

## 有限体積法と Baba-Tabata 型保存的上流有限要素法

齊藤宣一

東京大学大学院数理科学研究科

Finite-volume method and Baba-Tabata's  
conservative upwind finite-element method

Norikazu SAITO

Graduate School of Mathematical Sciences  
The University of Tokyo

**Abstract.** After having reviewed the notation of the cell-centered finite-volume method (FVM), we shall summarize results of Saito [8],  $L^\infty$  analysis of FVM for nonstationary convection-diffusion equations. We shall mention an equivalent relationship between FVM and Baba-Tabata's conservative finite-elements. A historical note concerning Baba-Tabata's finite-elements are also described.

### はじめに

有限体積法 (finite-volume method, FVM) は、偏微分方程式の局所的な保存則に基づく離散化手法であり、移動や拡散効果を伴う方程式の数値計算に良く利用されている。規則あるいは準規則格子上での有限体積法の歴史は、1960 年代前半にまで遡ることができる。一方で、もっと一般の不規則格子 (許容メッシュ) 上での有限体積法、とくにその数学解析についての本質的な進展があったのは、精々 1990 年代後半であり、まだ 10 年程度の歴史しかない。

有限体積メッシュが有限要素メッシュ (領域の単体分割) の双対メッシュとして定義される場合には、有限要素法の解析方法が利用でき、誤差解析等の理論的結果も多い (cf. [5]). 一方で、有限体積メッシュとして Voronoi 図 (領域の Voronoi 図分割) が採用できるが、この場合、有限要素法との直接の関係性は (一般には) 見いだせず、あくまで有限体積法として解析を行わなければならない。実際、有限体積法の解析では、一般の許容メッシュを導入して、必ずしも有限要素メッシュとの双対性を前提としない流儀が主流である。しかしながら、その場合、線形問題に対してさえも、コンパクト性に基づく収束性の証明や、離散  $H^1$  ノルムでの誤差評価が行われているのみである (cf. [2]). このような状況下で、筆者は、最近、一般の許容メッシュを考え、対象とする非定常移流拡散方程式が解の非負値性を保存するような系であれば、 $L^\infty$  ノルムでの最適誤差評価が得られることを証明した ([8]).

本論文では、標準的な有限体積スキームの導出を再確認 (§1, §2) した後に、[8] で得られた解析的結果の概要を紹介する (§2). また、有限要素法との関係性を示す好例として、保存的有限要素法としてよく知られる Baba-Tabata 型上流有限要素スキームと有限体積スキーム

ムのある状況下での同等性について言及する (§3). 最後に, 本論文の学術的な目的からは外れるが, 筆者が Baba-Tabata 型上流有限要素法と出会った経緯を記しておきたい (§4).

## 1 有限体積法

モデル問題として, 移流拡散方程式

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla u - \mathbf{b}u) = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - (\mathbf{b} \cdot \nu) u = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 & \text{on } \Omega, \end{cases} \quad (1)$$

を考える. ただし,

- $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ : 滑らかな有界領域, あるいは多角形領域;  $T$ : 正定数;
- $u: \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  未知関数;
- $f: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $u_0: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ;  $\mathbf{b}: \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$  既知関数.

この方程式の解は, 次の保存則を満たす:

$$\text{質量保存: } \int_{\Omega} u(x, t) dx = \int_{\Omega} u_0(x) dx + \int_0^t \int_{\Omega} f(x, s) dx ds;$$

$$\text{正值性保存: } f, u_0 \geq 0, u_0 \not\equiv 0 \Rightarrow u(x, t) > 0 \quad (0 < t < T).$$

したがって, (1) を数値的に解く場合, これらの保存則 (の離散版) が成立することが望ましい. それを自然に実現する方法に, 有限体積法がある. この § では, もっとも標準的な有限体積法の概要を述べる.

有限体積法では,  $\Omega$  を control volume と呼ばれる小領域に分割し, 各 control volume 上で定数値を取る区分的定数関数で, 方程式の解  $u$  を近似する. control volume の集合を許容メッシュ (admissible mesh) とする. その定義は次の通りである.

**定義 1** (許容メッシュ. 多角形領域の場合).  $\Omega$  の部分領域の集合  $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$  ( $\Lambda = \{1, \dots, N\}$ ) が  $\Omega$  の許容メッシュとであるとは, 次の 4 つの条件が満たされる時:

(A1) 各  $D_i$  は開凸多角形で,  $\bar{\Omega} = \bigcup_{i \in \Lambda} \bar{D}_i$ .

(A2)  $i \neq j$  のとき,  $\bar{D}_i$  と  $\bar{D}_j$  は, 共通部分を持たないか, 一頂点を共有するか, 一辺 (全体) を共有するかのいずれかしかない. 一辺を共有するとき  $\sigma_{ij} = \bar{D}_i \cap \bar{D}_j$  と書く. また, そうでない場合は,  $\sigma_{ij} = \emptyset$  と定義しておく.

(A3) 各  $D_i$  には, 点  $P_i \in \bar{D}_i$  が付随しており,  $\sigma_{ij} \neq \emptyset$  のとき,  $P_i$  と  $P_j$  を結ぶ線分は,  $\sigma_{ij}$  を含む直線と直交する.

(A4)  $\partial\Lambda = \{i \in \Lambda \mid \partial\Omega \cap \bar{D}_i \text{ の長さが正}\}$  とし,  $D_i$  ( $i \in \partial\Lambda$ ) を境界 control volume と呼ぶ. そして,  $i \in \partial\Lambda$  のときは,  $P_i \in \partial\Omega \cap \bar{D}_i$  である.

サイズパラメータ  $h_i = D_i$  の直径,  $h = \text{size } \mathcal{D} = \max\{h_i \mid i \in \Lambda\}$  を導入し, これを  $\mathcal{D}_h = \mathcal{D}$  と明示する.

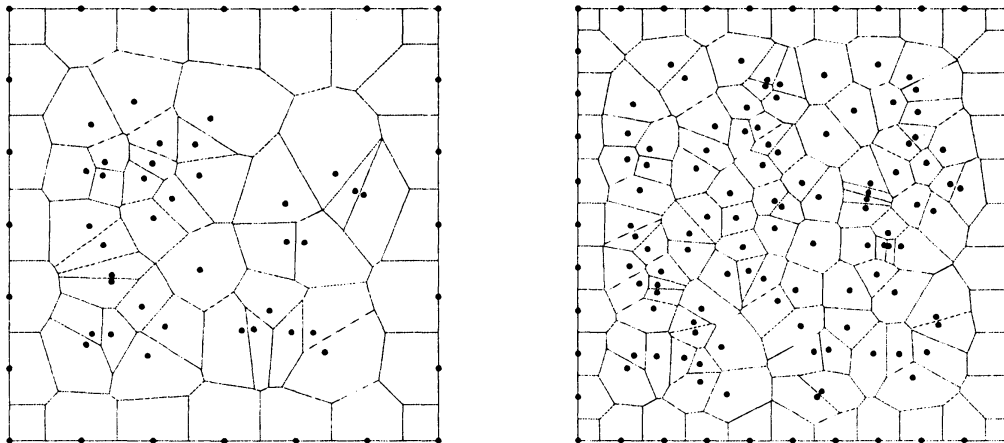


図1 Voronoi 図による許容メッシュ.

**定義 2** (許容メッシュ. 滑らかな領域の場合).  $\Omega$  を, 頂点が  $\partial\Omega$  上にあるような多角形  $\tilde{\Omega}$  で近似しておき,  $\tilde{\Omega}$  の許容メッシュ  $\tilde{\mathcal{D}}_h = \{\tilde{D}_i\}_{i \in \Lambda}$  を考える. このとき, 各  $\tilde{D}_i$  ( $i \in \partial\Lambda$ ) について,  $\partial\tilde{D}_i \cap \partial\tilde{\Omega}$  を, 対応する  $\partial\Omega$  の部分で置き換え, 曲線多角形  $D_i$  を作り, これを新しい境界 control volume とする.  $i \notin \partial\Lambda$  については,  $D_i = \tilde{D}_i$  とする. こうして,  $\Omega$  の許容メッシュ  $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$  を得る.

**注意 1.** 現在, 許容メッシュの定義としては, Eymard et al. [2] の Definition 9.1 を引用するのが普通である. そこでは, 上記の (A4) を許容メッシュの条件に含めず, 境界条件の処理に別の注意を払っている. しかし, それはあまり本質的ではなく, はじめから (A4) を仮定しておいた方が, 有限体積スキームの記述, 解析が明快になるので, 本論文ではそのようにした. なお, 上記の (A3) は, ラプラシアン  $\Delta u$  を近似する際に本質的である. もし, 変数係数の拡散  $\nabla \cdot K(x, t) \nabla u$  を扱う場合には ( $K$  はスカラー値あるいは行列値の関数), 別の許容メッシュあるいは別の定式化 (有限体積要素法) を考える必要がある.

このような許容メッシュ  $\mathcal{D}_h$  は, 具体的には次のように得られる.

**定義 3** (Voronoi 図).  $\bar{\Omega}$  に配置された,  $N$  個の点の集合  $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$  に対して,

$$\Omega_i = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - P_i| < |x - P_j| \quad (\forall j \in \Lambda, j \neq i)\}$$

を母点  $P_i$  に対応する Voronoi 多角形 (Dirichlet 領域, Wigner-Seitz セル, Thiessen 多角形) と呼ぶ. ( $\Omega_i$  は非有界に成り得る.) そして,  $\{\Omega_i\}_{i \in \Lambda}$  を母点集合  $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$  に対応する Voronoi 図 (Voronoi diagram) と呼ぶ.

**補題 1.**  $\{P_i\}_{i \in \Lambda}$  を配置しておき,  $\{\Omega_i\}_{i \in \Lambda}$  を対応する Voronoi 図とする.  $D_i = \Omega_i \cap \Omega$  と定義し,  $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$  を考える. このとき,  $\{P_i\}$  を  $\partial\Omega$  上に, 「多め」にかつ「適切」に配置することにより,  $\mathcal{D}_h$  は許容メッシュとなる (図 1). (正確な記述は, [2, Example 9.2])

$\Omega$  が多角形の時には, 次のような方法もある.

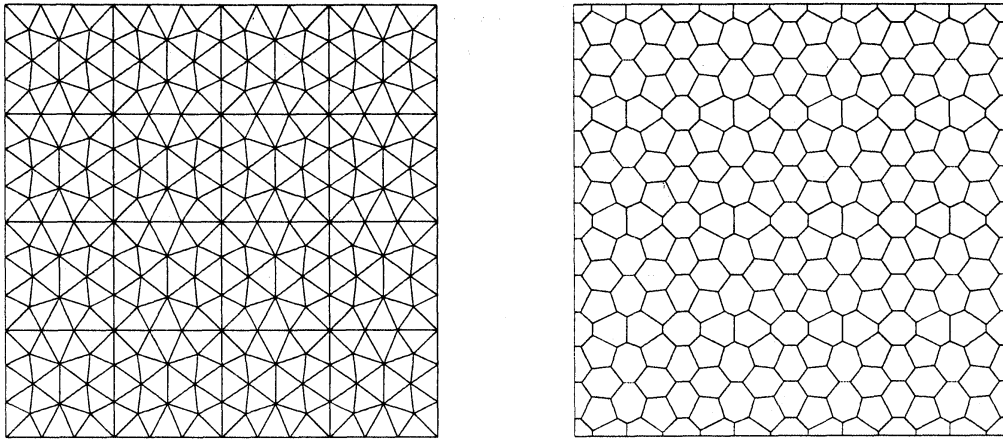


図2 鋭角型三角形分割 (左) とその外心領域に基づく双対メッシュ (右).

**定義 4** (鋭角型三角形分割).  $\mathcal{T}_h$  を,  $\Omega$  の (通常, 有限要素で用いられる) 三角形分割とする. (サイズパラメータの記号に同じ  $h$  を用いているが, 混乱の恐れはないであろう.) この  $\mathcal{T}_h$  が鈍角三角形を含まないとき,  $\mathcal{T}_h$  を  $\Omega$  の鋭角型三角形分割と呼ぶ. このとき, すべての三角形の頂点に一意的な番号を  $P_1, \dots, P_N$  と付けておく.

**定義 5** (外心領域).  $\mathcal{T}_h$  を  $\Omega$  の鋭角型三角形分割とする.  $P_i$  および  $P_j$  を頂点として含む三角形  $T$  を固定する. 三角形の非鈍角性より,  $T$  の外心 (circumcenter)  $P_C$  は  $P_C \in \bar{T}$  であることに注意する.  $T$  の辺のうち  $P_i$  を端点として持つものを  $\sigma_1, \sigma_2$ , さらにそれらの中点を  $M_1, M_2$  とし,  $P_i, M_1, P_C, M_2$  を結んでできる多角形の内部を  $D_{i,T}$  と書く. 次に,  $P_i$  を固定して,  $\Delta_i = \{T \in \mathcal{T} \mid P_i \in T\}$  とする. このとき,  $P_i$  に対応する外心領域 (circumcentric domain) とは,

$$D_i = \text{Int} \bigcup_{T \in \Delta_i} \overline{D_{i,T}}$$

で定義される領域のこと (Int は領域の内部を表す).  $\Omega$  の鋭角型三角形分割  $\mathcal{T}_h$  に対して,  $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$  を, 外心領域に基づく  $\mathcal{T}_h$  の双対メッシュと呼ぶ. 図2を参照のこと.

**補題 2.** 外心領域に基づく  $\Omega$  の鋭角型三角形分割  $\mathcal{T}_h$  の双対メッシュ  $\mathcal{D}_h$  は許容メッシュ.

**補題 3.** 外心領域に基づく  $\Omega$  の鋭角型三角形分割の双対メッシュは, Voronoi 図である. (もちろん, 母点集合は頂点集合.)

**注意 2.** Voronoi 多角形の頂点は, ちょうど3辺のみからなっている場合, 非退化であるといい, それ以外のとき, 退化であるという. Voronoi 図のすべての頂点为非退化ならば, 辺を共有する母点を結んでできるグラフ (を  $\bar{\Omega}$  に制限したもの) により,  $\Omega$  の三角形分割が得られる. このようにしてできる  $\Omega$  の三角形分割を Delaunay 三角形分割と呼ぶ. ただし, Voronoi 図の頂点がすべて非退化であっても, 生成される Delaunay 三角形分割は鋭角型とは限らない.

さて、移流拡散方程式 (1) に戻って、有限体積法による近似スキームを述べよう。許容メッシュ  $\mathcal{D}_h = \{D_i\}_{i \in \Lambda}$  が与えられたとして、(1) の第一式を各  $D_i$  で積分し、発散定理と境界条件を使うと

$$\int_{D_i} u_t dx - \int_{\partial D_i} \nabla u \cdot \nu_i dS + \int_{\partial D_i} u (\mathbf{b} \cdot \nu_i) dS = \int_{D_i} f dx$$

を得る。ただし、 $\nu_i$  は  $\partial D_i$  上の外向き単位法ベクトルである。先に、時間変数を

$$t_n = n\Delta t \quad (0 \leq n \leq L), \quad \Delta t = T/L, \quad L \in \mathbb{N}$$

と離散化して、陰的半離散方程式

$$\int_{D_i} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} dx - \int_{\partial D_i} \nabla u^n \cdot \nu_i dS + \int_{\partial D_i} u^n (\mathbf{b}(t_n) \cdot \nu_i) dS = \int_{D_i} f(t_n) dx \quad (2)$$

を考える。もちろん、 $u^n(x) \approx u(x, t_n)$ ,  $\mathbf{b}(t_n) = \mathbf{b}(x, t_n)$ ,  $f(t_n) = f(x, t_n)$  である。区分的定数関数の空間

$$V_h = \text{span} \{\varphi_i\}_{i \in \Lambda}, \quad \varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & (x \in D_i) \\ 0 & (x \in \Omega \setminus D_i) \end{cases}$$

を導入し、一般に、 $v_h \in V_h$  に対して、 $v_i = v_h(P_i)$  ( $i \in \Lambda$ ) と書く。さらに、

$$d_{ij} = |P_i - P_j|, \quad m_i = D_i \text{ の面積}, \quad m_{ij} = \sigma_{ij} \text{ の長さ}, \quad \tau_{ij} = \frac{m_{ij}}{d_{ij}},$$

$$\Lambda_i = \{j \in \Lambda \mid \sigma_{ij} \neq \emptyset\}, \quad \nu_{ij} = \sigma_{ij} \text{ 上の } D_i \text{ から } D_j \text{ へ向かう単位法ベクトル}$$

と記号を定める。(2) の解  $u^n$  を  $u^n \approx u_h^n \in V_h$  と近似することを考える。まず、拡散部分は、中心差分を使って、

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_i} \nabla u^n \cdot \nu_i dS &= \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\sigma_{ij}} \nabla u^n \cdot \nu_{ij} dS_{ij} \\ &\approx \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\sigma_{ij}} \frac{u_j^n - u_i^n}{d_{ij}} dS_{ij} = \sum_{j \in \Lambda_i} \tau_{ij} (u_j^n - u_i^n) \end{aligned}$$

とする。次に移流部分は、 $0 \leq r_{ij}^n \leq 1$  を後から定める重みパラメータとして、

$$\begin{aligned} \int_{\partial D_i} u^n (\mathbf{b}(t_n) \cdot \nu_i) dS &= \sum_{j \in \Lambda_i} \int_{\sigma_{ij}} u^n (\mathbf{b}(t_n) \cdot \nu_{ij}) dS \\ &\approx \sum_{j \in \Lambda_i} [(1 - r_{ij}^n) u_j^n + r_{ij}^n u_i^n] \underbrace{\int_{\sigma_{ij}} \mathbf{b}(t_n) \cdot \nu_{ij} dS}_{\beta_{ij}^n} \end{aligned}$$

とする.  $r_{ij}^n$  の選び方にはいろいろな方法があり得るが (cf. [5]), 最も典型的には,

$$r_{ij}^n = \begin{cases} 1 & (\beta_{ij}^n \geq 0) \\ 0 & (\beta_{ij}^n < 0) \end{cases}$$

とする. 残りの項は,

$$\int_{D_i} f(t_n) dx \approx m_i f_i^n, \quad f_i^n = \frac{1}{m_i} \int_{D_i} f(t_n) dx,$$

$$\int_{D_i} \frac{u^n - u^{n-1}}{\Delta t} dx \approx m_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t}$$

と近似する. 以上をまとめて, (1) の有限体積スキームとして, 次を得る.

$$\begin{cases} \{u_h^n\}_{n=0}^L \subset V_h, & u_i^0 = u_{0,i} \equiv \frac{1}{m_i} \int_{D_i} u_0(x) dx \quad (i \in \Lambda), \\ m_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \sum_{j \in \Lambda_i} \tau_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ \quad + \sum_{j \in \Lambda_i} [(1 - r_{ij}^n) u_j^n + r_{ij}^n u_i^n] \beta_{ij}^n = m_i f_i^n \quad (i \in \Lambda, 1 \leq n \leq L). \end{cases} \quad (3)$$

## 2 Dirichlet 境界条件の場合

零流束境界条件の代わりに, Dirichlet 境界条件を課した移流拡散方程式

$$\begin{cases} u_t - \nabla \cdot (\nabla u - \mathbf{b}u) = f & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u = g & \text{on } \partial\Omega \times (0, T), \quad u|_{t=0} = u_0 & \text{on } \Omega, \end{cases} \quad (4)$$

を考える.

このとき有限体積スキームは, 次のようになる:

$$\begin{cases} \{u_h^n\}_{n=0}^L \subset V_h, & u_i^0 = u_{0,i} \quad (i \in \Lambda), \\ m_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t} - \sum_{j \in \Lambda_i} \tau_{ij} (u_j^n - u_i^n) \\ \quad + \sum_{j \in \Lambda_i} [(1 - r_{ij}^n) u_j^n + r_{ij}^n u_i^n] \beta_{ij}^n = m_i f_i^n \quad (i \in \Lambda^0, 1 \leq n \leq L), \\ u_i^n = g_i^n \equiv g(P_i, t_n) \quad (i \in \partial\Lambda). \end{cases} \quad (5)$$

ただし,  $\Lambda^0 = \Lambda \setminus \partial\Lambda$  としている.

Eymard et al. [2] では, 次の事実が証明されている.

**定理 1** (一意可解性と  $L^2$  誤差評価, [2, Theorem 17.1]).  $\mathbf{b}$  は定数ベクトルとする.  $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$  を取り,  $f = u_t - \nabla \cdot (\nabla u - \mathbf{b}u)$ ,  $u_0 = u(\cdot, 0)$ ,  $g = u|_{\partial\Omega}$  として, 移流拡

散方程式 (4) と有限体積スキーム (5) を考える. まず, 任意の  $\Delta t > 0$  に対して, (5) は一意可解であり, 解  $\{u_h^n\}$  は,

$$\max_{1 \leq n \leq L} \|u_h^n\|_\infty \leq C_1$$

を満たす. ただし,  $C_1$  は  $\Omega, T, \mathbf{b}, f, g, u_0$  にのみ依存する正定数である. さらに, 許容メッシュが

$$\exists \gamma_0 > 0: \quad \sup_{\sigma_{ij}} \frac{h_i}{\text{dist}(\sigma_{ij}, P_i)} \leq \gamma_0 \quad (6)$$

を満たす時,  $\Omega, T, u$  に依存する正定数  $C_2$  が存在して,

$$\max_{1 \leq n \leq L} \|u(t_n) - u_h^n\|_2 \leq C_2(h + \Delta t).$$

**注意 3.** [2] の Theorem 17.1 では (6) の記述が抜けているが, 証明では用いているので, 間違いであろう.

また, Saito [8] では, 次の事実が証明されている.

**定理 2** (一意可解性と保存則, [8]).  $u_0, f(t_n) \in L^1(\Omega), \mathbf{b}(t_n) \in L^\infty(\Omega), g(t_n) \in H^{3/2}(\partial\Omega)$  ( $1 \leq n \leq L$ ) を仮定する. このとき, 条件

$$\Delta t \leq \frac{1}{2\|\mathbf{b}\|_\infty} \min_{\sigma_{ij}} \text{dist}(\sigma_{ij}, P_i) \quad (7)$$

の下で, (5) には一意的な解  $\{u_h^n\}$  が存在し,

$$\sum_{i \in \Lambda} u_i^n m_i = \int_{\Omega} u_0(x) dx + \sum_{n=1}^L \int_{\Omega} f(x, t_n) dx$$

を満たす. さらに,  $u_0, f, g \geq 0, u_0 \not\equiv 0$  ならば  $u_h^n > 0$  ( $1 \leq n \leq L$ ) となる.

**定理 3** (安定性・最大値原理, [8]). 定理 2 と同じ仮定と条件の下で, 次を満たす  $h_0, k_0 > 0$  が存在する.  $h \in (0, h_0)$  かつ  $\Delta t \in (0, k_0)$  ならば,

$$\max_{0 \leq t_n \leq T} \|u_h^n\|_\infty \leq C \max_{1 \leq n \leq L} [\|u_{0,h}\|_\infty, \|f_h^n\|_\infty, \|g_h^n\|_\infty].$$

**定理 4** ( $L^\infty$  誤差評価, [8]). 定理 2 の仮定に加えて, (4) の解  $u$  は,

$$u \in Z \equiv C^{1+1,1}(\bar{Q}) \cap C^{2+1,0}(\bar{Q}) \cap C^{0,1+1}(\bar{Q}), \quad Q = \Omega \times (0, T)$$

の意味で正則であるとする. さらに, 条件 (6), (7) に加えて

$$\exists \gamma_1 > 0: \quad \sup_{\sigma_{ij}} \frac{d_{ij}}{\text{dist}(\sigma_{ij}, P_i)} \leq \gamma_1 \quad (8)$$

を仮定する. このとき, (5) の解  $\{u_h^n\} \subset V_h$  について, 誤差評価

$$\sup_{0 \leq t_n \leq T} \|u(t_n) - u_h^n\|_\infty \leq C(h + \Delta t) \|u\|_Z$$

が成立する. ただし,  $C$  は,  $\Omega$ ,  $T$ ,  $u$ ,  $u_0$  に依存する正定数である.

**注意 4.** (7) の意味を説明するため, (1) の  $u_t$  を後退 Euler 近似で離散化した陰的半離散方程式

$$-\Delta u^n + \mathbf{b}(t_n) \cdot \nabla u^n + \left[ \nabla \cdot \mathbf{b}(t_n) + \frac{1}{\Delta t} \right] u^n = \frac{1}{\Delta t} u^{n-1} + f(t_n) \quad (9)$$

を考える. この方程式に最大値原理を適用するには,  $[\dots] \geq 0$  の条件が必要となる. 有限体積スキーム (5) は, (9) を空間変数について離散化したものと解釈でき, (7) は, この条件に対応していると考えられる. すなわち, (7) は, いわゆる CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) 条件の (熱方程式版) ではない.

### 3 Baba-Tabata 型有限要素法

前節で述べた有限体積法と同様の保存則・安定性を有する有限要素法に, Baba-Tabata 型の保存的上流有限要素法 [1] がある. 本節では, Baba-Tabata スキームが, ある状況下では, 本質的に有限体積スキーム (3) と同等であることを述べる.

再び移流拡散方程式 (1) を考える. 簡単のため,  $\Omega$  は  $\mathbb{R}^2$  の多角形領域とする.  $\{\mathcal{T}_h\} = \{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$  を  $\Omega$  の (通常の, 有限要素法における) 三角形分割の族とする. 離散化のパラメータは,  $h = \max\{h_T \mid T \in \mathcal{T}_h\}$  としている. ただし,  $h_T$  は  $T$  の外接円の直径.  $\{P_1, P_2, \dots, P_N\}$  は  $\mathcal{T}_h$  の節点 (頂点) 全体である.  $\hat{\psi}_i \in C(\bar{\Omega})$  は, 各  $T \in \mathcal{T}_h$  上で一次以下の多項式で  $\hat{\psi}_i(P_j) = \delta_{ij}$  なるもの. そして, 有限要素空間

$$\hat{V}_h = \text{span} \{\hat{\psi}_i\}_{i \in \Lambda}$$

を定義する. (引き続き,  $\Lambda = \{1, \dots, N\}$  と書いている.)

各  $P_i$  に対して, 定義 5 で述べた外心領域の定義において, 外心  $P_C$  を重心  $P_G$  で置き換えてできる重心領域 (barycentric domain)  $D_i$  を考える. (同じ記号を用いるが混乱の恐れはないであろう.) この場合, 三角形分割に鋭角性を仮定する必要はない. そして,

$$\bar{V}_h = \text{span} \{\bar{\psi}_i\}_{i \in \Lambda}, \quad \bar{\psi}_i(x) = \begin{cases} 1 & (x \in D_i) \\ 0 & (x \in \Omega \setminus D_i) \end{cases}$$

と定義する. 任意の  $\hat{v}_h \in \hat{V}_h$  は,  $\hat{v}_h(P_i) = \bar{v}_h(P_i)$  なる関係によって,  $\bar{v}_h \in \bar{V}_h$  と一意に対応している. 以下, 特に断らずに, この対応を使う.

(1) の有限要素近似を述べるために, その弱形式

$$\begin{cases} u \in C^1([0, T] : L^2(\Omega)) \cap C([0, T] : H^1(\Omega)), & u|_{t=0} = u_0, \\ \int_\Omega u_t v \, dx - \int_\Omega (\nabla u \nabla v - \mathbf{b} u v) \, dx = \int_\Omega f v \, dx & (\forall v \in H^1(\Omega)) \end{cases} \quad (10)$$



を確認しておく. Baba-Tabata 型の有限要素スキームは次のものである (11):

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\hat{u}_h^n\}_{n=0}^L \subset \hat{V}_h, \quad \hat{u}_h^0 = \hat{u}_{0,h} \equiv \sum_{i \in \Lambda} \bar{\psi}_i \frac{1}{m_i} \int_{D_i} u_0(x) dx, \\ \int_{\Omega} \frac{\bar{u}_h^{n+1} - \bar{u}_h^n}{\Delta t} \bar{v}_h dx + \int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h^n \cdot \nabla \hat{v}_h dx \\ \quad + \sum_{i \in \Lambda} \bar{v}_h^n(P_i) \sum_{j \in \Lambda_i} \beta_{ij}^n [(1 - r_{ij}^n) \hat{u}_h^n(P_j) + r_{ij}^n \hat{u}_h^n(P_i)] \\ \quad = \int_{\Omega} f(t_n) \hat{v}_h dx \quad (\hat{v}_h \in \hat{V}_h, 0 \leq n \leq L). \end{array} \right. \quad (11)$$

記号は前節と同じである. すなわち,

- $u_h^n \approx u(x, t_n), \quad t_n = n\Delta t, \quad \Delta t = T/L, \quad L \in \mathbb{N}.$
- $\sigma_{ij} = \partial D_i \cap \partial D_j, \quad \Lambda_i = \{j \in \Lambda \mid D_i \text{ と } D_j \text{ が辺 } \sigma_{ij} \text{ を共有}\}$
- $r_{ij}^n = \begin{cases} 1 & (\beta_{ij}^n \geq 0) \\ 0 & (\beta_{ij}^n < 0) \end{cases}, \quad \beta_{ij}^n = \int_{\sigma_{ij}} \mathbf{b}(x, t_n) \cdot \nu_{ij} dS.$

**注意 5.** 三角形分割  $\mathcal{T}_h$  は鋭角型であるとし, 外心領域に基づく双対メッシュ  $\mathcal{D}_h$  を考える (定義 4, 定義 5). そして, 上で「重心」を用いて定義したものを, すべて「外心」に置き換える. 例えば,  $\bar{V}_h = V_h$  であり, 他の記号はそもそも同じものを用いている. このとき,

$$\int_{\Omega} \nabla \hat{u}_h \cdot \nabla \hat{v}_h dx = - \sum_{i \in \Lambda} v_i \sum_{j \in \Lambda_i} \tau_{ij} (u_j - u_i) \quad (\hat{u}_h, \hat{v}_h \in \hat{V}_h)$$

が成り立つ (cf. [3], [4]). ただし,  $u_i = \hat{u}_h(P_i) = \bar{u}_h(P_i)$  などと書いている. すなわち, この状況下では, 有限体積スキーム (3) と Baba-Tabata 型有限要素スキーム (11) は,  $-\Delta u + \nabla \cdot (\mathbf{b}u)$  の近似に関する限り, 全く同じである. (異なっているのは,  $u_t$  と  $f$  の近似のみである.) なお, 注意 8 も参照されたい.

Baba and Tabata [1] では次の事実が証明されている:

**定理 5** (保存則, [1, Theorem 1.1]). (i) (11) の解  $\hat{u}_h^n$  は次を満たす:

$$\int_{\Omega} \bar{u}_h^n dx = \int_{\Omega} \bar{u}_{0,h} dx + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\Omega} f(x, k\Delta t) dx.$$

(ii) 三角形分割  $\mathcal{T}_h$  が鋭角型であるなら, 条件

$$\Delta t \leq \frac{\kappa_h^2}{3 + 4\kappa_h \|\mathbf{b}\|_{\infty}} \quad \left( \kappa_h = \min_{T \in \mathcal{T}_h} \kappa_T, \quad \kappa_T = T \text{ に現れる垂線の最小値} \right)$$

の下で,  $f, u_0 \geq 0$  ならば  $u_h^n \geq 0$  ( $1 \leq n \leq L$ ) が成立する.

**定理 6** (誤差評価, [1, Theorem 1.2]). 移流拡散方程式 (1) の解  $u$  は, 適当な  $m > 1/2$  に対して,

$$u \in W \equiv C^{1,1/2}(0, T; L^2(\Omega)) \cap C^1(0, T; H^1(\Omega)) \cap C(0, T; H^m(\Omega))$$

を満たす意味で正則とする. 三角形分割  $\{\mathcal{T}_h\}$  は鋭角型かつ正則であり, 適当な  $\varepsilon \in (0, 1)$  に対して, 条件

$$\Delta t \leq \frac{1}{3}(1 - \varepsilon)\kappa_h^2$$

が成り立つと仮定する. このとき, (11) の解  $\{\hat{u}_h^n\}$  について, 誤差評価

$$\max_{1 \leq n \leq L} \|\hat{u}_h^n - u(t_n)\|_2 \leq Ch\|u\|_W$$

が成り立つ.

**注意 6.** Baba and Tabata [1] では, さらに,  $\operatorname{div} \mathbf{b} \equiv \mathbf{0}$  と  $f \equiv 0$  の仮定の下で,  $L^\infty$  ノルムでの誤差評価が証明されているが, ここでは述べない.

**注意 7.** Baba-Tabata 型有限要素スキーム (11) は, さまざまな非線形問題に応用されている.

- 非線形楕円型・放物型問題 (特異摂動問題): Tabata [9], [10].
- 二相 Navier-Stokes 方程式: Tabata and Kaizu [11].
- Keller-Segel 系: Saito [6], [7].

**注意 8.** 注意 5 で述べたように, 許容メッシュが鋭型角三角形分割の外心領域に基づく双対メッシュとして定義されているときには, 有限体積スキーム (3) と Baba-Tabata 型有限要素スキーム (11) は, 同等であるといえる. しかしながら, これは空間 2 次元の場合のみに成立する事実である. 実際, (3) と (11) は, とともに,  $\Omega$  が  $\mathbb{R}^3$  の有界領域の場合に拡張できるが, このとき両者の間に直接の関係はない. 空間 3 次元の場合には, 鋭角型三角形分割 (の 3 次元拡張版) から, 定義 5 で述べたような双対メッシュを作ることができないからである. したがって, 空間 3 次元の問題を意識すれば, 有限体積法と Baba-Tabata 型有限要素法は, プログラミングの容易さや数学理論の裏付け等で, それぞれに一長一短があり, どちらか一方があれば十分というわけではない.

## 4 出会い

前節までで, 本論文の学術的な目的は終わっているが, 最後に, 筆者が Baba-Tabata 型上流有限要素法と出会った経緯を記しておきたい. きっかけは, 1978 年に刊行された, “京都大学数理解析研究所講究録 328 巻: 有限要素法の基礎理論 III” であった. ある日, この講究録を読んでいたのだが, とくに勉強する気持ちがあったわけではなく, お茶を飲みながらパラパラと頁をめくっていただけであり, したがって, 専門的な論文よりも, 巻末に

あった‘パネルディスカッション印象記(134–144頁)’に惹かれたのは当然であった。これは、研究集会の二日目(1978年1月24日)に、「有限要素法—現状と展望—」というテーマで行われたパネルディスカッションを、牛島照夫先生(電気通信大学)が、記録として残されたものであった。ちなみに、発言者として、藤田宏(東大理)、森正武(京大数研)、中野孝昭(東大工)\*<sup>1</sup>、金山寛(富士ファコム制御)、川井忠彦(東大生研)、三村昌康(甲南大理)、山口昌哉(京大理)の各先生方が登壇されたそうである(所属はもちろん当時のもの)。

登壇者の先生方の発言を、いま(2010年3月)改めて読んでみると大変興味深い。例えば\*<sup>2</sup>、森先生は、有限要素法の誤差解析の方向性として、変分法に基づく事後解析の重要性を強調しているが、これは過去20年で最も発展した分野の一つであり、事後解析に基づく adaptive mesh refinement は、安価な(あるいは無償の)ソフトウェアとして誰にでも利用できる状況になっている。中野先生が、無限領域における境界値問題を、領域を有限部分と無限部分に分け、それぞれで問題を解いたうえで、解を重ね合わせで求める方法に言及しているが、これは領域分割法として、とくに散乱問題の数値計算で実用化されている。川井先生の言う、質量、運動量、エネルギーなどの保存則の離散化は、降旗大介・松尾宇泰らによる、離散変分法であろう。また、同じく川井先生や山口先生が語っておられる、新しいタイプの有限要素法は、現在、ハイブリッド型不連続 Galerkin 法として、活発に研究が行われている。

さて、このように登壇者の先生方が、それぞれに、いろいろなことをお話されているのだが、そのなかで、金山先生が、他の先生方と比べると大変短い発言をされている。それは、次の通りである。

**金山寛氏.** ここでは発言したかったことは、田端氏の講演で述べられていることにつける。民間の立場からは、メッシュ幅を有限にとめたとき得られるスキームが、現象の本質的性質をみだしているか否かが重要である。数学サイドからの研究は、スキームの収束性の研究に精力がおかれすぎているのではないか。

短いながらも、金山先生の興奮が伝わってくるような言葉である。私はすぐに、「田端氏の講演で述べられていること」が気になり、78–84頁の田端正久先生(当時、京大理)と馬場金司先生(三菱重工)の共著である‘有限要素法による保存的上流スキームについて’と題された和文の論文を読んだ。それが、私の Baba-Tabata 型上流有限要素法との出会いである。その後、細胞性粘菌の凝集現象の数学モデルである Keller-Segel 系の数値計算にこのスキームが応用できることに思い至り、ささやかながら結果を残すことができた([6], [7])。金山先生が、このような発言をされなかったら、また、そうでなくても、牛島先生がそれを記録して下さっていなかったら、私の研究の方向性も少し違ったものになっていたかも知れない。記録を残すことの重要性を改めて痛感する。

なお、この話には後日談がある。2010年2月16–17日に、田端先生(九大数理)の九州

\*<sup>1</sup> 山本善之先生(東大工)の代理。

\*<sup>2</sup> ここに書いたことは、私の個人的な感想・印象であり、明確な根拠があるわけではありません。鵜呑みにしないよう、ご注意ください。

大学退職を記念して“研究集会：数値シミュレーションの理論と実践”が、九州大学西新プラザで開かれた。その懇親会の席で、金山先生(九大工)に上の発言についてお話を伺った。金山先生は、自分の発言が講究録に記録されていることは、全く知らなかったそうである。しかし、そう発言したことは、「はっきりと覚えている」と仰った。そして、金山先生の発言のあとで、パネルディスカッション会場にいた菊地文雄先生(当時、東大宇航研)が、「有限要素法の数学的な基礎理論の目的は、スキームの収束性を示すところであり、研究の方向性は間違っていない」と反論されたそうである。このことは記録には残っていない。実は、その懇親会に菊地先生(東大数理)も参加されていたので、金山先生とともに確認したところ、菊地先生も「はっきりと覚えている」そうである。その後、お二人が「お互い良かった」と笑顔で話していらっしゃる姿が印象的であった。

## 参考文献

- [1] K. Baba and M. Tabata: *On a conservative upwind finite element scheme for convective diffusion equations*, RAIRO Anal. Numér. **15** (1981) 3–25.
- [2] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin: *Finite Volume Methods, Handbook of Numerical Analysis VII* (2000) 713–1020, Elsevier.
- [3] T. Ikeda: *Maximum Principle in Finite Element Models for Convection-Diffusion Phenomena*, Lecture Notes Numer. Appl. Anal. **4**, North-Holland, Kinokuniya, 1983.
- [4] H. Kanayama: *Discrete models for salinity distribution in a bay: conservation law and maximum principle*, Theoretical and Applied Mechanics, **28** (1978) 559–579.
- [5] P. Knabner and L. Angermann: *Numerical Methods for Elliptic and Parabolic Partial Differential Equations*, Springer, 2003.
- [6] N. Saito: *Conservative upwind finite-element method for a simplified Keller-Segel system modelling chemotaxis*, IMA J. Numer. Anal. **27** (2007) 332–365.
- [7] N. Saito: *Error analysis of a conservative finite-element approximation for the Keller-Segel system of chemotaxis*, preprint.
- [8] N. Saito: *On the maximum-norm error estimates of the finite volume approximation for convection-diffusion equations*, to appear.
- [9] M. Tabata: *Some applications of the upwind finite element method*, Theoretical and Applied Mechanics, **27** (1979) 277–282.
- [10] M. Tabata: *Conservative upwind finite element approximation and its applications*, Analytical and Numerical Approaches to Asymptotic Problems in Analysis, North-Holland, 369–381, 1981.
- [11] M. Tabata and S. Kaizu: *Finite element schemes for two-fluids flow problems*, Proc. the 7th China-Japan Seminar on Numer. Math. 139–148, Science Press, 2006.

2010年3月26日