

# ある混相流の数値シミュレーションとその解析

## A Numerical Simulation and its Analysis of a Multi-Phase Flow Problem

九州大学大学院数理学研究院 田端正久 (Masahisa Tabata)<sup>1</sup>  
Faculty of Mathematics, Kyushu University

### 1 はじめに

気液二相流などの混相流問題を考える。それぞれの流体は Navier-Stokes 方程式に支配され、流体界面では曲率に比例する表面張力が働いている。各流体が占める領域は未知で、界面はその点での粒子速度にしたがって移動する。この問題の数値計算は種々なされているが ([2, 6, 7, 9] とその中の文献を参照)、流体の占める領域が未知であることと、界面で表面張力が働く難しさがあり、未解決の多くの問題が残っている。収束性の保証された数値計算スキームは得られていない。安定性に関する結果も非常に少ない [1] が、我々が開発したエネルギー安定有限要素スキーム [3, 4] は、実用的に安定性が考慮された計算法である。

本稿では、上記のエネルギー安定有限要素スキームを使って、砂時計形状領域内の二流体の運動をシミュレートし、粘着と滑りの境界条件、表面張力係数の観点からその運動を解析する。詳しい内容に関しては [8] を参照していただきたい。

### 2 砂時計形状領域内の二流体流れ

図 1 に示すように、砂時計形状領域に、二つの流体がある。流体 2 (黒い部分) は流体 1 (残りの白い部分) より重く、重力で下に落ちる。二つの流体の界面では表面張力が働いている。領域の境界で流体は、粘着あるいは滑り境界条件を満たしている。両方の流体は非圧縮 Navier-Stokes 方程式に支配される。流速は界面で連続であり、界面はその場所での流速にしたがって移動する。この二流体の運動の数値シミュレーションを行う。

問題は二次元として、次で記述される。砂時計形状領域を  $\Omega$ 、その境界を  $\Gamma$  とする。  $T$  を正数とし、問題は  $t = 0$  から  $T$  まで解かれる。初期時刻  $t = 0$  で領域  $\Omega$  は、二つの混ざらない非圧縮粘性流体で占められている。それぞれの領域は  $\Omega_k^0$ ,  $k = 1, 2$ , であり、その界面  $\partial\Omega_1^0 \cap \partial\Omega_2^0$  は  $\Gamma_{12}^0$  と記述される。  $\Gamma_{12}^0$  は閉曲線である。流体 2 は流体 1 に囲まれているとする。時刻  $t \in (0, T)$  で流体  $k$ ,  $k = 1, 2$ , が占めている領域を  $\Omega_k(t)$ , その界面曲線を  $\Gamma_{12}(t)$  とする。流体  $k$ ,  $k = 1, 2$ , の密度と粘性を  $\rho_k$  と  $\mu_k$  とする。未知関数は

$$u : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad p : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$$

<sup>1</sup>E-mail : tabata@math.kyushu-u.ac.jp

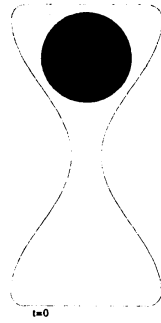


図 1: 砂時計形状領域内の二流体.

であり, 流速と圧力である. それぞれの領域  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ ,  $t \in (0, T)$ , で Navier-Stokes 方程式

$$\rho_k \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla)u \right\} - \nabla [2\mu_k D(u)] + \nabla p = \rho_k f, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad (2)$$

が満たされる. ここに,  $f : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2$  は与えられた関数, 通常, 重力加速度であり,  $D(u)$  は変形速度テンソル

$$D_{ij}(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

である. 界面  $\Gamma_{12}(t)$ ,  $t \in (0, T)$ , で界面条件

$$[u] = 0, \quad [-pn + 2\mu D(u)n] = \sigma_0 \kappa n \quad (3)$$

が課される. ここに,  $[\cdot]$  は両側から界面への極限値の差を示し,  $\kappa$  は界面の曲率,  $\sigma_0$  は表面張力係数,  $n$  は単位法線ベクトルである. 界面  $\Gamma_{12}$  はその位置での流速  $u$  で移動する. 境界  $\Gamma$ ,  $t \in (0, T)$ , で粘着条件

$$u = 0 \quad (4)$$

または, 滑り条件

$$u \cdot n = 0, \quad D(u)n \times n = 0 \quad (5)$$

が課される.  $t = 0$  で流速の初期条件

$$u = u^0 \quad (6)$$

が課される.

この問題を次のように書き直す. 関数

$$\chi : [0, 1] \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad (u, p) : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$$

で任意の  $t \in (0, T)$  に対して,

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = u(\chi, t), \quad (s \in [0, 1]) \quad (7)$$

と (1) と (2) を  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , で満たし, 初期条件 (3), 境界条件 (4) 又は (5), 界面条件 (6) と

$$\chi(\cdot, 0) = \chi^0 \quad (8)$$

を満たすものを求めよ. ここに,  $\chi^0 : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$  は  $\Omega$  内の初期閉曲線である. 任意の  $t$  に対して  $\chi(1, t) = \chi(0, t)$  であり,

$$\mathcal{C}(t) = \{\chi(s, t); s \in [0, 1]\}$$

は  $\Omega$  内の閉曲線である.  $\mathcal{C}(t)$  は時刻  $t$  の界面曲線であり,  $\Omega_k(t)$ ,  $k = 1, 2$ , は  $\mathcal{C}(t)$  の外部と内部として, それぞれ定義される.

### 3 エネルギー安定有限要素スキーム

[3] でエネルギー安定近似 [5] に基づいた有限要素スキームを開発した. それを前節の問題に適用する.

関数空間  $X$ ,  $V$  と  $Q$  を

$$\begin{aligned} X &= \{\chi \in H^1(0, 1)^2; \chi(1) = \chi(0)\}, \\ (V, Q) &= (H_0^1(\Omega)^2, L_0^2(\Omega)) \text{ 又は } (H^1(\Omega)^2, L^2(\Omega)), \end{aligned}$$

で定義する. ここで, 空間の組  $(V, Q)$  を前者に取るのは粘着境界条件 (4) のときであり, 後者は滑り境界条件 (5) のときである. 補助関数空間  $\Phi$  を

$$\Phi = L^\infty(\Omega).$$

で定義する. 解は関数空間に値をとる  $t$  の関数

$$(\chi, \rho, \mu, u, p) : (0, T) \rightarrow X \times \Phi \times \Phi \times V \times Q.$$

として求める.  $X_h, \Phi_h, V_h$  と  $Q_h$  を  $X, \Phi, V$  と  $Q$  の有限次元部分空間とする.  $\Delta t$  を時間刻み,  $N_T = \lfloor T/\Delta t \rfloor$  とする. 時刻  $t = n\Delta t$  での近似解  $\chi_h^n, \rho_h^n, \mu_h^n, u_h^n$  と  $p_h^n$  を  $X_h, \Phi_h, \Phi_h, V_h$  と  $Q_h$  に求める. これらの関数は次のようにして求められる. 領域  $\Omega$  を三角形分割し,  $\Phi_h, V_h$  と  $Q_h$  をそれぞれ  $P1, P2$  と  $P1$  有限要素空間とする. これらは, すべての時間ステップ  $n$  に関して固定される. 他方,  $X_h$  は多角形のパラメータ表示として得られる関数から成り立っている.  $\{s_i^n \in [0, 1]; i = 0, \dots, N_x^n\}$  で  $s_0^n = 0$ ,  $s_{N_x^n}^n = 1$  となるパラメータ値からなる集合を表す.  $\{\chi_h^n(s_i^n); i = 0, \dots, N_x^n - 1\}$  は多角形の頂点である. 多角

形の頂点数  $N_x^n$  は  $n$  に依存して変わり得る.  $X_h(N_x^n)$  で  $N_x^n$  個のパラメータを持つ空間  $X_h$  を表す.  $\bar{D}_{\Delta t}$  で後退差分作用素

$$\bar{D}_{\Delta t} u_h^n = \frac{u_h^n - u_h^{n-1}}{\Delta t}$$

を表す. スキームは

$$\{(\chi_h^n, \rho_h^n, \mu_h^n, u_h^n, p_h^n) \in X_h \times \Phi_h \times \Phi_h \times V_h \times Q_h; n = 1, \dots, N_T\}$$

で次式を満たしているものを求めることである.

$$\frac{\tilde{\chi}_h^n - \chi_h^{n-1}}{\Delta t} = \begin{cases} u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1}), & \forall s_i^{n-1}, n = 1 \\ \frac{3}{2}u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1}) - \frac{1}{2}u_h^{n-2}(\chi_h^{n-1} - \Delta t u_h^{n-1}(\chi_h^{n-1})), & \forall s_i^{n-1}, n \geq 2, \end{cases} \quad (9a)$$

$$\chi_h^n = \mathcal{X}_h(\tilde{\chi}_h^n, A_h^0), \quad (9b)$$

$$\rho_h^n = \mathcal{R}_h(\chi_h^n), \quad \mu_h^n = \mathcal{M}_h(\chi_h^n), \quad (9c)$$

$$\begin{aligned} & \left( \rho_h^{n-1} \bar{D}_{\Delta t} u_h^n + \frac{1}{2} u_h^n \bar{D}_{\Delta t} \rho_h^n, v_h \right) + a_1(\rho_h^n, u_h^{n-1}, u_h^n, v_h) + a_0(\rho_h^n, u_h^n, v_h) \\ & + b(v_h, p_h^n) + \Delta t d_h(u_h^n, v_h; C_h^n) = (\rho_h^n \Pi_h f^n, v_h) - d_h(\chi_h^n, v_h; C_h^n), \\ & \forall v_h \in V_h, \end{aligned} \quad (9d)$$

$$b(u_h^n, q_h) = 0, \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (9e)$$

初期条件

$$\chi_h^0 = \Pi_h \chi^0, \quad \rho_h^0 = \mathcal{R}_h(\chi_h^0), \quad u_h^0 = \Pi_h u^0, \quad (10)$$

が課される. ここに,  $\Pi_h$  は有限要素空間に対応する Lagrange 補間作用素である. 方程式系 (9a)-(9e) は4つのステージから成り立っている.  $A_h^0$  を  $\chi_h^0$  によって囲まれる領域の面積とする.

第1ステージ.  $n \geq 2$  として,  $(\chi_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^{n-2}) \in X_h(N_x^{n-1}) \times V_h \times V_h$  が既知であるとする.  $n = 1$  のときは,  $(\chi_h^0, u_h^0) \in X_h(N_x^0) \times V_h$  が (10) により与えられている. (9a) で, 暫定関数  $\tilde{\chi}_h^n$  を

$$\begin{aligned} & (\chi_h^{n-1}, u_h^{n-1}, u_h^{n-2}) \rightarrow \tilde{\chi}_h^n \in X_h(N_x^{n-1}), \quad n \geq 2 \\ & (\chi_h^0, u_h^0) \rightarrow \tilde{\chi}_h^1 \in X_h(N_x^0), \quad n = 1. \end{aligned}$$

で得る. (9a) は  $n \geq 2$  のとき (7) の Adams-Bashforth 近似であり,  $n = 1$  のとき後退 Euler 近似である.

第2ステージ. (9b) で, 関数  $\chi_h^n$  を

$$(\tilde{\chi}_h^n, A_h^0) \rightarrow \chi_h^n \in X_h(N_x^n).$$

として定める. ここで,  $\tilde{\chi}_h^n$  を微修正して, 対応する多角形の頂点が準一様に分布し, その面積が初期面積  $A_h^0$  に等しくなるようにする. (9b) で, その手続きを  $\mathcal{X}_h(\tilde{\chi}_h^n, A_h^0)$  で表している. 詳細は, [8] を参照していただきたい.

第3ステージ. (9c) で

$$\chi_h^n \rightarrow \rho_h^n \in \Phi_h, \quad \chi_h^n \rightarrow \mu_h^n \in \Phi_h$$

を得る.  $\chi_h^n$  が分かると, 対応する多角形  $C_h^n$  の外部と内部として,  $\Omega_{hk}^n$ ,  $k = 1, 2$ , を定義する. 節点  $P_i$  が  $\Omega_{hk}^n$  に属していれば,

$$\rho_h^n(P_i) = \rho_k, \quad \mu_h^n(P_i) = \mu_k$$

と置く. これらの手続きを, それぞれ,  $\mathcal{R}_h(\chi_h^n)$  と  $\mathcal{M}_h(\chi_h^n)$  で表す.

第4ステージ. 線形方程式系 (9d) と (9e) を解いて  $u_h^n$  と  $p_h^n$  を得る,

$$(\chi_h^n, \rho_h^n, \mu_h^n, \rho_h^{n-1}, u_h^{n-1}) \rightarrow (u_h^n, p_h^n) \in V_h \times Q_h.$$

式 (9d) で記号  $(\cdot, \cdot)$  は  $L^2(\Omega)^2$  での内積を示し,

$$\begin{aligned} a_1(\rho, w, u, v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{2} \rho \{ [(w \cdot \nabla)u] \cdot v - [(w \cdot \nabla)v] \cdot u \} dx, \\ a_0(\rho, u, v) &= \int_{\Omega} 2\mu(\rho) D(u) : D(v) dx, \\ b(v, q) &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) q dx, \\ d_h(\chi, v; C_h) &= \sum_{i=1}^{N_x} \sigma_0 \bar{D}_{\Delta s} \chi_i \cdot \bar{D}_{\Delta s} v_i \frac{(s_i - s_{i-1})^2}{|\chi_i - \chi_{i-1}|}, \end{aligned} \quad (11)$$

であり,  $C_h^n$  は  $\chi_h^n$  に対応した多角形,  $d_h$  は界面  $C$  上の双一次形式

$$d(\chi, v; C) \equiv \int_C \sigma_0 \frac{\partial \chi}{\partial \ell} \cdot \frac{\partial v}{\partial \ell} d\ell,$$

である. ここに,  $\ell$  は曲線  $C$  の弧長である.

**注意 1** スキーム (9) のエネルギー安定性に関しては [8] で議論されている.

## 4 数値シミュレーション

### 4.1 準備

領域  $\Omega$  は図 2 に示されている. ここに,

$$a = 0.3, \quad b = 0.2, \quad c = 1.1, \quad r_0 = 1 - \frac{1}{c}$$

であり, 点  $A_i$ ,  $i = 1, \dots, 8$ , の位置は

$$\begin{aligned} A_1(-\frac{1}{2} + r_0, 0), \quad A_2(\frac{1}{2} - r_0, 0), \quad A_3(\frac{1}{2}, r_0), \quad A_4(\frac{1}{2}, 2 - r_0), \\ A_5(\frac{1}{2} - r_0, 2), \quad A_6(-\frac{1}{2} + r_0, 2), \quad A_7(-\frac{1}{2}, 2 - r_0), \quad A_8(-\frac{1}{2}, r_0) \end{aligned}$$

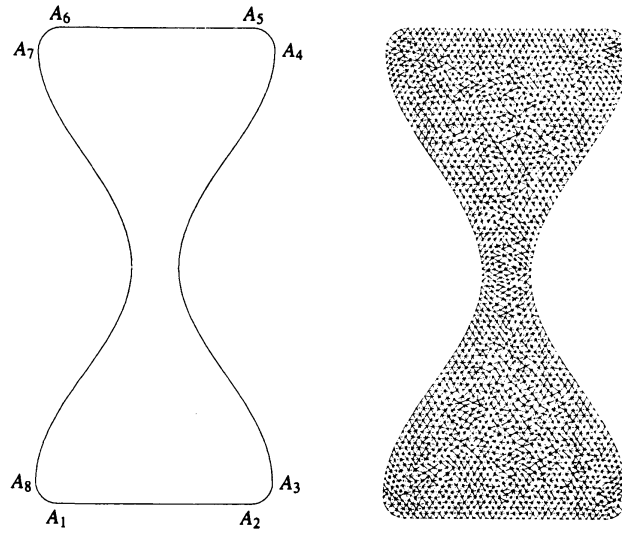


図 2: 領域  $\Omega$  と 領域分割.

とし,

$$\text{curve}(A_2A_3) = \left\{ (x_1, x_2); x_1 = \frac{1}{2} - r_0 + r_0 \cos \theta, x_2 = r_0 + r_0 \sin \theta, \theta \in \left[ \frac{3}{2}\pi, 2\pi \right] \right\}$$

$$\text{curve}(A_3A_4) = \left\{ (x_1, x_2); x_1 = a + b \cos \pi(c(x_2 - 1) + 1) \right\}.$$

$$\text{curve}(A_4A_5) = \left\{ (x_1, x_2); x_1 = \frac{1}{2} - r_0 + r_0 \cos \theta, x_2 = \frac{1}{2} - r_0 + r_0 \sin \theta, \theta \in \left[ 0, \frac{1}{2}\pi \right] \right\}$$

である. 領域は  $x_1 = 0$  に関して対称である.

$$\chi^0(s) = (r_1 \cos 2\pi s, d + r_1 \sin 2\pi s), \quad r_1 = 0.3, \quad d = 1.65$$

として, 図 1 に示されている初期領域  $\Omega_1^0$  と  $\Omega_2^0$  を定める. 初期速度と重力加速度は,

$$u^0 = (0, 0)^T, \quad f = (0, -1)^T.$$

である. 領域  $\Omega$  を三角形分割し図 2 のメッシュを得る. 全要素数  $N_e$  と全自由度数  $N$  (流速自由度と圧力自由度の和) は

$$N_e = 3,974, \quad N = 18,476$$

である. エネルギー安定性を議論するとき, 時刻  $n\Delta t$  での有限要素解のエネルギーノルムは

$$\|\sqrt{\rho_h^n} u_h^n\|_{L^2(\Omega_h)}$$

で定義される.

## 4.2 粘着境界条件の場合

粘着境界条件 (4) を課す. データ

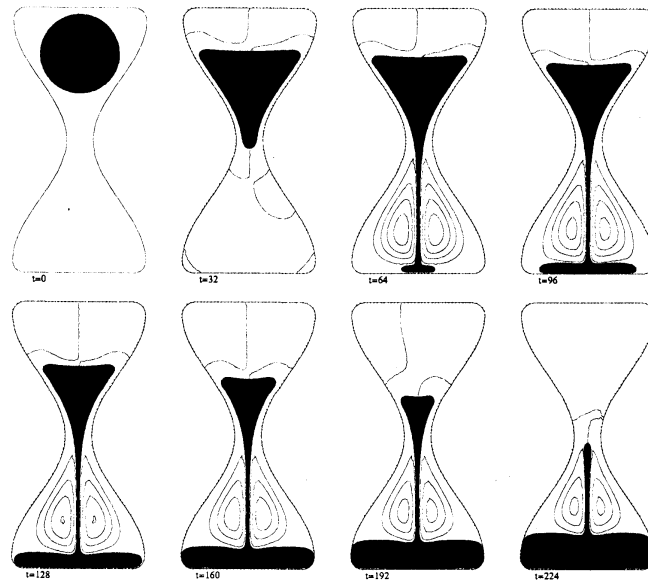


図 3: 界面と流線,  $t = 0, 32, \dots, 224$  (粘着境界条件).

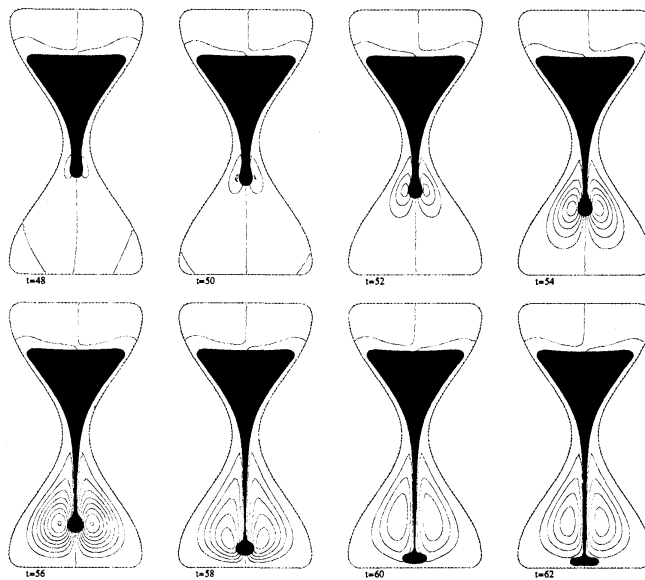


図 4: 界面と流線,  $t = 48, 50, \dots, 62$  (粘着境界条件).

$$(\rho_1, \mu_1) = (1, 1), \quad (\rho_2, \mu_2) = (100, 2), \quad \sigma_0 = 0.1$$

を採る。最終時刻  $T$ , 時間増分  $\Delta t$ , 全時間ステップ数  $N_T$  は

$$T = 300, \quad \Delta t = \frac{1}{4}, \quad N_T = 1,200$$

である。図 3 は  $t = 0$  から  $t = 224$  まで時間増分 32 で流体の動きを描写している。図 4 に、 $t = 48$  から  $t = 62$  まで時間増分 2 で動きの詳細が表示されている。図 7(左) はエネルギーノルムの時間履歴を示している。

界面を記述する多角形の粒子数  $N_x^n$  の最小値, 最大値と平均数は

$$\min N_x = 183, \quad \max N_x = 639, \quad \text{aver} N_x = 339$$

である。

### 4.3 滑り境界条件の場合

滑り境界条件 (5) を課す。次のデータを採る,

$$(\rho_1, \mu_1) = (1, 1), \quad (\rho_2, \mu_2) = (100, 2), \quad \sigma_0 = 1.0.$$

表面張力係数  $\sigma_0$  は粘着境界条件の場合より 10 倍大きい。最終時刻  $T$ , 時間増分  $\Delta t$ , 総時間ステップ数  $N_T$  は

$$T = 200, \quad \Delta t = \frac{1}{16}, \quad N_T = 3,200$$

である。流体 2 の落下速度が後に示すように粘着境界条件のときより 2 倍以上速いので、小さい時間増分  $\Delta t$  を採る。図 5 は流体の運動を  $t = 0$  から  $t = 175$  まで時間増分 25 で示している。図 6 は  $t = 87.5$  から  $t = 98.0$  まで時間増分 1.5 で動きの詳細を示している。エネルギーノルムの時間履歴を図 7(右) に示している。界面を記述する多角形の粒子数  $N_x^n$  の最小数, 最大数, と平均数は

$$\min N_x = 182, \quad \max N_x = 565, \quad \text{aver} N_x = 507$$

である。

### 4.4 シミュレーション結果の解析

図 7 は、粘着境界条件と滑り境界条件を課したとき、解のエネルギーノルムの時間履歴を示している。二つのグラフの目盛りは異なっている。前者より後者のとき落下速度は速く、そのことは図 3 と 図 5 の流線密度からも分かる。初期に流体は急速に中央部に落下するのでエネルギーノルムは大きい。滑り境界条件の場合、流体 2 は境界に達することができ、表面張力の影響で中央の隘路部で停止状態に近くなる。そこで徐々に形状を変えて隘路部を、むしろ広い流れとなって通り抜ける。この計算では流体 1 は隘路部右側から上昇するが、その現象は不安定である。図 7 右にこの不安定性に起因するエネルギーノルムの振動が観察される。



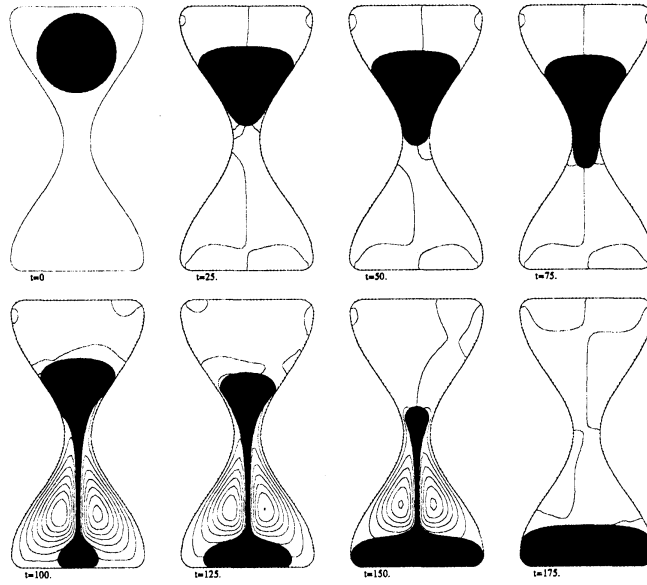


図 5: 界面と流線,  $t = 0, 25, \dots, 175$  (滑り境界条件).

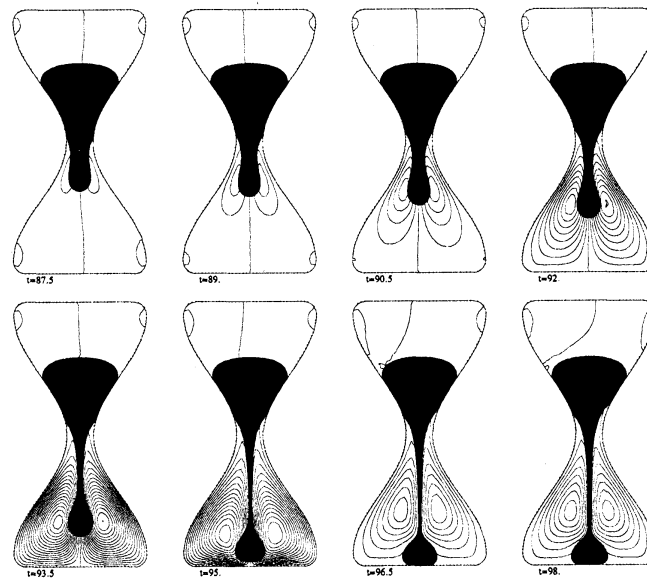


図 6: 界面と流線,  $t = 87.5, 89.0, \dots, 98.0$  (滑り境界条件).

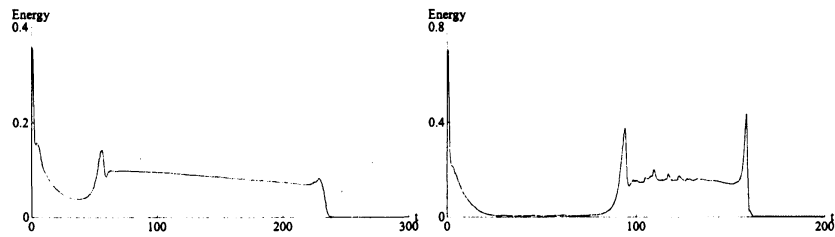


図 7: エネルギーノルムの時間履歴, 粘着境界条件 (左) と滑り境界条件 (右).

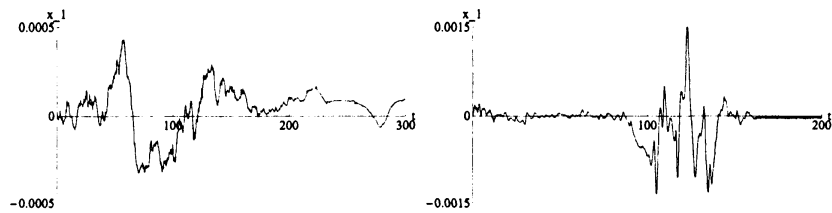


図 8: 流体 2 の重心の  $x_1$  座標の時間履歴, 粘着境界条件 (左) と滑り境界条件 (右).

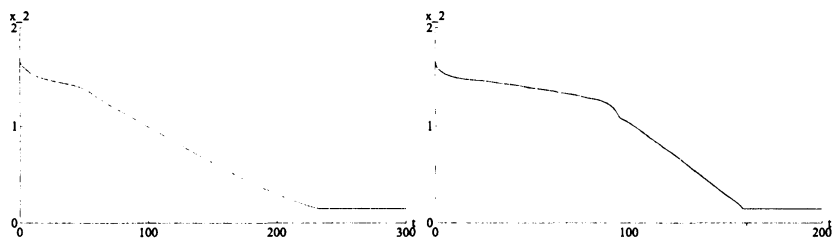


図 9: 流体 2 の重心の  $x_2$  座標の時間履歴, 粘着境界条件 (左) と滑り境界条件 (右).

一方, 粘着境界条件の場合, 流体 1 は境界に付着しているため, 流体 2 の流れは狭くなる. 流体 1 は隘路部の両側から上昇し, 現象は安定である. 両方の場合に, 初期の落下時以外に, 隘路部から落下が始まった直後と, 落下が終了する直前との 2 か所にピークが観察される.

図 8 と図 9 は流体 2 の重心の  $x_1$  座標と  $x_2$  座標の時間履歴を示している. 図 8 の左右の目盛りは同一でない. 滑り境界条件のとき, 流体 2 の動きが不安定であることが見て取れ, 図 9 で流体 2 が短い時間で隘路部を通り抜けることが分かる.

## 5 おわりに

エネルギー安定有限要素スキームを用いて, 砂時計形状領域で二流体問題の数値シミュレーションを行った. 粘着境界条件と滑り境界条件を考察し, 後者の場合, 表面張力係数

は前者のときより大きくした。エネルギーノルムの時間履歴を解析し、前者の場合は安定な狭い流れであること、後者の場合は不安定ではあるが広い流れで短時間で落下が終了することを確認した。

## 参考文献

- [1] E. Bänsch, Finite element discretization of the Navier-Stokes equations with a free capillary surface, *Numerische Mathematik*. **88**, 203–235, (2001).
- [2] S. Osher and R. P. Fedkiw. Level set methods: an overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, pp. 463–502, 2001.
- [3] M. Tabata. Energy stable finite element schemes and their applications to two-fluid flow problems. In P. Wesseling, E. Oñate, and J. Périaux, editors, *Proceedings of European Conference on Computational Fluid Dynamics*, pp. 379/1–10. TU Delft, The Netherlands, 2006.
- [4] M. Tabata. Finite element schemes based on energy-stable approximation for two-fluid flow problems with surface tension. *Hokkaido Mathematical Journal*, Vol. 36, No. 4, pp. 875–890, 2007.
- [5] M. Tabata and S. Kaizu. Finite element schemes for two-fluids flow problems. In Z.-C. Shi and H. Okamoto, editors, *Proceedings of The Seventh China-Japan Seminar on Numerical Mathematics*, pp. 139–148. Science Press, Beijing, 2006.
- [6] T. E. Tezduyar, M. Behr, and J. Liou. A new strategy for finite element computations involving boundaries and interfaces - the deforming-spatial-domain /space-time procedure: I. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 94, pp. 339–351, 1992.
- [7] G. Tryggvason, B. Bunner, A. Esmaeeli, D. Juric, N. Al-Rawahi, W. Tauber, J. Han, S. Nas, and Y.-J. Jan. A front-tracking method for the computations of multiphase flow. *Journal of Computational Physics*, Vol. 169, pp. 708–759, 2001.
- [8] M. Tabata. Numerical simulation of fluid movement in an hourglass by an energy-stable finite element scheme. In M. N. Hafez, K. Oshima, and D. Kwak, editors, *to appear in Computational Fluid Dynamics Review 2010*. World Scientific Company, Singapore, MI Preprint Series, MI 2009-28, Faculty of Mathematics, Kyushu Univ., 2009.
- [9] T. Yabe, F. Xiao, and T. Utsumi, The constrained interpolation profile method for multiphase analysis,