数理解析研究所講究録
第1711巻 2010年 106-129

中学校・高等学校の数学教師の養成における
数学専門科目の標準的なモデルの構想

滋賀大学教育学部　丹羽　雅彦　(Masahiko　Niwa)
Faculty of Education, Shiga University
鳴門教育大学　松岡　隆　(Takashi　Matsuoka)
Naruto University of Education
奈良教育大学　川﨑　謙一郎　(Ken-ichiroh　Kawasaki)
Nara University of Education
京都教育大学　大竹　博巳　(Hiromi　Ohtake)
Kyoto University of Education
熊本大学教育学部　伊藤　仁一　(Jin-ichi　Itoh)
Faculty of Education, Kumamoto University

1. はじめに

教育職員免許法において、教科専門科目の必修単位が40単位から20単位に減少して以後、私たち教員養成大学・学部に所属する数学教員の多くは、「中学校・高等学校の数学教師になろうとしている学生に対する数学の専門教育が充分にはできていない」という危機感を抱いてきた。また、大学に所属する数学者の多くは、「先の学習指導要領の改訂によって大学に入学してくる学生の数学の能力が著しく低下している」ことに危機感を抱いている。

日本数学会の教員養成大学・学部数学教員懇談会では、このような危機感を背景にして、「算数・数学教育および教員養成における数学専門教育の現状を変えるアクションを起こさなければならない」と決意して、平成20年度から「数学教師として必要な数学能力形成に関する研究」というプロジェクトを三重大学の蟹江幸博教授を代表者として立ち上げた。

私どもプロジェクト第1チームでは、『教員養成大学・学部の数学教科専門科目の講義内容の現状調査と理想的なモデル案の作成』を目指して活動を開始した。「数学教師になる学生にはここまでは身につけて欲しい」と多くの数学者が考えるようなモデル案を作成することを目標にして、段階的に構想を進めてきた。平成20年度に行った第1回調査「教員養

成大学・学部の数学専門科目の単位数と科目名の調査」では、国立大学法人教員養成大学・学部の数学専門科目の必修単位は平均で28単位程度設定されているが、数学の免許取得希望者の大多数が受講する科目は免許法上の必修単位 20 単位にしばられて不十分になっている現状が観察された（[6]参照)。私たちは、免許法20単位にしばられない理想的なモデル案を構想しなければならないと考えた。チームで議論を重ね、仮のモデル案（教師を目指す学生に、受けさせたい講義内容の項目を並べたもの）を作成した。

さらに、教員養成大学・学部で数学専門として、どんな内容の講義がなされているかの現状を把握する必要があった。当初は各大学のシラバスを調べればよいのではと考えたが、調べるには不可能なほど科目数が多数あること、それぞれの科目が数学の免許のための科目かどうかを判断することの困難さなど、この方向での調査は挫折した。そこで、仮のモデル案を基にアンケート形式により、日本数学会　教員養成大学・学部数学教員に会する大学の数学専門科目担当教員の協力してもらって、現状と意見を調査することとした。本講究録の[7]で報告した通り、多くの大学・学部の協力を得て、上記の現状把握に加えて、数学専門科目担当教員が「数学教師志望学生にどこまでの内容を受けさせたいと考えているか」の意見についても把握することができた。これらは、これまで調査されたこともなく、はじめて把握することができたことである。この本チーム第2回調査は、私たちのプロジェクトの素晴らしい成果であると考える。

私たちは、この成果を「数学教師を志望する学生の数学専門能力の育成の充実」へと繋げていかねばならないと考えている。数学の免許を取得しようとする学生に対する数学専門科目の標準的モデルを構想し、教員養成大学・学部そして数学の免許の課程認定を行っているすべての大学・学部に発信していきたい。

2．　標準的なモデル案の構想に対する観点

数学の免許を取得しようとするすべての大学・学部の学生に対する数学専門科目の「標準的モデル案」(数学教員養成のための数学専門標準）を考えることが私たちの最終的な目標であるが、本チームの現段階の目標は、教員養成大学・学部における数学教員の養成を対象にした「標準的モデル案」を構想することである。

『モデル案』を構築するには、数学教師となるために大学で学ぶべき数学専門科目の講義科目およびそれらの講義内容の項目を並べれば完成というものではない。講義内容の項目を関連付け、肉付けして、息を吹き込む必要がある。つまり、科目として、単元ごとのまとまりを作り、教員養成課程の数学専門科目としてふさわしい目的と資質・能力の育成目標を明確にする必要がある。そのような検討を行うためには、講義項目のまとまり（“単元”と呼ぶ）に、「育成すべき資質・能力」「小中高の算数・数学教育との繋がり」「数学の

他分野や歴史との繋がり」「数学以外の学問分野や現実世界との繋がり」を、できる限り広くかつ詳細に記入することが必要であると考える。これらは、それぞれの講義を実際に構築する場合に非常に役立つであろう。

さらに、教員養成大学・学部の数学専門科目については、昨年度の本チームの議論によって、次のような観点が重要であるということが本チームの共通認識に到っている。それを昨年度の講究録の報告[6]から、引用してここに挙げる。

(A)数学教員の養成における数学専門科目の目的：育成すべき資質・能力

数学専門科目によって育成すべき資質・能力とは、

(1) 算数・数学を学校教育において教えることの意義を理解し、数学の本質を正しく認識して自信をもって数学を指導できる能力。

(2) 抽象的思考に慣れ、論理的に正しい思考を展開し表現できる能力。

であり、そのために具体的には、次のような能力の育成をめざすことが求められる。

① 学校教育における算数・数学科の内容の背景にある数学の理論の本質を理解し、教科内容において重点をおくポイントおよび必要性の低さを的確に見抜く能力。

② 学校数学の内容における重要なポイントに対して独自の工夫を加え、内容を明確で分かりやすく説明できる能力。

③ 子どもの発言やつぶやき、またつまずきに含まれる発想の芽や本質的な点を見逃さず拾い上げ発展させる授業が展開できる能力。

④ 知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫して作りだし、子どもの興味・関心をひき出す授業を展開できる能力。

⑤ 数学の面白さや美しさを伝えて、子どもの興味・関心を育てる能力。

⑥ 子供が数学を創造するような知的探求の場とする授業を実践できる能力。

⑦ 教科内容がどのように変更されようと、主体的な教材研究を行い的確な対応ができる能力。

これらの目的を達成できる教員を育成するためには、養成段階である大学教育において充実した数学専門科目の教育が絶対に必要であるというのが、教員養成大学・学部数学教員懇談会に会している日本数学会会員の共通の認識であったし、今もそうであると考えている。

3．教員養成学部における数学専門科目の標準的モデル（骨子）の提案

教員養成大学・学部に対する「数学専門科目の講義内容の調査」の結果（本講究録[7]を参照）とこれまでの私たちのチームの議論を踏まえて、教員養成学部における数学専門科目の標準的モデルの骨子（分野、単元、講義内容の項目）の第一案を提案する。

数学教師として育成したい資質や能力、そのために教授すべき数学的内容の『モデル』は、これまでの数学教育の歴史や教員養成に関わった教授経験が示しているように、ある一つの理論（数学観、数学教育理論）から原理的に展開できるというものではないであろう。数学自身の歴史的な発展によって、また、数学を応用する種々の学問、科学・技術の発展によって、その内容は、推進されたり制約されたりするものである。また、数学教育に対する社会的要請も時代とともに移り変わっている。例えば、数学教育の現代化の時代には、数学の自律性と独自性が前面に出てきた。しかし、それ以後、数学は自然科学、情報科学、経済学など新しくかつ非常に広範な応用分野をもつことになった。現在では、OECD・PISA の影響もあって、数学の日常生活、社会生活、職業生活に果たす役割が数学教育の目的として強調されている。

私たち教員養成学部の数学専門の教員は、数学専門教育のあり方に関して、とりまく社会の変化に対応して重点的課題を変更する一方、変化に流されてはいけない数学のあり方については守る努力をしてきた。何よりも「優れた数学教師を育てること」を目的として、私たちが種々の努力や工夫をしてきた経験の中には、どんな内容をどのように教えるべきかに答えるための非常に重要なファクターがあると考えている。その意味で、[7]の本チームの調査結果は最も重要であると考え、標準的モデル案にも反映させるべきだと考えた。

数学教師を志望するすべての学生にぜひとも受けさせたい講義内容の項目は、次の通りである。

数学専門科目の標準的モデル（骨子）

分野	単元	講義内容の項目
線型代数	線型代数	1. 行列式の置換を用いた定義，行列式の展開と計算法. 2. 行列の定義，行列の演算，正則行列，逆行列の計算法. 3. 数ベクトル空間，線型写像とその行列表示. 4. 連立 1 次方程式の解法（クラメルの公式，掃き出し法）. 5. ベクトル空間，一次独立・一次従属，部分空間，基底・次元. 6. 線型写像と行列の階数の概念. 核・像の次元公式. 7. 一般の連立 1 次方程式の解法.

		8. アフィン部分空間，内積・外積，面積・体積等の幾何学的性質. 9. 固有値，固有ベクトル，行列の三角化，対角化. 10.内積，計量ベクトル空間，直交直和分解. 11.対称行列の直交行列による対角化. 12. 2次曲線・2次曲面の分類.
微分積分	1変数 微分積分	1. 実数の連続性. 中間値の定理，最大値・最小値の定理. 2. 微分の定義. 微分法（和・差・積・商の微分法，合成関数の微分法）. 3. 逆関数・無理関数の導入，逆関数の微分法. 4. ロルの定理，平均値の定理，その応用. コーシー型平均値の定理，不定形の極限値（ロピタルの定理）. 5. 歴史的・文化的に重要な関数たち（多項式関数，三角関数，指数関数，対数関数，双曲線関数，逆三角関数等）. 6. 微分法の応用（関数の増減，大小関係等）. 7. 高階導関数. テーラーの定理. 8. マクローリン展開とその応用. 9. 定積分の定義. 微分積分学の基本定理. 10.積分の計算法（変数変換，部分積分法）. 11.回転体の体積・表面積. 12.曲線の長さ. 13.積分の級数への応用.
	多変数 微分積分	1. 2変数関数の1変数関数との違い. 偏微分の考えと計算法. 2. (全)微分可能性との関係. 合成関数の偏微分法とヤコビ行列. 合成関数の偏微分法の応用と計算法. 3. 2変数テーラーの定理. 2変数関数の極大・極小. 4. 2変数陰関数の定理. 陰関数の極値. 平面曲線のグラフの描き方. 5. 一般の陰関数の定理. 条件付き極値問題（Lagrange の未定乗数法）. 6. 重積分の考え方. 1変数関数の積分との違い. 7. 累次積分法による重積分の計算法. 重積分の変数変換と計算法. 8. 広義重積分の考え方と計算法. 9. 線積分の考え方. 曲線の長さ. 10.面積分の考え方，曲面積の計算法.
集合と論理の基礎	集合・写像・論理の基礎	1. 集合の基本的記号. 簡単な論理（特に∀∃を含む述語論理）. 2. 写像，全射・単射・全単射. 逆写像の定義と性質. 3. 同値関係・類別・商集合の定義. 例(分数，ベクトル等). 4. 順序関係. 例(数の大小関係，集合の包含関係，整数の整除関係等) 5. 有限集合の基数. 集合の濃度. 有限集合と無限集合の違い.

		6. 可附番濃度（自然数，整数，有理数，代数的数の集合）． 7. 連続濃度（実数の集合），Cantor の対角線論法.
代数学	初等整数論	1. ユークリッドの互除法. 1 次不定方程式の解法. 2. 合同式の定義と性質. 1 次合同方程式の解法. 3. n を法とする整数. 乗法構造と *Fermat* の小定理. 4. *Fermat* の小定理の応用（無限循環小数. RSA 暗号系の紹介.） 5. 中国式剰余定理(連立 1 次合同方程式). 環同型定理との関係. 6. 連分数. 無理数の近似.
	群の基礎	1. 群の定義と簡単な性質. 2. 可換群の例：整数の剰余類，巡回群. 3. 非可換群の例：置換群，行列群，多面体群. 4. 部分群. 準同型写像，正規部分群，剰余群. 5. 準同型定理. 同型定理. 6. 生成元と関係式. 7. 群作用. シローの定理.
	可換環の基礎	1. 環，可換環，整域の定義と簡単な性質. 2. 可換環のイデアルの定義と例：$\boldsymbol{Z}$ のイデアル等. 3. 素イデアル・極大イデアル. 剰余環，環準同型定理. 4. 多項式環. 多項式の既約性(アイゼンシュタイン判定法，ガウスの補題) 5. ユークリッド整域，単項イデアル整域，一意分解整域.
	体の基礎	1. 体の定義と簡単な性質. 2. 有限体. 冪構造と応用（巡回符号の紹介）． 3. 体の代数拡大・超越拡大. 拡大次数. 最小多項式. 4. 体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理）． 5. 定木とコンパスによる作図問題.
	ガロア理論	1. ３次・４次方程式の解法. 2. 対称式と交代式（対称式の基本定理. ニュートンの公式.） 3. 共役の原理. 群の不変体. ガロア拡大体. 4. ガロアの基本定理. 5. 円分体. 巡回拡大体. 6. 方程式の可解性.
幾何学	初等幾何	1. ユークリッド幾何. 2. 非ユークリッド幾何. 3. 共点・共線定理（五心，チェバ・メネラウスの定理，九点円等）． 4. その他の定理・問題（アポロニウスの円，作図問題等）． 5. 射影幾何の定理（デザルグの定理，パップスの定理等）．

	解析幾何	1. 直線と平面の方程式. 2. 二次曲線の性質. 3. 二次曲線の分類. 4. 二次曲面の性質.
	いろいろな変換	1. 等長変換の定義と例. 2. 平面の等長変換の分類と合成. 3. 相似変換, アフィン変換.
	距離と位相	1. 距離空間の位相（開集合, 閉集合, 連続写像等）. 2. 位相的性質（連結性, コンパクト性等）.
	位相幾何	1. 連続変形. 位相同型. 2. 曲面の位相（オイラー数, 向きづけ可能性等）. 3. 閉曲面の位相的分類. 4. 閉曲面のホモトピー同値. 基本群.
	微分幾何	1. 平面曲線の局所的性質（孤長パラメータ, 曲率, 定曲率曲線等）. 2. 空間曲線の局所的性質（曲率, 捩率, フレネ・セレの公式） 3. 平面曲線の大域的性質（回転数, 4 頂点定理, 等周不等式, 定幅曲線等）. 4. 空間曲線の大域的性質（閉曲線の全曲率等）. 5. 曲面の基本（第 1・第 2 基本量, 法曲率, ガウス曲率, 平均曲率）. 6. ガウス曲率の意味（ガウス写像, 驚異の定理等）. 7. 平均曲率の意味（極小曲面等）. 8. 測地線（最短性, 測地線の方程式等）. 9. ガウス・ボンネの定理.
	組合せ幾何	1. グラフ理論入門. 2. 多面体の幾何.
解析学	複素関数論	1. 複素数平面 2. 複素微分. 正則関数の定義と性質. 3. 整級数. テーラー展開. 4. 複素変数の指数関数・対数関数・三角関数. 5. 複素積分, コーシーの積分定理, コーシーの積分公式. 6. ローラン展開, 有理型関数, 孤立特異点. 7. 留数定理. 積分計算への応用.
	微分方程式	1. 微分方程式と数理モデル. 2. 初等関数を定める微分方程式. 3. 常微分方程式の初等解法（変数分離法など）. 4. 線型微分方程式（解の重ね合せ, 解空間, 定数変化法等）. 5. 解の存在と一意性.

	フーリエ解析	1. フーリエ級数. 2. ヒルベルト空間. 3. フーリエ変換, フーリエ逆変換. 4. 偏微分方程式への応用.
確率論と統計学	確率論	1. 順列・組合せ. 重複組合せ. 包除原理等. 2. 標本空間, 事象. 確率の概念(経験的確率, 先験的確率, 公理論的確率). 3. 確率変数の概念. 確率関数・確率密度関数, 確率分布. 4. 離散型確率分布の例（二項分布, 幾何分布, ポアソン分布等）. 5. 連続型確率分布の例（正規分布, 一様分布, 指数分布等）. 6. 条件付き確率の定義, ベイズの定理, 確率変数の独立性. 7. 期待値, 分散（標準偏差）, 確率母関数（モメント母関数）. 8. 結合分布, 相関係数, 共分散, 条件付き期待値. 9. 極限法則：大数の法則. 中心極限定理. 10.確率過程モデル（マルコフ連鎖. ランダムウォーク）.
	統計学	1. データの特性値（平均値, 中央値, 分散, 標準偏差, 偏差値）. 2. 資料の整理（度数分布表, 度数分布図）. 3. ２次元のデータ（共分散, 相関係数, 相関図, 回帰曲線等）. 4. データの処理（t分布, F分布等） 5. 点推定（母集団と標本, 不偏推定, 最尤推定, 種々の推定）. 6. 区間推定（正規分布の母平均, 母分散の推定等）. 7. 仮説検定（母平均の検定, 等分散の検定等）. 8. 適合度検定：カイ２乗分布.

[上の表に関する注意]　教育職員免許法では、数学専門科目（「数学」の教科に関する科目）は、「代数学」「幾何学」「解析学」「確率論/統計学」「コンピュータ」の５領域に分かれているが、次の理由で５領域とは異なる上記のような分野構成とした。

「線形代数」と「微分積分」は、多数の大学で教養教育科目の範疇で科目が開講されているので、５領域とは別分野として設定した。もし単元「多変数微分積分」を教養教育科目ではできないときは、「解析学」分野で行うべきであろう。

「集合と論理の基礎」の内容は、数学教育専攻（または別名称）の入門科目等で扱うことや、その部分々々を他の分野の導入段階に入れることも多く、別分野として設定した。

「コンピュータ」については、各大学の扱いは多様で、標準的な内容を設定することが困難であったので今回は省いている。

4. 標準的モデル案（骨子）を基とした授業構成に関する解説

いくつかの単元に対して、標準的モデル案（骨子）を基とした授業構成に関する解説を例示する。

標準的モデル案（骨子）は、『学問的な数学』による講義内容の項目について、これだけは講義内容として扱いたいということを示しているが、教員養成大学・学部の数学教員が授業として構成する場合には、教員それぞれの専門性を生かし、様々な授業方法（講義形式、演習を重視、課題解決型など）を工夫して用い、大学教育として自由で質の高い教育を目指したい。2節に述べたいくつかの観点や以下の表のように「育成すべき資質・能力」「小中高の算数・数学教育との繋がり」「数学の他分野や歴史との繋がり」「数学以外の学問分野や現実世界と繋がり」の各欄を用意しておくことが授業構成にとって重要な意味を持つと考えている。

以下は、本チームの構成する教員がこれまでの授業の経験を踏まえて、授業構成例を述べたものである。担当者は、(1) 丹羽雅彦、(2)松岡隆、(3)川﨑謙一郎、(4)大竹博巳。

(1) [分野]　代数学　[単元]　初等整数論

講義内容の項　目	1. ユークリッドの互除法. 1 次不定方程式の解法. 2. 合同式の定義と性質. 1 次合同方程式の解法. 3. n を法とする整数. 乗法構造と *Fermat* の小定理. 4. *Fermat* の小定理の応用（無限循環小数. RSA 暗号系の紹介）. 5. 中国式剰余定理(連立 1 次合同方程式). 環同型定理との関係. 6. 連分数. 無理数の近似.
育成すべき資質・能力	・ユークリッドの互除法によって, 2 整数 a,b の最大公約数 d および $ax+by=d$ を満たす整数 x,y を求めること. ・最大公約数を求める方法に多様性があることの理解. ・1 次不定方程式, 1 次合同方程式, 連立 1 次合同方程式を解くこと. ・中学校・高等学校で学んだ方程式と同じ所, 異なる所への理解. ・合同の概念によって通常とは異なった数の体系が構成されることの理解. ・n を法とする整数における演算への理解：群構造・巡回性. ・隠れている群(乗法群)によって, 整数や無限小数の性質が説明できることの理解. ・無限小数とは異なった, 連分数による実数の表記法および近似法の理解.
小中高の算数・数学教育との繋がり	・小学校・中学校の算数科・数学科の「数と計算」の領域に関連して, 数の拡大・構成の代数学的な理解. ・特に、整数の除法において, 数の世界を分数に拡げて 0 以外の除法を可能にする考えと整数の世界で余りのあるわり算を考えることの違い.

	・中学校・高等学校における，方程式について、考える世界を変えるとどのように違ってくるか．
数学の他分野や歴史との繋がり	・整数論のいくつかの古典的な話題を扱う．①ユークリッドの互除法は，名称の通り，ギリシア時代から知られていた共通の基準量を見いだすアルゴリズムである．②中国式剰余定理は，名称の通り，中国で古代から知られていたものである．③ディオファントスに始まり，フェルマーの研究で有名な不定方程式も一部ふれる．④オイラーも登場する．⑤連分数は，ラグランジュの研究で知られる．等々．数学史の有名な話題とともに様々な関連する問題が知られている． ・中国式剰余定理は，群・環等の準同型定理の芽生えであり，初等整数論で扱う多くの話題は抽象的な代数学と密接に繋がっていく． ・初等整数論の上記の項目に続く話題としては，２次剰余，ルジャンドル記号，ペル方程式，２次不定方程式，２元２次形式，２次体の整数論などがある． ・円周率 π の近似． ・連分数はモデュラー性の概念に繋がる． ・フィボナッチ数列． ・フラクタル幾何．
数学以外の学問分野や現実世界との繋がり	・周期性を持つ事象（カレンダー，時計，干支等）． ・黄金比/白銀比などが現れる事象（パルテノン神殿，A4 等の用紙の規格等）． ・暗号理論：①素因数分解の困難さを基とする RSA 暗号系．②離散対数問題の困難さを基とする ElGamal 暗号系．

[解説]

[単元]初等整数論の授業は、通常の１セメスター(2 単位)の授業の半分程度、すなわち、6～7 回の授業と１回の試験による構成を想定している。(ただし、下に述べるように一まとまりの授業構成でなく、他の単元とミックスして授業を構成することも可能である。)

この[単元]初等整数論の内容については、理学部数学科の「代数学」の授業で扱われるのは稀であるが、教員養成学部の「数学」教員免許に必要な代数学分野の教材としては広く採用されている。(本講究録[７]) その理由をまず考えてみよう。(なお、情報関連学部・学科においても、情報通信理論、暗号理論、符号理論などのための基礎的内容として、やはり広く教授されていることに注意する。)

大学で学ぶ代数学で、その基礎的部分として、群・環・加群・体などの代数的構造が扱われるのが普通である。教師を目指す学生がこれらの内容を学ぶことの意義は、数（自然数、整数、有理数、実数、複素数）とそれらの演算に関する深い理解に繋がることが挙げられる。さらに、2 節(A)の数学専門科目により獲得すべき資質・能力の項で述べた「抽象的思考に慣れ、論理的に正しい思考を展開し表現できる能力」を形成するために、「集合と

論理の基礎」「距離と位相」などの分野とともに、論理の基礎訓練に適した題材として重要な役割をもっている。しかしながら、講義が抽象的な定義・定理・証明の羅列となっては教員養成学部の学生にとって苦痛になるばかりである。身近な数の世界の発展としての法 n の世界における演算の性質を調べて、それらを整数論の種々の問題や暗号・符号など現代的な課題に応用することや、整数論の様々な歴史的な話題との関連を学ぶことによって、2節(A)の「④知的好奇心を呼び起こす教材や数学的活動を創意工夫して作りだし、子どもの興味・関心をひき出す授業を展開できる能力」「⑤数学の面白さや美しさを伝えて、子どもの興味・関心を育てる能力」を育成することに資すると、多くの教員養成学部では考えられているのである。初等整数論は、子どもたちに興味・関心を引き出させる数学的に興味ある話題の宝庫でもある。

[単元]初等整数論の[分野]代数学における扱い方には、大別して2つの授業構成がある。

① 群・環・加群・体などの代数的構造に関する授業に入る前に、まとまった形で講義をすることで、抽象的な理論の導入の役割を与えること。

② 「群の基礎」「可換環の基礎」「体の基礎」などの単元を進めながら、抽象的な内容の理解を助ける具体例として初等整数論の話題を用いること。

どちらがよいかは一概には言えない。いずれの授業構成をとる場合も、代数系の抽象的な理論に比べて、受講生は高い理解力を示す（計算法を演習方式で学ばせれば、ほとんどの受講生が計算だけなら満点をとれるようになる）し、これに続く話題を学んでみたいと思うなど興味を示す比率も極めて高い。従って、成功体験のうえに関心を育てながら、話題の裏にどのような数学があるかを考えさせて、抽象的な理論や証明の価値をも伝えていくのが適切であろうと考える。計算をしたり、図示したりすることで、自ら考えを進めることができるようになることが、数学を理解するのに重要な要素だからである。

ユークリッドの互除法、1 次不定方程式の解法、1 次合同方程式の解法、連立 1 次合同方程式の解法等の原理については、証明も易しく学生は困難なく理解できるであろう。方程式を解くなどの計算については、順次繋がりがあり、具体例の計算演習を行うことで解法の定着が図れる。これらの計算は、n を法とする整数における乗法群構造の理解へと繋がる。また、*Fermat* の小定理の証明には様々な方法があるので、抽象代数への移行を意識して多様な証明を紹介することが可能である。さらに、無限小数、暗号、符号などへの応用を紹介することでより関心を深めることができる。n を法とする整数において、加法は商集合を構成するために必要であり、乗法の中には整数の秘密が隠れているという面白さを感じさせたい。

上記の表中の「小中高の算数・数学教育との繋がり」「数学の他分野や歴史との繋がり」「数学以外の学問分野や現実世界との繋がり」の欄をさらに充実させることにより、より幅広い、楽しい話題に溢れた授業を構成することができるであろう。

(2) [分野]　幾何学　[単元]　初等幾何

講義内容の項目	1. ユークリッド幾何. 2. 非ユークリッド幾何. 3. 共点・共線定理（五心，チェバ・メネラウスの定理，九点円等）. 4. その他の定理・問題（アポロニウスの円，作図問題等）. 5. 射影幾何の定理（デザルグの定理，パップスの定理等）.
育成すべき資質・能力	・小学校の図形領域に現れる辺，頂点，角，角度，垂直，直角等の概念を正しく理解している. ・公理と論証の意義を理解している. ・中学・高校で学んだ平面幾何の歴史的特性や公理体系を理解する. ・中学・高校で学んだ平面幾何の内容の発展的な取り扱いができる. ・長さ，角度の概念を必要としない定理群の存在を知り，初等的に記述できる幾何学の奥深さを理解する. ・初等幾何を球面幾何や非ユークリッド幾何と比較し相対化して理解できる. ・幾何学を現実世界の問題に結びつけて考えることができる.
小中高の算数・数学教育との繋がり	・小学校の図形教育の大半は，ユークリッド幾何から構成される. ・中学・高校で学ぶ平面幾何は，ユークリッド幾何学の一部である.
数学の他分野や歴史との繋がり	・和算の幾何問題の多くは，三平方の定理の豊富な応用例である. ・近年発展してきた折り紙幾何（紙を折ることが生み出す幾何学）に初等幾何が生かされている. ・合同変換・相似変換は，等長変換やアフィン変換などに一般化される. ・初等幾何の問題の多くは，解析幾何を用いて解くこともできる. ・球面三角形の面積公式はガウス・ボンネの定理に一般化され，曲面の微分幾何に繋がる. ・フェルマーの問題やファニャーノの問題などは最適化問題に繋がる. ・フラクタル集合の本質は，部分と全体の相似関係にある. ・作図問題を通しガロア理論と繋がる.
数学以外の学問分野や現実世界との繋がり	・コピー用紙が白銀比をもつ理由. ・折り鶴の折り方は三角形の内心を本質的に利用している. ・曲尺を用いた平方根・3乗根の求め方（相似の応用）や円の直径の求め方. ・モアレ（干渉縞）の発生原理には，初等幾何によって説明できるものがある. ・射影は透視画法の基礎概念である. ・目に映る像や写真などの画像は平面への射影である. ・社会活動の様々な側面で論理的思考が用いられている.

[解説]

[単元]初等幾何の授業時数は、通常の１セメスター（２単位）の半分程度を想定している。まず，講義内容の各項目について説明する。

1. ユークリッド幾何

古代ギリシアで発展したユークリッド幾何学は，公理体系による構成と非計量的であること（量を数値化せず扱うこと）の２つの大きな特徴をもつことを説明する。さらに，中学・高校の平面幾何はこの強い影響下にあり，非計量的で，実質的に独自の公理系（直角がすべて等しいこと，平行線と同位角の関係，三角形の合同・相似条件）上に構成されているとみなせることを述べる。この構成を説明するためには，中学・高校の平面幾何の全項目間の関連を表にして示すことが有効である。

2. 非ユークリッド幾何

平行線公理にまつわる話題として，球面幾何や非ユークリッド幾何について触れ，初等幾何の設定が唯一無二のものではないことを理解させる。

3. 共点・共線定理（五心，チェバ・メネラウスの定理，九点円等）

初等幾何の大きな部分を占める共点・共線定理，すなわち，３直線が１点で交わる，または3点が１直線上にあることに関する定理のうち，三角形の五心，チェバ・メネラウスの定理，オイラー線など代表的なものを紹介し，学校で学ぶ幾何をさらに深めていく。共点・共線定理と類似の共円定理である九円点の定理についても触れる。

4. その他の定理・問題（アポロニウスの円，作図問題等）

多様な定理や問題を示すことにより，初等幾何の面白さ・豊かさを感じさせる。

5. 射影幾何の定理（デザルグの定理，パップスの定理等）

長さ・角度の概念を必要としない幾何学が存在することを示し，幾何に対する見方を拡げる。直線，二次曲線，交点の概念のみで記述される共点・共線定理を紹介し，射影幾何独特の美しさを伝えるとともに，円錐曲線が射影変換で移りあうことを、解析幾何を用いて説明し，幾何の問題に対する代数的手法の有効性を理解させる。

[単元]初等幾何の内容は、理学部数学科の「幾何学」の授業で扱われることは殆どないが，学校で学ぶ平面幾何の直接的な発展であることから，教員養成学部の「数学」教員免許に必要な幾何学分野の教材として広く採用されている。(本講究録[7]) しかし，単に初等幾何の内容を順々に学んでいくだけでは，学校での幾何の世界が更に大きく発展していくことを知るのみに留まり，数学教師としての資質・能力の養成に貢献するには不十分であろう。そこで，２節(A)に掲げた諸要素，特に①，④，⑤，⑥に関するものとして以下の3点を重視する必要があると考える。

a. 学校で学ぶ幾何の特性
b. 学校で学ぶ幾何から，設定の一般化などにより発展的内容を作ることができること
c. 現実世界との繋がり

aの「学校で学ぶ幾何の特性」とは，非計量的かつ独自の公理系上で構成されていることであるが，既に述べたように，これらは講義内容の最初の項目「ユークリッド幾何」で扱われる。さらにそこで以下の説明を加える。中学・高校の平面幾何は論証を主とするが，その理由として論証能力の涵養が挙げられる。しかし，この理由のみでは，例えば二等辺三角形の底角が等しいなど，生徒にとっては直観的に明らかでわざわざ証明する必要を感じないものまで，なぜ証明させるのかといった疑問を説明できない。これは，中学・高校の平面幾何が一つの公理系からすべてを導くという構成をとっているため，たとえ自明なことであっても公理系に含まれないものはすべて証明が必要となることから説明できる。中学・高校で採用されている公理系は，学校での内容に到達するまで多くの準備を費やす必要のあるユークリッドの公理系ではなく，学校での使用に適したものが選ばれていることを注意する。

bの「発展的内容」とcの「現実との繋がり」については，演習を中心に進めることが望ましい。可能であれば，初等幾何に１セメスターの全部を費やし，その半分程度の時間をこの演習に割り当てることが，教師としての資質・能力の養成により有効であろう。その余裕がない場合でも，授業内容を精選して演習の時間を大幅に取り入れることが望ましいと考える。演習に多くの時間がとられ授業で扱える知識の全体量は少なくなるが，自分の頭で工夫させ，また学生間で議論させることにより，より深い理解と多様な発想を育てることが最も大事なことと考えるからである。

bの「発展的内容」の題材例としては，例えば四角形の合同条件を求めさせるなど，中学・高校における設定を少し変えることや一般化することで容易に作られ，しかも結果の予想が難しく興味をそそるようなオープンエンド的課題を与える。また，三平方の定理の様々な証明法や，和算の幾何問題への応用などを取り上げ，中学・高校の幾何内容が含む豊かさを示す。

cの「現実世界との繋がり」については，幾何学が単に教科書の中にのみ存在する世界ではなく，現実の問題と密接に結びついていることを理解させることのできる題材を選ぶ。一例として，講義内容の項目「5. 射影幾何の定理」の関連として，射影の概念を，物はどう見えるか，どう映るかという観点から取り扱ってできる問題例を紹介する。例えば，地面に描かれた図形について，それを撮った写真を元に考えさせる。長方形の土地を直線で２つに分割するとき，どちらの面積が大きいかを写真から判定する問題は，写真上で土地の対角線を作図すれば解ける。また，地面に置かれた棒を撮った写真において，棒のn等分点の像を求めることは，平行四辺形の性質や平行線と線分の比の関係を用いてできる。このように，現実的な問題に，学校で学ぶ幾何の基本的な学習内容が姿を現してくる。ま

た，机の上に置いた皿は常識的には楕円に見えると思われているが，改めてその理由を考えると，手前の部分が拡大し奥の部分が縮小して見えるため楕円であることの方が疑わしい気もしてくる。この疑問を，解析幾何を用いて解くことにより，幾何の問題に代数を用いることの威力を体験させる。また，放物線が楕円に見えるような少し意外な例も取り上げる。さらに，地面に置かれた直方体の射影図を描くとき，上面と下面にある８本の辺のうち，７本は平行線の像が地平線で交わることを利用した作図によって求める必要があるが，最後の１本は作図を必要とせず自動的に決まるという不思議な現象に気づくが，この現象はデザルグの定理を用いて説明することができることを示し，射影幾何の定理と遠近法の関連を示す。以上紹介したような射影に関する問題は，学校現場では直接扱えない部分も多いが，学生の大きな興味を引いて強い印象を残し，数学が現実世界と切り離された世界ではないことの認識をもった教師を育てることに効果があるものと考える。

(3) [分野]　代数学　[単元]　体の基礎

講義内容の項　目	1. 体の定義と簡単な性質. 2. 有限体. 冪構造と応用（巡回符号の紹介). 3. 体の代数拡大・超越拡大. 拡大次数. 最小多項式. 4. 体の代数単拡大の基本定理（有理化の原理). 5. 定木とコンパスによる作図問題.
育成すべき資質・能力	・四則演算のからくりについての理解を深める. ・円周率 π，自然対数の底 e の超越性を知る. ・作図問題と方程式の解法との関係を理解する. ・方程式の解とガウス平面における図形との関係を知る. ・2 次方程式の解の公式を生徒が学ぶ意義を理解する.
小中高の算数・数学教育との繋がり	・小学校における四則演算（たす，ひく，かける，わる). ・中学校におけるいろいろな方程式の解法. ・整数の素因数分解. ・多項式の整除と因数分解. ・分母の有理化. 円周率. ・定木とコンパスによる作図. ・1 の原始 3 乗根と作図問題. ・2 次方程式の解の公式.
数学の他分野や歴史との繋がり	・ユークリッドの互除法と初等整数論から続く話題である. ・この単元に続く話題としてガロア理論. ・円周率の超越性. ・ギリシア作図問題.

	・方程式にまつわる歴史：①タルターリャ，カルダノ，フェラーリが登場する 3、4 次方程式の解法. ②ラグランジュ，アーベル，ガロアが登場する方程式論の完成.
数学以外の学問分野や現実世界との繋がり	・正多角形が現れる事象（観覧車，風車，タービン・モーターなど). ・有限体の応用として，巡回符号なかでも BCH 符号. ・その一種のリード・ソロモン符号を利用した携帯でおなじみの QR コード.

[解説]

授業実践を踏まえて、教員養成のための数学内容として、何を、どこまで、どのように教えるべきかについて、以下に考察する。

本稿で紹介する単元「体の基礎」に関する授業は、「可換環の基礎」の単元の内容を含めて、通常の 1 セメスター（2 単位）の授業、すなわち、14～15 回の授業と 1 回の試験による構成を想定している。

本単元「体の基礎」の内容については、体の概念が四則演算の概念の代数的具現化であり、数学教師になるための学士課程教科専門数学内容および算数科専科教員になるための学士課程教科専門数学内容としては必須であると考える。教員養成学部の「数学」教員免許取得に必要な代数学分野の教材として、発展性を踏まえつつ内容を厳選し、数学の内容と教授方法を再構築する必要がある。もちろん数学の内容は人類普遍の財産であり、授業開設の場所に理学部・教育学部・人文・社会学部・経済学部・工学部等の学部の別があるからといって個々の数学の定理や事実は変わるわけではない。一方で、学士課程の段階において将来の学校教育現場の数学教員を養成するという観点で、授業の内容や教授方法については、研究者養成のそれとはまた別の切り口によって再構成する必要がある。

育成内容/教授内容

数学教師を志望する学生の数学専門能力の育成に関して、学士課程において本単元「体の基礎」については、主に、以下の 4 つの育成内容/教授内容があると考える。

① 体の種々の性質を知ることにより、体における四則演算の抽象的な概念を理解すること。

② 2 次式や 2 次方程式の性質を把握するために、多項式全体の集合（すなわち多項式環）として、大きな枠組みで性質を理解すること。2 次式は多項式の特別な場合である。

③ 定木とコンパスといったような身近にある素朴な道具から問題が生まれ、長い歴史の中で育まれた数学上の内容を、その歴史的バックグラウンドのもとに理解すること。

④ 学校教育では初等幾何の単元を除いて、論証的な内容を生徒自ら行うことは計算練習に比して稀である。一方で、教える側の数学教師は学校教育内容の数学の諸定理を生

徒に説明しなければならない。学士課程において数学教員を養成するために論証力の育成は重要であり、その育成の場として代数学が期待されていること。

授業構成例の全体像

1セメスター期間の本授業では、全体の目標を設定しその目標に向かい授業内容を構成するものとする。その過程の中で、さらに、派生的に現れる代数学の内容を随時加える。その観点から、標準的モデル案の「可換環の基礎」の一部と「体の基礎」を合わせた内容で、学士課程教科専門数学 1 科目 (1 セメスター) で教えられるべき具体的内容の1案を今回提案することに至った。

授業構成例の内容

本単元全体を通して、学校教育で現れる四則演算の概念と、学校教育で現れる 2 次方程式や 2 次関数の理解にとって代数学の内容がいかに大切か知らしめる授業内容とその構成案を例示したい。大学学士課程代数学分野の1単元「体の基礎」の授業 (1 セメスター期間) において、体の概念と体の拡大の概念および多項式環の性質を学ぶことによって、このことは達成されると予想した。より具体的な目標としては、ギリシア三大作図問題のうち「角の三等分」と「立方倍積問題」について最後に解説を行うことをあげた。上の③に関わって、研究者養成においては最先端の内容を目標や主眼にしているのに対して、教員養成においては長い年月をかけて構築されてきた歴史的な内容を踏まえた数学の題材を目標に置くことが適当であると考えた。

4つの育成内容/教授内容との関連

1セメスター授業構成全体像としては、作図問題とそれに向けての授業内容を構成するものとする。その中には、体の拡大、多項式の性質の内容が含まれる。この授業を展開していく中で、論証力の向上を図る。以下に、もう少し具体的に説明していく。①について、体の拡大としてはいろいろな項目があげられるが、有限拡大、代数拡大が作図問題では欠かせない。更に、代数拡大は超越拡大と対比し、円周率 π と自然対数の底 e が超越数であることを説明するのに欠かせない。②については、体の有限次拡大を考えるとき 1 変数多項式環を合わせ考える必要がある。複素数体は実数体の 2 次拡大であり、虚数単位 i の実数体上の最小多項式は $f(x) = x^2+1$ である。ここに単項イデアル整域である多項式環が登場してくる。作図問題は、本質的に 2 次拡大の問題であり、2 次方程式で解けるかどうかの問題である。2 次方程式の解の公式については、今度の指導要領改訂で再び義務教育課程教育内容に含まれることになった。ここで述べた教授内容は学校教育、特に義務教育課程にあわせる形で学士課程代数学の 1 科目 (1 セメスター) で学ぶ内容を考えてきているが、逆に、その科目において、数千年単位の長い歴史の中で育まれた題材を取り扱うことによって、義務教育課程で 2 次式/2 次方程式を主に取り扱う理由もそこに見えてくる

のではないであろうか。

扱い方と留意事項

定木とコンパスによる(ギリシア)作図問題（のうちの2つの問題）に関して、歴史的背景を踏まえながら解説を行うことが大きな枠組みでの目標であり、そのための代数的な内容を本単元の 1 セメスター間での授業の内容として構成するものとする。常に授業の流れを受講生に把握してもらいながら、全体像のなかで今行っている内容の位置付けについて認識してもらうことは、受講生に能動的に学習してもらうためには大切である。また、体の拡大と作図可能性の問題に関しては、体の拡大次数の問題、特に 2 次拡大の問題になることから、2 次方程式の解の公式や平方完成等の学校教育内容にも配慮しながら授業運営を遂行する必要もある。

授業実践の例

教員養成大学（筆者が所属する大学）の学士課程 教科専門（選択）科目の授業におい平成 19 年度(2 回生後期)と平成 21 年度(2 回生後期）の 2 回にわたりほぼ同じ内容で授業実践を行った。受講生の理解度を考慮にいれると、予備知識としては「線形代数」「初等整数論」「群の基礎」「可換環の基礎」を履修した後で行うのが順当であると考える。一方で、本教員養成大学カリキュラムの実情から、「線形代数」「群の基礎」をのみを仮定しなければならない実情がある（おそらくは、多くの教員養成系大学が抱えている実情)。実際の授業実践では、環とイデアルの内容を厳選して追加せざるを得なかった。

具体的授業構成内容の例

最終回が試験で計 16 回の授業回数を想定した。

1~2. オリエンテーション、導入、群の基本的事項の復習、環・体の定義と例（有理数体・実数体、多項式環）.

4~5. 線形代数の復習（ベクトル空間の基底と次元)、体の拡大、拡大次数.

6~9. 多項式の根と最小多項式、多項式環とイデアル、単項イデアル整域と多項式環、可換環と極大イデアル.

10~13. 単純拡大、有限拡大と代数拡大、分離拡大と分解体.

14~16. 作図問題 1(ギリシア作図問題 ー立方倍積問題/角の 3 等分の問題ー)、
作図問題 2(ギリシア作図問題を折り紙で解く)、試験.

実践後の反省点と課題

定理/命題の証明は 90 分の授業時間内に、なるべく 1 つ（場合によっては 2 つ）に限定した。時間的な制約や受講生の理解度を鑑みて、適宜、「例」をもって定理/命題の証明の全体像を想像してもらった。計算練習を 1 コマの最後に行う予定としたが、時間的にそ

の余裕がなかった。反省点としてあげられる。成功体験のうえに関心を育てながら授業を遂行できたとは言いがたかった。授業内で解説する分量を考えると非常に難しさを覚えるが、演習時間をいかに確保していくかという問題がある。また、演習の個々の問題（問い）についてもその改善や教材研究が必要である。最近、FD の活動が法令化され、各大学で授業改善等を行っていくことが義務づけられているが、内容のレベルを下げることは、必ずしも授業改善したことにはならないと考える。上記の内容についてレベルを下げることなく本質的なところを押さえ、学士課程在籍の受講生に、持続的な成功体験を経験させながら授業遂行できる教材の研究とその指導方法の研究が急務であると感じる。

育成内容/教授内容④で述べた通り、代数学の授業では論証力育成も求められてくると考えられる。数学教師を志望する学生の数学専門能力の育成の充実には論証力を育成することは無視できない。代数学の教科書に限らずいろいろな教科書では、計算練習教材は数多く見受けられるが、一方で、「... を証明しなさい」の類と違った論証力を育成するための練習問題を、既刊の出版物から見つけることができなかった。教員養成の観点による論証力育成ための教材開発についても待たれるところである。群の部分群に関する剰余群の構成については既知とし授業運営を行った。イデアルによる剰余環の構成は、剰余群の構成とはまったく別物という意識が受講生には見受けられた。可換群に焦点をあてれば同じ事であるし、代数的構造を持った集合に同値関係を導入して同値類全体の集合が同じ代数的構造を与えるという点では共通している。時間的制約の中で、共通性を伝える教材について考える必要性も感じた。また、詳細な授業記録を取ることも今後の課題にしたい。標準的モデル案の「可換環の基礎」の内容を履修した後、標準的モデル案の本単元「体の基礎」の内容を 1 セメスター期間かけて授業を行うのが順当であると考えるが、カリキュラムの制約から 2 つの単元を合わせた内容となった。 2 回の実践を行って切に感ずるのは、時間数、単位数の増加といった法的な改善についてであり、特に数学各分野の教科専門科目についての演習時間の単位数が法的に認められていないことに対しては遺憾に思う。

おわりに

ギリシア作図問題は周知のとおり、定規とコンパスのみでは作図できない。一方で、うち２つの立方倍積問題と角の三等分問題は、折り紙では折ることができる。現行の学校教育課程学習指導要領の目標にも謳われている算数的活動・数学的活動の一環として、 1 セメスター期間の最後の授業で折り紙について紹介した。最後の授業でのアンケートで「しっかりと勉強しておけばよかった」という類の意見/記述が複数あったのは印象的であった。数学教師を志望する受講生は、数学教師になる以上は数学を理解したいと考えているようであるが、教える側の大学教員が学生の意志をいかにくみ取り授業実践に生かしていくかについて、教える側の教員の予想と受講学生の理解度に関して乖離が存在すると 2 回の授業実践から感じられた。数学教員養成の観点から、常にその乖離を埋めてゆく努力を教える側の大学教員が行っていくことは、教員養成学部であるかは問わず、数学教員の養成を

行っている全大学の数学専任教員は考えてゆかなければならないのではないかと考える。
　最後に、これは数学全般に言えることであるが、子どもの考え方や発想の多様性に対応するために数学を深く理解しておくことが、数学教師の信頼性という点で大切であることは間違いないことである。

(4) [分野]　微分積分　[単元]　1変数微分積分

講義内容の項　目	1. 実数の連続性，中間値の定理，最大値・最小値の定理. 2. 微分の定義，微分法（和・差・積・商の微分法，合成関数の微分法）. 3. 逆関数，無理関数の導入，逆関数の微分法. 4. ロルの定理，平均値の定理，その応用. コーシー型平均値の定理，不定形の極限値（ロピタルの定理）. 5. 歴史的・文化的に重要な関数たち（多項式関数，三角関数，指数関数，対数関数，双曲線関数，逆三角関数等）. 6. 微分法の応用（関数の増減，大小関係等）. 7. 高階導関数，テーラーの定理. 8. マクローリン展開とその応用. 9. 定積分の定義，微分積分学の基本定理. 10. 積分の計算法（変数変換，部分積分法）. 11. 回転体の体積・表面積. 12. 曲線の長さ. 13. 積分の級数への応用.
育成すべき資質・能力	・ε - δ 論法等の無限を扱う論法が使用できる. ・極限・微分係数の意味が理解できる. 変化するものを把握するための方法として,微分法が有効であることが理解でき，具体的な問題に応用できる. ・導関数の性質から，元の関数の性質を導くことができる. ・多項式関数，三角関数，指数関数，対数関数，双曲線関数，逆三角関数等の基本的な関数の特徴を理解し，具体的な問題に応用できる. ・高階導関数の意味が理解でき，テーラーの定理やマクローリン展開を具体的な問題に応用できる. ・定積分の意味、不定積分との関係が理解できる. ・基本的な積分計算ができ，具体的な問題に応用できる. ・階差数列と導関数，級数と定積分との対応関係が理解できる.
小中高の算数・数学教育との繋がり	・数は小学校段階から扱われる対象である. ・実数の集合の連続性は「数直線」という形で表現されていたものである. ・長方形，三角形，円等の図形の面積公式や比例・反比例などの数量関係は関数

	として取り扱うように発展していく. ・「速さ」など，変化するものの特徴を捉える方法として変化率を考えることは小学校算数においても現れる. ・グラフとして表し視覚化して対象の特徴を捉えることは，小学校・中学校でも扱われる. ・高校においては，微分法・積分法が指導される.
数学の他分野や歴史との繋がり	・1 変数微積分は，この後に学ぶ解析学の諸分野のみでなく代数学・幾何学・確率・統計における基礎的な知識・道具として、活用される. ・定積分の考え方は Archimedes の求積法にまで遡ることができる. ・Descartes は幾何学的な問題を解析的に解く解析幾何学を創始した. ・微分法・積分法は Newton、Leibniz により 17 世紀に発見された. ・有界閉区間や有界閉区間上の連続関数は、コンパクト空間やコンパクト空間上の連続写像の性質の一例として把握することができる. これは対象を一般化したり拡張したりすることの起点になっている.
数学以外の学問分野や現実世界との繋がり	・対象を数学的にモデル化し、微分積分学を用いて解析するという方法は，自然科学・社会科学の様々な分野に適用できる方法である.

[解説]

［単元］1 変数微分積分学の内容は、多くの専攻分野の「微分積分学」の授業で扱われているが、専攻分野によってその取り扱い方はかなり異なる。例えば、工学や経済学などの分野の専攻の授業においては応用面（利用の仕方）が強調され、理学部数学科の授業であれば論理性が重視されるであろう。また、教員養成大学・学部においても、教養教育科目の範疇に置かれていて受講者が数学教員志望であるとは限らない場合には、社会人としての学問的教養として扱われているかも知れない。

教員養成学部の数学教員志望者に向けた授業である場合には、2 節(A)の数学専門科目により獲得すべき資質・能力を意識し、次のことを重視することが必要であると考える。

① 小学校・中学校・高等学校での授業内容との結びつきを述べること。ここで授業内容とは、受講生が受けてきた授業内容だけでなく、過去に扱われた内容、将来扱われそうな内容も含む。

② 多様な見方や考え方を紹介すること。

③ 高等学校までの授業において自明なこととして認めてきたことや曖昧なままに済ませてきたことにも“なぜ”という疑問を生じさせるような問いかけを行うこと。特に、微分積分法は既に高校で学んでいるため、受講者にとって新たな発見がある。つまり大学で微分積分法を再度学ぶ意義が納得できるような授業にしたい。

[単元] 1 変数微分積分学のモデル案は、通常の 1 セメスター（授業回数は 15 回）の授業（2 単位）の 2 コマ分を想定している。予備知識として、基礎的な数学論理や集合・写像について、別の授業で既に学習していることを仮定する。できるだけ問題演習の機会を設け、理論に体験が伴う授業となることが望ましい。できれば、問題演習の時間を 1 コマ設け、大学院生の TA に指導させ、院生の指導力をも伸ばす授業にしたい。

以下に 30 回の授業を想定した構成内容の例を挙げる。

微分学

1. 実数の連続性
2. 数列の極限
3. 関数の極限
4. 連続関数
5. 中間値の定理，最大値・最小値の定理
6. 歴史的・文化的に重要な関数
7. 微分係数，導関数の定義
8. 合成関数，逆関数の微分法.
9. ロルの定理，平均値の定理，その応用.
10. コーシー型平均値の定理，不定形の極限値（ロピタルの定理）
11. 微分法の応用
12. 高階微分係数・導関数
13. 高階微分係数・導関数の応用
14. テーラーの定理.
15. マクローリン展開とその応用

積分学

16. 原始関数と不定積分
17. 不定積分の置換積分法
18. 不定積分の部分積分法
19. 有理関数の不定積分（準備）
20. 有理関数の不定積分（有理関数の部分分数展開）
21. 有理関数の不定積分（まとめ）
22. 三角関数等の有理関数の不定積分
23. 定積分の定義
24. 定積分の基本的性質
25. 微分積分学の基本定理
26. 定積分の応用（図形の面積、回転体の体積・表面積、曲線の長さ等）
27. 広義積分の定義と収束・発散の判定条件

28. 広義積分の応用
29. 級数
30. 級数と定積分

微分積分学の内容は大学初年次で講義されることが多い。そのため、教育学部の数学教員志望者を対象とした授業であっても、他の専攻分野の学生を対象とした授業と同じように、論理性より計算力の育成の方を重視する傾向にある。確かに、自分で検証のできない理論は他人事としか受けとめることができないので、学生の主体的な学習の基盤として計算力は重視されるべきものである。ただし、その場合にも、この授業に続く授業との接続に問題が生じないようにするためには、論理の重要性を強調しておくことは必要であると考える。

数学教員志望者を対象とした授業の中で極限等の概念をどのように扱うかについては様々な考え方があるが、上記モデル案では、極限の厳密な定義や $\varepsilon-N$ 論法、$\varepsilon-\delta$ 論法を使用することを想定している。そうすべきであると考える理由は、数学の発展の歴史を見てみると、極限の概念を厳密に扱うことが必要となり、論理が整備されてきたという事実があるからである。$\varepsilon-\delta$ 論法等を学生自身が使用できるようになることまでを授業の到達目標に置くかどうかは別として（このモデル案では到達目標にしない)、無限を扱うために必要な論理があるということは提示しなくてはならないと考える。数学教員志望者であれば、そのような論理の上に微分積分学が組み立てられていることを知っていなければならないからである。

5. おわりに

プロジェクト第１チームは、今年度、国立大学法人教員養成大学・学部の数学専門科目の現状の調査、教員養成学部の数学専門科目の標準的モデル（骨子）の第１次提案の作成など活動を着実に進めて、素晴らしい成果を挙げた。プロジェクト第１期最終年の来年度には、次のような活動を計画している。

(1) ３節で挙げた「教員養成学部の数学専門科目の標準的モデル」の「講義内容の項目」以外の「育成すべき資質・能力」「小中高の算数・数学教育との繋がり」「数学の他分野や歴史との繋がり」「数学以外の学問分野や現実世界と繋がり」について、すべての分野・単元に対して完成させ、教員養成大学・学部の教員に対して広く意見を求めることによって、それぞれの内容を充実していきたい。
(2) 国立大学法人教員養成大学・学部以外にも、多様な大学・学部において数学教員の養成は行われている。大学・学部の形態によらず「数学教師になるために必要な数学専

門科目のモデル案」作りを目指して、教員養成学部以外の学部で教員養成を行っている大学・学部に対して、どのような方法で意見を聞くことができるのかを検討していきたい。上記の課題を達成するのは、プロジェクト第２期の仕事になる。

(3) 小学校教員志望者に対する数学専門科目のあり方に関して、昨年度、今年度に引き続き教員養成大学・学部を対象にした第３回調査を検討したい。今年度の第２回調査で用いた「講義項目を挙げるような具体的な調査内容」によって、現状を的確に把握できるような調査を実施したいと考えている。

(4) 大学院教育学研究科の数学専門科目および数学専門での修士論文のあり方について、第４チームと協力して検討に取り組みたい。

参考文献

[1] 川崎謙一郎・伊藤直治・河上哲・市原一裕・石田正樹・藤井智康・和田穣隆・松山豊樹「理数科高校教員の養成のためのアセスメント実践」奈良教育大学教育実践センター紀要　第 17 号（2008 年 3 月） pp.275-282

[2] 川崎謙一郎「理数科教員養成のためのプログラム実践報告－１つのアセスメント実践の報告－」，数学教育学会 2008 年春季年会発表論文集（2008 年 3 月） pp.121-123

[3] 川崎謙一郎「数学教育における『リンク』に関する１つの考察－教員養成大学教科専門教員として感ずることー」，数学教育学会 2008 年春季年会発表論文集（2008 年 3 月） pp.181-183

[4] 川崎謙一郎「理数科教員養成の中の数学教員養成のカリキュラムの構成の一例　ー数学教師に必要な数学能力形成に関する学士課程カリキュラム編成の例ー」，数理解析研究所講究録 1657 (2009 年 7 月) pp.83-93

[5] 松岡隆「第４章　数学科の教科内容構成の原理と枠組み」，
西園芳信・増井三夫編「教育実践から捉える教員養成の教科内容学研究」風間書房, 2009 年

[6] 丹羽雅彦、松岡隆「教員養成学部の「数学」教科専門科目カリキュラムの現状把握と理想的モデル案に向けた調査検討の構想」，数理解析研究所講究録 1657 (2009 年 7 月) pp.74-82

[7] 丹羽雅彦、松岡隆、川﨑謙一郎、伊藤仁一「「教員養成大学・学部の数学専門科目の講義内容についての調査」の結果とその考察」本講究録

[8] 丹羽雅彦「教員養成課程の教科「数学」専門科目における「証明」の扱いに関する考察Ｉ」，滋賀大学教育学部紀要　第 56 号(2006)pp.63-75

[9] 丹羽雅彦「同上Ⅱ」，同上　第 57 号(2007)pp.23-40