数理解析研究所講究録
第 1691 巻 2010 年 148-154

不完全情報渋滞ゲームの近似的ナッシュ遷移の収束性

山田 陽介 [*](Yosuke Yamada), 小野 廣隆 [†](Hirotaka Ono), 山下 雅史 [†](Masafumi Yamashita)

[*] 九州大学大学院システム情報科学府
Graduate School of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University
[†] 九州大学大学院システム情報科学研究院
Faculty of Information Science and Electrical Engineering, Kyushu University

1 渋滞ゲームと近似ナッシュダイナミクス

1.1 渋滞ゲームとナッシュダイナミクス

プレイヤーの有限集合を $P=\{1,\ldots,n\}$, P によって共有されている資源の集合を $E=\{e_1,\ldots,e_m\}$ とする. プレイヤーの戦略は E のある部分集合であり, 各プレイヤー i が取る戦略 s_i の組 $s=(s_1,\ldots,s_n)$ を状態という. 状態 s において資源 $e\in E$ を利用する戦略を取るプレイヤーの人数を $f_s(e)=|\{i:e\in s_i, 1\leq i\leq n\}|$ とする. 資源 e の利用コスト d_e は e を利用するプレイヤーの人数を引数とする, 非負の非減少関数である. したがって, 状態 s におけるプレイヤー i の戦略 s_i にかかるコスト $c_i(s)$ は

$c_i(s)=\sum_{e\in s_i} d_e(f_s(e))$

である. このようにして定まるゲームを渋滞ゲームと呼ぶ. プレイヤー i が取り得る戦略の集合 $S_i\subset 2^E$ は必ずしも同一ではない. S_i がすべて同一ならばゲームは対称であるという. 状態の集合を $S=\Pi_{i=1}^{n}S_i$ で表す.

状態を $s=(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ とする. s におけるプレイヤー i の戦略 s_i を $r\in S_i$ に置き換えて作られる状態を $s(i,r)$ と表す. 任意のプレイヤー i と戦略 $r\in S_i$ に対して $c_i(s)\leq c_i(s(i,r))$ が成立するとき, 状態 s は純粋ナッシュ均衡であるという. s が純粋ナッシュ均衡であるならば, 各プレイヤーは (その他のプレイヤーが戦略を変更しない限り) 戦略を変更することでコストを減少させることはできないという意味で均衡している. 渋滞ゲームには純粋ナッシュ均衡が存在することが知られている.

任意の状態 s を考える. あるプレイヤー i が戦略 s_i を r に変更することでコスト c_i を減少できるならば戦略を変更することで生ずる状態遷移 $\rightarrow\subseteq S^2$ を考える. すなわち, $s\rightarrow s'$ であるのは, ある $i\in P$ と $r\in S_i$ が存在して, $s'=s(i,r)$ かつ $c_i(s)>c_i(s')$ が成立するとき, かつそのときに限る. $\rightarrow$ をナッシュ遷移, 状態の遷移 $s^{(0)}\rightarrow s^{(1)}\rightarrow\cdots$ をナッシュダイナミクスと呼ぶ. 任意のナッシュダイナミクス $s^{(0)}\rightarrow s^{(1)}\rightarrow\cdots$ は有限である, すなわち, ある純粋ナッシュ均衡 $s^{(k)}$ に到達することが知られているが, 一方, 純粋ナッシュ均衡を求める問題は, 渋滞ゲームが対称, すなわち $S_i=S_j$ $(1\leq i<j\leq n)$ の場合でも PLS-完全であることが知られている.

1.2 ϵ-ナッシュ均衡と ϵ-ナッシュダイナミクス

純粋ナッシュ均衡を求める問題の困難さを緩和するために以下の近似ナッシュ均衡を考える. ある定

数を$\epsilon > 0$とする. 任意のプレイヤーiと戦略$r \in S_i$に対して$(1-\epsilon)c_i(s) \leq c_i(s(i,r))$が成立するとき, 状態$s$は$\epsilon$-ナッシュ均衡であるという.

状態$s \in S$, プレイヤー$i \in P$, 戦略$r \in S_i$に対して$s' = s(i,r)$であるとき, 改善比を
$\rho_s(i,r) = \frac{c_i(s)-c_i(s')}{c_i(s)}$
と定義する. あるプレイヤーiが戦略s_iをrに変更することで改善比$\rho_s(i,r) > \epsilon$を達成できるときのみ状態遷移を許すナッシュダイナミクスをϵ-ナッシュダイナミクスと呼ぶ. すなわち, $s \to_\epsilon s'$であるのは, ある$i \in P$と$r \in S_i$が存在して, $s' = s(i,r)$かつ$\rho_s(i,r) > \epsilon$が成立するとき, かつそのときに限る.

資源コスト関数をd_eとする. ある定数$\alpha \geq 1$が存在し, すべての$t \geq 1$に対して$d_e(t+1) \leq \alpha d_e(t)$が満たされるとき, d_eはα-跳躍であるという. 渋滞ゲームが対称的で, すべての資源コストがあるαに対してα-跳躍であるならば, 任意のϵ-ナッシュダイナミクスは有限であり, ϵ-ナッシュ均衡に到達するばかりでなく, ϵ-ナッシュ均衡に到達するまでの遷移回数は$\lceil n\alpha\epsilon^{-1}\log(nC)\rceil$で上から抑えられることが知られている [1]. ここで, Cはあるプレイヤーのコストの上限である.

2 不完全情報渋滞ゲームと近似ナッシュダイナミクス

2.1 不完全情報渋滞ゲーム

$n \geq 2$なるゲームにおいて, あるプレイヤーjが別のあるプレイヤーiの戦略を知ることができないような状況を考える. プレイヤーiの戦略をプレイヤーjが知ることができるとき, 有向辺(i,j)を定義することによって構成される有向グラフ$G=(P,A)$を可視グラフと呼ぶ. プレイヤーjが戦略を知ることができるプレイヤーの集合を$N^-[j] = \{i : (i,j) \in A\} \cup \{j\}$とする. 通常の渋滞ゲームでは$N^-[j] = P$が任意の$j \in P$に対して成立していた. 不完全情報渋滞ゲームでは, プレイヤーjにとって, s_iは$i \in N^-[j]$であるときに限り既知である. そこで, $i \notin N^-[j]$であるようなすべてのプレイヤーiについてs_iを$*$に置き換えてsからできるベクトルを$v_j(s)$と書く. ここで, $*$は対応する状態が未知であることを示す記号である. 任意の$i \in P$に対して$S_i^* = S_i \cup \{*\}$, $S^* = \Pi_{i=1}^n S_i^*$とする. 関数$\phi_i : S^* \to S$を(プレイヤーiの)仮説関数と呼ぶ. 仮説関数は$s^* \in S^*$の$*$である元のそれぞれに対してある戦略を代入したベクトルを返す関数であり, $v_i(s)$を元に$*$を含まないある状態$s' \in S$を得るために用いる. 具体的には, 仮説関数ϕによって, $s^* \in S^*$において$s_i = s_j = \cdots = s_m = *$であるプレイヤー$i, j, \cdots, m$の戦略が$s'_i, s'_j, \cdots, s'_m \in S_i$に置き換えられた状態$\phi(s^*)$を得たとする. このとき, $\phi(s^*)$を仮説関数ϕによる仮説と定義し, $\phi(s^*) = s^*(i, s'_i; j, s'_j; \cdots; m, s'_m)$と表記する. また, $*$を含む状態s^*から任意の仮説関数によって作られ得る仮説の集合を$\Delta(s^*)$と定義する. まず, 簡単のため, ゲームは対称で, 全プレイヤーは同一の仮説関数を用いるものとする.

2.2 不完全情報渋滞ゲームの近似ナッシュダイナミクス

可視グラフGに加えて, 各プレイヤーiに対する仮説関数$\phi = (\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n)$も与えられているとする. このとき, プレイヤー$i$の$s$に関する既知の情報$v_i(s)$から仮説関数$\phi_i$を用いて復元した状態$t = \phi_i(v_i(s))$が正しいと仮定したときに, プレイヤー$i$の戦略を$r$に変更したときの改善比は$\rho_t(i,r)$である.

ある定数を$\epsilon > 0$とする. あるプレイヤーiが戦略s_iをrに変更することで改善比$\rho_t(i,r) > \epsilon$を達成できるときのみ状態遷移を許すϵ-ナッシュダイナミクスを不完全情報下でのϵ-ナッシュダイナミクスと呼ぶ.

以降の議論を具体的にするために, 特に断りがない限り, 遷移は$\mathrm{argmax}_i \max_{r \in S_i} \rho_t(i,r)$を満たすプレイヤーが$\mathrm{argmax}_{r \in S_i} \rho_t(i,r)$を満たす戦略に遷移することによってなされるものとする.

2.3 悲観的な仮説関数と楽観的な仮説関数

プレイヤーが用いることができる仮説関数として, 悲観的な仮説関数と, 楽観的な仮説関数を定義する.

2.3.1 悲観的な仮説関数

悲観的な仮説関数によって想定された状態とは, プレイヤーによって実現され得る最大の改善比が, 最小となる状態であるとする. 具体的には, 状態 s^* におけるプレイヤー i に対する悲観的な状態を次式で定義する.

$\phi_{p,i}(s^*) = \mathrm{argmin}_{t\in\Delta(s^*)} \max_{r\in S_i} \rho_t(i,r)$

2.3.2 楽観的な仮説関数

楽観的な仮説関数によって想定された状態とは, プレイヤーによって実現され得る最大の改善比が, 最大となる状態であるとする. 具体的には, 状態 s^* におけるプレイヤー i に対する楽観的な状態を次式で定義する.

$\phi_{o,i}(s^*) = \mathrm{argmax}_{t\in\Delta(s^*)} \max_{r\in S_i} \rho_t(i,r)$

3 ゲーム A

我々の最終的な目的は, 一般的に ϵ-ナッシュダイナミクスが有限, すなわち ϵ-ナッシュ均衡に到達するためにゲームが満たすべき必要条件と十分条件を検討することであるが, 本稿では, いくつかの単純なゲームについて考察する.

具体的には, 次のゲーム A について考察する.
α-跳躍の条件を満たす同一の遅延関数 d を持つ辺 e_a, e_b が存在し, プレイヤーの取り得る戦略が $S_i = \{s_a, s_b : s_a = \{e_a\}, s_b = \{e_b\}\}$ であるような, 不完全情報 n 人対称渋滞ゲームを考える.

3.1 ゲーム A 中のプレイヤーのコスト

ゲーム A では, ある状態 s における i のコストは次式で計算できる.

$c_i(s) = \sum_{e\in s_i} d_e(r) = d(r)$
ただし, $r = |\{k \in P : s_k = s_i\}|$ とする. このとき, プレイヤー i が戦略を s'_i に変更し, 状態が s' となった後のプレイヤー i のコストは, $c_i(s') = \sum_{e\in s'_i} d_e(n+1-r) = d(n+1-r)$ となる. したがって, ある状態 s におけるプレイヤー i の改善比は, r および遅延関数 d を用いて次のように計算できる.

$\rho_s(i,r) = \frac{c_i(s)-c_i(s')}{c_i(s)} = \frac{d(r)-d(n+1-r)}{d(r)} = \kappa(r)$
辺の遅延関数 d_e は非減少関数であるので, κ も非減少関数である. また, $r \le \lceil \frac{n}{2} \rceil$ のとき, $\kappa(r) \le 0$ となる.

3.2 ゲーム A における悲観的なプレイヤーの遷移決定過程

個々のプレイヤーが悲観的な仮説関数に基づき遷移を決定する過程について述べる. 状態 $s \in S$ において, $P_a = \{i : s_i = s_a\}, P_b = \{i : s_i = s_b\}$ とする. 仮に, $|P_a| > |P_b|$ であるとする. ここで, あるプレイヤー i が得る, 不完全情報を含む情報は $v_i(s) \in S^*$ である. このとき, $|P_a| \ge |P_b|$ が成立している.

プレイヤー i の悲観的な仮説関数 $\phi_{p,i}$ は, $x \in \{j : s_j = *\}$ とすると,

$$\phi_{p,i}(v_i(s)) = \begin{cases} v_i(s)(x, s_b) & (i \in P_a) \\ v_i(s)(x, s_a) & (i \in P_b) \end{cases} . \quad (1)$$

なぜなら, $i \in P_a$ のとき, $\rho_{v_i(s)(x,s_a)}(i, s_b) = \kappa(|P_a|+1)$ かつ $\rho_{v_i(s)(x,s_b)}(i, s_b) = \kappa(|P_a|)$ であるから, $\kappa(|P_a|+1) \ge \kappa(|P_a|)$ が成立し, $i \in P_b$ のときも同様の議論が成立するためである. 結局, $\phi_{p,i}$ によって想定される x の戦略は, プレイヤー i 自身の戦略と異なる戦略であることに留意する.

ここで, $|P_a| \ge |P_b|$ であるため, $\kappa(|P_a|) \ge \kappa(|P_b|)$ が成立する. したがって, $\kappa(|P_b|) \le 0$ が成立する. 同様の考察により, 状態 s において $|P_a| = |P_b|$ であるときも, 仮説関数は (1) となり, いずれのプレイヤーも遷移しないことがわかる. 結局, プレイヤー i は $|P_a| > |P_b|$ であり, かつ $i \in P_b$ であるとき, あるいは $|P_a| = |P_b|$ であるとき常に遷移しない.

上記の不完全情報を元にした各プレイヤーの悲観的な遷移決定過程をまとめると, 次のようになる.

悲観的な遷移決定過程

1. m_0, m_1 を次のように定める.

$$\begin{cases} m_0 = P_a, m_1 = P_b \\ ((|P_a| > |P_b|) \vee (|P_a| = |P_b|) \wedge (i \in P_b)) \\ m_0 = P_b, m_1 = P_a \\ ((|P_a| < |P_b|) \vee (|P_a| = |P_b|) \wedge (i \in P_a)) \end{cases}$$

2. もし, $i \in m_0$ かつ $\kappa(|m_0|) > \epsilon$ であったならば, プレイヤー i は, 改善比 $\kappa(|m_0|)$ で遷移可能である. そうでないならば, i は遷移しない.

こうして, 個々のプレイヤーの遷移の可否が決定された上で, ϵ-ナッシュダイナミクスの仮定より, ϵ-ナッシュ遷移は改善比が最大となるプレイヤーを遷移させることで実行される.

3.3 可視グラフ G の補グラフの各頂点の入出次数がともに 1 のゲーム

まず, 簡単のため可視グラフ G の補グラフの各頂点の入出次数がともに 1 となっている場合について考察する. すなわち, G の補グラフはいくつかのサイクルから構成されている.

3.3.1 可視グラフ G の補グラフが (1 個の) 長さ n のサイクルである場合

補題 3.1. ゲーム A において, 可視グラフ G の補グラフが長さ n のサイクルとなっており, $\epsilon < \kappa(n-1)$ または $\kappa(n) \leq \epsilon$ が成立していて, プレイヤーが悲観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする. このとき, ϵ-ナッシュ均衡状態でないならば, ϵ-ナッシュ遷移が生じる.

証明. 状態 s が ϵ-ナッシュ均衡状態でないとき, $\epsilon < \kappa(|P_a|)$ である. そこで, P_a に属するあるプレイヤーが遷移することを示す.

(a) $\epsilon < \kappa(n-1)$ である場合
まず, $P_a \neq \emptyset$ かつ $P_b \neq \emptyset$ とする. 可視グラフ G の補グラフが長さ n のサイクルとなっていることから, $k \in P_a, j \in P_b, N^-[k] = \{j\}$ であるようなプレイヤー k, j が存在する. このとき, $\phi_{p,k}(v_k(s)) = v_k(s)(j, s_b)$ となる. この結果, プレイヤー k は自身の改善比を $\kappa(|P_a|)$ とするので, プレイヤー k は自身がこの改善比で ϵ-ナッシュ遷移できると決定し, ダイナミクスにより実際に遷移する. このとき, プレイヤー k に該当しないプレイヤーは, 悲観的な仮説関数を用いているために, 実際の状態 s とは異なる状態を想定するので, プレイヤー k より小さい改善比を想定することになる. 従って, 遷移はあるプレイヤー $k \in P_a$ によってのみ為され, これは ϵ-ナッシュ遷移である.

次に, $P_b = \emptyset$ とする. ある i の $v_i(s)$ において $x = j : s_j = *$ とすると, $\phi_{p,i}(v_i(s)) = v_i(s)(x, s_b)$ が成立する. これは任意の i について成立するので, 全てのプレイヤーが改善比として実際の $\kappa(|P_a|) = \kappa(n)$ ではなく $\kappa(|P_a| - 1) = \kappa(n-1)$ を想定する. ところで, $\epsilon < \kappa(n-1)$ を仮定していたので, このときも全てのプレイヤーが改善比 $\kappa(n-1)$ で ϵ-ナッシュ遷移できると決定し, ダイナミクスによりいずれかのプレイヤーが遷移する. この遷移は $\epsilon < \kappa(n)$ を満たすので, ϵ-ナッシュ遷移である.

以上より, この場合に補題 3.1 は成立する.

(b) $\kappa(n) \leq \epsilon$ である場合
状態 s が ϵ-ナッシュ均衡ではないならば, $1 \leq r \leq n$ を満たすある整数 r について, $\epsilon < \kappa(r)$ である必要がある. ところが, $\kappa(n) \leq \epsilon$ であるとき, κ の定義より $1 \leq r \leq n$ である任意の整数 r について $\kappa(r) \leq \epsilon$ となるため, 前提に反する. よって, この場合も補題 3.1 は成立する.

以上より, 補題 3.1 は成立する. □

補題 3.2. ゲーム A において, 可視グラフ G の補グラフが長さ n のサイクルとなっており, $\epsilon < \kappa(n-1)$

あるいは$\kappa(n) \leq \epsilon$が成立していて，プレイヤーが悲観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする．このとき，ϵ-ナッシュ均衡状態では，いずれのプレイヤーも遷移しない．

証明. (a) $\epsilon < \kappa(n-1)$ である場合

状態 s が ϵ-ナッシュ均衡状態であるとき，$\epsilon > \kappa|P_a| \geq \kappa|P_b|$ であるため，本来いずれのプレイヤーもϵ-ナッシュ遷移できないはずである．そこで，任意のプレイヤー i が $\phi_{p,i}(v_i(s))$ をもとに遷移しないと決定できることを示す．まず，$P_a \neq \emptyset$ かつ $P_b \neq \emptyset$ とする．可視グラフ G の補グラフが長さ n のサイクルとなっていることから，$k \in P_a, j \in P_b, N^-[k] = \{j\}$ であるようなプレイヤー k, j が存在する．このとき，$\phi_{p,k}(v_k(s)) = v_k(s)(j, s_b)$ となる．この結果，プレイヤー k は自身の改善比を$\kappa(|P_a|)$ とする．ところで，状態sは ϵ-ナッシュ均衡状態であることから，$\kappa(|P_a|) \leq \epsilon$ が成立している．このため，プレイヤー k は自身がϵ-ナッシュ遷移できないと決定する．また，プレイヤー k に該当しないプレイヤーは，ϕ_p により実際の状態 s とは異なる状態を想定するので，プレイヤー k より小さい改善比を想定することになる．従って，いずれのプレイヤーも遷移しないといえる．よって，この場合は補題 3.2 は成立する．

次に，$P_b = \emptyset$ とする．状態sはϵ-ナッシュ均衡状態であるから，$\kappa(n) \leq \epsilon$ であるはずである．これは仮定 $\epsilon < \kappa(n-1)$ に矛盾するので，このような場合は生じない．

以上より，この場合に補題 3.2 は成立する．

(b) $\kappa(n) \leq \epsilon$ である場合

κ の定義より $1 \leq r \leq n$ である任意の整数rについて $\kappa(r) \leq \epsilon$ であるので，いずれのプレイヤーも遷移しない．よって，この場合も補題 3.2 は成立する．

以上より，補題 3.2 は成立する．□

定理 3.1. ゲーム A において，可視グラフ G の補グラフが長さn のサイクルとなっており，$\epsilon < \kappa(n-1)$ または$\kappa(n) \leq \epsilon$が成立していて，プレイヤーが悲観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする．このとき，ϵ-ナッシュダイナミクスは $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ステップ以内でϵ-ナッシュ均衡状態に収束する．

証明. 遷移 $s \rightarrow_\epsilon s'$ が生じたとする．補題 3.1 により，遷移が生じたならばそれはϵ-ナッシュ遷移である．また，補題 3.2 により，ϵ-ナッシュ均衡状態が成立したならばϵ-ナッシュダイナミクスが停止するといえる．さらに，s' において戦略s_a を取るプレイヤーの集合を P'_a とすると，$|P'_a| = |P_a| - 1$ であることがわかる．ここで，関数κは，$r \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ のとき，$\kappa(r) \leq 0$ となることから，遷移の回数は最大でも $\frac{n}{2}$ 回となる．以上より，ϵ-ナッシュダイナミクスは $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ ステップ以内でϵ-ナッシュ均衡状態に収束する．□

3.3.2 可視グラフGの補グラフが 2 個以上のサイクルから構成されている場合

ここで，ゲーム A において，グラフ G の補グラフに長さn のサイクルが必ずしも存在していない場合を考える．具体的には，α-跳躍の条件を満たす同一の遅延関数dを持つ辺e_a, e_b が存在し，プレイヤーの取り得る戦略が $S_i = \{s_a, s_b : s_a = \{e_a\}, s_b = \{e_b\}\}$ であり，可視グラフ G の各頂点の入出次数がともに 1 となっている不完全情報n 人対称渋滞ゲームにおいて，悲観的仮説関数を用いたときに近似的ナッシュ均衡が実現しない場合の存在を示す次の定理 3.2 を示す．

定理 3.2. ゲーム A において，可視グラフ G の補グラフが 2 個以上のサイクルから構成されており，$\epsilon < \kappa(n-1)$ が成立していて，プレイヤーが悲観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする．このとき，ϵ-ナッシュ均衡状態ではないにもかかわらず，ϵ-ナッシュ遷移が存在しない場合がある．

証明. 状態$s \in S$ が ϵ-ナッシュ均衡状態であるとき，定義より $\kappa(|P_a|) \leq \epsilon$ が成立している．ここで，$|P_a| = \min\{r \in \mathbb{R} : \epsilon < \kappa(r)\}$ であり，かつグラフ G の補グラフにおいて P_a が長さ $|P_a|$ のサイクク

ルを成している状態 s' を考える. 明らかに, s' は ϵ-ナッシュ均衡状態ではない. G の補グラフの構造より, $s' \in S$ において, 任意のプレイヤー $k \in P_a$ について $N^-[k] = \{j\}$ であるようなプレイヤー j は P_a に属する. このとき, プレイヤー $k \in P_a$ が得る情報 $v_k(s) \in S^*$ においては, プレイヤー $j \in P_a$ の戦略が未知である. 情報 $v_k(s)$ のもとで, プレイヤー k の改善比は, 仮に $j \in P_a$ とすれば $\kappa(|P_a|)$ となり, $j \in P_b$ とすれば $\kappa(|P_a|-1)$ となる. よって, プレイヤー k は $\phi_{o,i}$ の性質により, プレイヤー j の戦略は自身の戦略と異なる s_b であると想定する. この結果, プレイヤー k は自身の改善比を $\kappa(|P_a|-1)$ であると想定する. $|P_a| = \min\{r \in \mathbb{R} : \epsilon < \kappa(r)\}$ であることから, $\kappa(|P_a|-1) \leq \epsilon$ となるため, プレイヤー k は自身が ϵ-ナッシュ遷移できないと決定する. その結果, ϵ-ナッシュダイナミクスにより遷移するプレイヤーは存在しない. 結局, この状態 s' は ϵ-ナッシュ均衡状態ではないが, ϵ-ナッシュ遷移は生じない. □

3.4 可視グラフ G の補グラフの各頂点の入次数が k 以下のゲーム

3.4.1 収束が可能である場合

補題 3.3. 可視グラフ G の補グラフの最大の入次数が k 以下であるゲーム A において, $\epsilon > \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であって, プレイヤーが楽観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする. このとき, 任意の初期状態から $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 回以下の遷移で ϵ-ナッシュダイナミクスが停止する.

証明. 状態 $s \in S$ において, $P_a = \{i : s_i = s_a\}, P_b = \{i : s_i = s_b\}$ とする. 仮に, $|P_a| \geq |P_b|$ であるとする.

$|P_a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるとき, 全てのプレイヤーは遷移しないため, ϵ-ナッシュダイナミクスが停止することを示す. プレイヤー $i \in P_a$ について, $|N^-[i]| \leq n-1-k$ であるから, P_a に属するプレイヤーが仮説関数によって想定する $|P_a|$ と, 実際の $|P_a|$ との誤差は最大 k となる. よって, プレイヤー i が想定する自身の改善比は最大 $\kappa(|P_a|+k)$ となる. ここで, $|P_a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であることから, プレイヤー i は ϵ-ナッシュ遷移が不可能となる. $i \in P_b$ の場合も同様.

$|P_a| > \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるとき, P_a に属するプレイヤーのみが遷移し, それ以外のプレイヤーは遷移しないことを示す. プレイヤー $i \in P_b$ について, $|N^-[i]| \leq n-1-k$ であるから, P_b に属するプレイヤーが仮説関数によって想定する $|P_b|$ と, 実際の $|P_b|$ との誤差は最大 k となる. プレイヤーは楽観的な仮説関数を用いることから, プレイヤー i が想定する自身の改善比は最大 $\kappa(|P_b|+k)$ となる. ところで, $|P_b| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるから, $\epsilon > \kappa(|P_b|+k)$ である. したがって, プレイヤー $i \in P_b$ による遷移は生じない. よって, 遷移したプレイヤーは P_a に属するプレイヤーであるといえる.

$i \in P_a$ が遷移した後も戦略 s_a を取るプレイヤーの集合を P'_a とする. $|P'_a| = |P_a|-1$ であるから, $|P_a|$ は遷移が生じるたびに単調に減少する. $|P_a|$ は最大 n であり, $|P_a| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ となるとき ϵ-ナッシュダイナミクスは停止するため, 遷移の回数は $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 回以下であることがわかる.

□

補題 3.4. 可視グラフ G の補グラフの最大の入次数が k 以下であるゲーム A において, $\epsilon > \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であって, プレイヤーが楽観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする. このとき, 状態 s が ϵ-ナッシュ均衡状態でないならば, ϵ-ナッシュ遷移が生じる.

証明. 状態 $s \in S$ において, $P_a = \{i : s_i = s_a\}, P_b = \{i : s_i = s_b\}$ とする. 仮に, $|P_a| \geq |P_b|$ であるとする. 状態 s がナッシュ均衡状態でないことから, $\kappa(|P_a|) > \epsilon > \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ が成立している. このとき, P_a に含まれるプレイヤーによる遷移が生じるが, P_b に含まれるプレイヤーによる遷移が生じないことを示す.

プレイヤー $i \in P_a$ について, $|N^-[i]| \leq n-1-k$ であるから, P_a に属するプレイヤーが仮説関数によって想定する $|P_a|$ と, 実際の $|P_a|$ との誤差は最大 k となる. プレイヤーは楽観的な仮説関数を用いることから, プレイヤー i が想定する自身の改善比は最小

$\kappa(|P_a|)$ となる. $\kappa(|P_a|) > \epsilon$ であるので, プレイヤー i は自身が遷移可能であると判断し, 遷移が生じる. このときの実際の改善比は ϵ より大きいため, これは ϵ-ナッシュ遷移である.

プレイヤー $i \in P_b$ について, $|N^-[i]| \leq n-1-k$ であるから, P_b に属するプレイヤーが仮説関数によって想定する $|P_b|$ と, 実際の $|P_b|$ との誤差は最大 k となる. プレイヤーは楽観的な仮説関数を用いることから, プレイヤー i が想定する自身の改善比は最大 $\kappa(|P_b|+k)$ となる. ところで, $|P_b| \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ であるから, $\epsilon > \kappa(|P_b|+k)$ である. したがって, プレイヤー $i \in P_b$ による遷移は生じない. □

定理 3.3. 可視グラフ G の補グラフの最大の入次数が k 以下であるゲーム A において, $\epsilon > \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であって, プレイヤーが楽観的な仮説関数を用いて遷移を決定するものとする. このとき, 任意の初期状態に対して $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 回以下の遷移で ϵ-ナッシュ均衡状態が実現し, ϵ-ナッシュダイナミクスが停止する.

証明. 可視グラフ G の補グラフの最大の入次数が k 以下であるゲーム A において, $\epsilon > \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + k)$ であって, プレイヤーが楽観的な仮説関数を用いて遷移を決定する場合に, 補題 3.3 より, 任意の初期状態に対して $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 回以下の遷移で ϵ-ナッシュダイナミクスが停止するといえる. また, 補題 3.4 より, ϵ-ナッシュダイナミクスが停止したならば, ϵ-ナッシュ均衡状態であるといえる. 以上より, 任意の初期状態に対して $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 回以下の遷移で ϵ-ナッシュ均衡状態が実現し, ϵ-ナッシュダイナミクスが停止することが示された. □

3.4.2 収束が可能でない場合

定理 3.4. 可視グラフ G の補グラフの最大の入次数が k 以下であるゲーム A において, $\epsilon < \kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor), k \geq 2$ であるとき, 任意の可視グラフおよび初期状態に対して常に収束する仮説関数のプレイヤーへの割り当ては存在しない.

証明. $\kappa(\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor) > \epsilon$ であるとき, $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor \leq |P_a|$ ならば均衡状態でない. 仮に, $k \in P_a, j \in P_b, N^-[i] = \{k, j\}$ であるような楽観的なプレイヤー i が一人でも存在すれば, そのプレイヤーが遷移を続けることが起き得る. よって, ダイナミクスが常に停止するためには楽観的な予測をし得るプレイヤーは存在できない. そこで仮に, 楽観的な予測をし得るプレイヤーが存在しないとする. このとき, $\lceil \frac{n}{2} \rceil + \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ 人のプレイヤー $i \in P_a$ において常に $j \in P_a, N^-[i] = \{j\}$ が成立しているならば, 楽観的に想定するプレイヤーが存在しないことから, 遷移できるプレイヤーは存在しない. よって, ナッシュ均衡状態ではないが, ϵ-ナッシュダイナミクスが収束し, ϵ-ナッシュ均衡状態は実現しない. □

4 まとめ

本稿では, 資源の集合を多数の使用者で共同利用する状況をモデルとした渋滞ゲームにおいて, プレイヤーごとに異なる, 他のプレイヤーの戦略に関する不完全な情報を定義した. また, この不完全情報をもとに, 簡単なゲームにおける近似的ナッシュダイナミクスの性質について考察した. 今後は, より一般的なゲームにおける, 不完全情報を使用した近似ナッシュダイナミクスの性質を明らかにする.

参考文献

[1] S. Chien and A. Sinclair: "Convergence to approximate Nash equilibria in congestion games", *Proceedings of the eighteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 169-178, 2007.