 κ-パラコンパクト.

(2) 任意のバナッハ束 Y で $w(Y)\leq\kappa$ となるようなものに対し, (X,Y) は挿入性をもつ.

(3) パラコンパクトな位相ベクトル束で $(*_3)_\kappa$ を満たし (X,Y) が挿入性をもつものが存在する.

定理 4.2. X を位相空間とするとき, 次は同値である[9].

(1) X の濃度が $\leq\kappa$ である点有限な開被覆は正規である.

(2) 任意のバナッハ束 Y で $w(Y)\leq\kappa$ であり順序閉区間が常にコンパクトとなるようなものに対し, (X,Y) は挿入性をもつ.

(3) $(X,c_0(\kappa))$ は挿入性をもつ.

(4) ある $1\leq p<\infty$ について, $(X,l_p(\kappa))$ は挿入性をもつ.

---

[8] (1) $\Leftrightarrow$ (2) は, 本質的には, Borwein-Thera [2], 大田 [6] による.
[9] (1) $\Leftrightarrow$ (3) は Gutev-大田-山崎 [4] による.

(5) 位相ベクトル束Yで$(*_1)_\kappa$を満たし(X, Y)が挿入性をもつものが存在する.

$(*_2)_\kappa$を満たすYを用いても, ある位相空間Xを特徴づける挿入定理を与えることができる. 定理4.1及び定理4.2を比較することにより, 以下の系が得られる.

系 4.3. 位相空間Xについて, 次が成立する.

(1) ([2], [6]) Xはパラコンパクトであるための必要十分条件は, 任意のバナッハ束Yについて(X, Y)が挿入性をもつことである.

(2) Xの点有限な開被覆は正規であるための必要十分条件は, 任意のバナッハ束で順序閉区間が常にコンパクトであるようなYについて(X, Y)が挿入性をもつことである.

系 4.4. 位相空間Xについて, 次が成立する.

(1) Xが正規かつ可算パラコンパクトであるための必要十分条件は, (X, c)が挿入性をもつことである.

(2) [10] Xが正規であるための必要十分条件は, ある$1 \le p < \infty$についての(X, l_p), または, (X, c_0)が挿入性をもつことである.

系4.4より, 定理1.2の '$\mathbb{R}$' は, 'c_0', 'l_p' $(1 \le p < \infty)$ に置き変えることができるが, 'c' に置き換えることはできない.

定理4.1や4.2のような位相ベクトル束を用いた挿入定理は, 族正規空間等の様々な位相空間Xについて成立するように, 様々な形にアレンジすることができる.

References

[1] J. M. Borwein, J. P. Penot and M. Thera, *Conjugate convex operators*, J. Math. Anal. Appl. 102 (1984), 399–414.

[2] J. M. Borwein and M. Théra, *Sandwich theorems for semicontinuous operators*, Canad. Math. Bull. 35 (1992), 463–474.

[3] R. Engelking, General Topology, Revised and completed edition, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[10] c_0の場合は, Gutev-大田-山崎 [4] による.

[4] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Selections and sandwich-like properties via semi-continuous Banach-valued functions*, J. Math. Soc. Japan 55 (2003), 499–521.

[5] M. Katětov, *On real-valued functions in topological spaces*, Fund. Math. 38 (1951), 85–91. Correction: Fund. Math. 40 (1953), 203-205.

[6] H. Ohta, *An insertion theorem characterizing paracompactness*, Topology Proc. 30 (2006), 557–564.

[7] J. P. Penot and M. Thera, *Semi-continuous mappings in general topology*, Arch. Math. 38 (1982), 158–166.

[8] H. H. Schaefer with M. P. Wolff, Topological Vector Spaces, Second edition, GTM 3, Springer, 1999.

[9] H. Tong, *Some characterizations of normal and perfectly normal spaces*, Duke Math. J. 19 (1952), 289–292.