

波動問題などに対する代用電荷法の数理的性質  
緒方秀教 (電通大・情報工学科)

Mathematical Properties of the Fundamental Solution Method  
Applied to PDE Problems Such As Wave Problems

Hidenori Ogata

Department of Computer Science, The University of Electro-Communications,

Email: ogata@im.uec.ac.jp

キーワード：波動問題，ヘルムホルツ方程式，ディリクレ問題，代用電荷法

Keywords: wave problem, Helmholtz equation, Dirichlet problem, fundamental solution method

## 1 序

代用電荷法 (charge simulation method, 基本解近似解法 (fundamental solution method) などともよばれる) は偏微分方程式問題，とくに，ポテンシャル問題の数値解法として知られ，(1) プログラミングが簡単，(2) 計算量が少ない，(3) ある条件の下では指数関数的収束という高精度な近似解を与えるという利点から，科学技術計算に広く応用されている．一方，代用電荷法の理論的性質は 2 次元ポテンシャル問題については精力的に調べられているが [4, 5, 6]，他の偏微分方程式については，波動問題に対する理論的研究 [2, 3, 9, 10] はあるものの，まだ十分調べられているとは言えない．そこで，ポテンシャル問題以外の偏微分方程式問題について，ポテンシャル問題の代用電荷法に関する性質がこれらの問題にも成り立つかどうかという観点から，それらの問題に対する代用電荷法の性質を調べることにする．本論文では特に，一番簡単なケースとも言える 2 次元円盤外部領域の問題を考え，波動問題 (Helmholtz 方程式)，周期的弾性問題に対する代用電荷法の性質 (誤差評価) を数値実験で調べた．さらに波動問題については理論誤差評価も与えた．その結果，円板外部領域における問題については，2 次元ポテンシャル問題について知られている代用電荷法の性質—後述で「 $O(q^N)$  の法則」と呼ぶ性質—が，他の偏微分方程式問題のうち本論文で扱ったものについても普遍的に成り立つことが分かった．

本論文の構成は次のとおりである．第 2 節では，2 次元円板外部領域の Dirichlet 境界値ポテンシャル問題に対する代用電荷法について復習する．この問題ではいわば「 $O(q^N)$  の法則」，すなわち，代用電荷法で用いるパラメータ  $q$  ( $0 < q < 1$ ) について節点数  $N$  に対し誤差が  $O(q^N)$  で減衰することが知られている．ここでは，この法則に関する定理を示し数値実験で定理の成立を確かめる．第 3 節では，2 次元円板外部領域における周期的弾性問題および波動問題に対する代用電荷法についても，2 次元ポテンシャル問題と同様  $O(q^N)$  の法則が成り立つことを，先行研究から指摘する．第 4 節では，2 次元円板外部領域における Dirichlet 境界値波動問題に対する代用電荷法について，理論・数値実験の両面から調べる．その結果，誤差評価に関する  $O(q^N)$  の法則が成り立つことが理論・数値実験により確かめられる．第 5 節では前節の理論誤差評価の定理の証明の概略を与える．第 6 節では本論文の総括を行い，今後の課題について触れる．

## 2 2次元ポテンシャル問題に対する代用電荷法

2次元外部単連結領域  $\mathcal{D}$  における次の  $u$  に対する Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題を考える。

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad u = f \quad \text{on } \partial\mathcal{D}, \quad \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} |u(\mathbf{x})| < \infty. \quad (1)$$

ここで,  $f$  は境界  $\partial\mathcal{D}$  上で定義された関数であり, 問題 (1) に対する代用電荷法の近似解は次の形で与えられる<sup>1</sup>.

$$u(\mathbf{x}) \approx u_N(\mathbf{x}) = Q_0 + \sum_{j=1}^N \frac{Q_j}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|^{-1}, \quad (2)$$

ここで,  $\boldsymbol{\xi}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) は境界  $\partial\mathcal{D}$  内部に配置された点で, 電荷点とよばれる (図1参照).  $Q_j$  ( $j = 0, 1, \dots, N$ ) は電荷とよばれる実数係数であり, 条件<sup>2</sup>

$$\sum_{j=1}^N Q_j = 0 \quad (3)$$

を満たす. ここで,  $u_N$  は領域  $\mathcal{D}$  で (1) の第1式 (Laplace 方程式) および第3式を厳密に満たすことに注意する. 残る第2式の境界条件については, 境界  $\partial\mathcal{D}$  上に拘束点と呼ばれる点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  をとり (図1参照), 次の拘束条件を満たすように電荷  $Q_j$  を定める.

$$u_N(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (4)$$

物理的には, 近似 (2) は有限個の点  $\boldsymbol{\xi}_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) に配置された点電荷  $Q_j$  がつくる Coulomb ポテンシャルの重ね合わせにより, 解であるポテンシャル  $u$  を近似していることに相当する. 式 (3), (4) は電荷  $Q_j$  に対する次の連立1次方程式に書き直される.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 \\ Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x}_i - \boldsymbol{\xi}_j\|^{-1} \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (5)$$

連立1次方程式 (5) を解くことにより未知であった電荷  $Q_j$  が定まり, これを (2) に代入することにより近似解  $u_N$  が得られる.

2次元ポテンシャル問題に対する代用電荷法の数理的性質について, 多くの研究が行われている [4, 5, 6]. その中でも代表的な研究として, 桂田・岡本による円板内部領域問題に対する代用電荷法の数理的研究 [4] があり, これには, 電荷点・拘束点を適切にとれば代用電荷法は可解であり, かつ, 誤差は電荷点数=拘束点数= $N$  に対し指数関数的減衰することが示されている. ここでは, 円板外部領域<sup>3</sup>

$$\mathcal{D}_\rho = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{x}\| > \rho \} \quad (6)$$

<sup>1</sup>ここでは代用電荷法近似として室田が提案した不変スキーム [7] を考える.

<sup>2</sup>この条件は, 座標のスケール変換  $\mathbf{x} \rightarrow \alpha\mathbf{x}$ ,  $\boldsymbol{\xi}_j \rightarrow \alpha\boldsymbol{\xi}_j$  ( $\alpha$  は定数) および境界条件の原点移動  $f(\mathbf{x}) \rightarrow f(\mathbf{x}) + c$  ( $c$  は定数) に対して近似解  $u_N$  が不変であるという要請から課される [7].

<sup>3</sup>以降, 慣習に従って, 整数全体の集合を  $\mathbb{Z}$ , 実数全体の集合を  $\mathbb{R}$ , 複素数全体の集合を  $\mathbb{C}$  と記す. よって,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  は2次元 Euclid 平面を表わす.

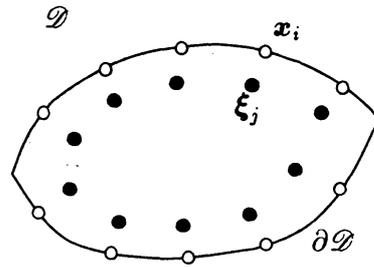


図 1: 代用電荷法の拘束点  $x_i$ , 電荷点  $\xi_j$ .

( $\rho > 0$  は定数) における 2次元ポテンシャル問題を考える. この問題に対しては, 円板内部領域問題の場合 [4] と同様, 電荷点・拘束点を適切にとれば代用電荷法の可解性および指数関数的収束が, 次の定理により示される.

**定理 1** 円板外部領域  $\mathcal{D}_\rho$  におけるポテンシャル問題 (1) に対する代用電荷法の近似解を考える. ただし, 拘束点  $x_i$ , 電荷点  $\xi_j$  は次のようにとる.

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \rho \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \right), \\ \xi_i &= q\rho \left( \cos \frac{2\pi(i-1)}{N}, \sin \frac{2\pi(i-1)}{N} \right) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, N). \quad (7)$$

ここで,  $q$  は  $0 < q < 1$  なる定数である. このとき, 次の 1. 2. が成立する.

1. 代用電荷法は可解である. すなわち, 電荷  $Q_j$  を定める連立 1 次方程式 (5) は一意解をもつ.
2. 境界データ  $f$  の Fourier 係数

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (8)$$

は  $|f_n| \leq A_f a^{|n|}$  ( $A_f$  は正の定数,  $a$  は  $0 < a < 1$  なる定数) のように指数関数的減衰すると仮定する. このとき, 代用電荷法の近似解  $u_N$  の誤差について,  $N$  を十分大きくとれば次の不等式が成り立つ.

$$\epsilon_N = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}} |u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})| \leq C(\rho, a, q) A_f \cdot \begin{cases} q^N & (q > \sqrt{a}) \\ Nq^N & (q = \sqrt{a}) \\ a^{N/2} & (q < \sqrt{a}). \end{cases} \quad (9)$$

ここで,  $C(\rho, a, q)$  は  $\rho, a, q$  に依る正の定数である. □

この定理の証明は, [4] に記されている定理の証明と同様の方法を用いて行うことができる.

定理1における拘束点・電荷点の配置(7)を本論文では,  $q$ を **arrangement parameter** とする**等間隔同位相点配置**とよぶことにする. 定理1の主張は, 円板外部領域ポテンシャル問題に対し, arrangement parameter  $q$ の等間隔同位相点配置に電荷点・拘束点をとった代用電荷法を適用すると, その誤差は ( $q$ があまり小さくなければ)  $O(q^N)$ で減衰するということである. これを本論文では  **$O(q^N)$ の法則**とよぶことにする. 本論文では, この  $O(q^N)$ の法則が, 数値実験からポテンシャル問題以外の円板外部領域問題についても成立するを報告する. その前に, ポテンシャル問題に対する定理1の成立を数値実験でにより検証する.

**数値例** ここでは, 定理1の成立を数値例により確かめる. 以降, 本論文の数値計算はすべて, DELL Precision 380 Workstation (Intel Pentium4 CPU 3.80GHz, メモリ 0.96GB) でC++のプログラム, コンパイラとしてGCCを用い, 倍精度計算で行っている.

境界データ  $f$ を

$$f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (a = 0.16).$$

とするポテンシャル問題(1)に対し, 代用電荷法による近似解を求める. 境界データ  $f$ の Fourier 係数は  $f_n = O(a^{|n|})$  ( $n \rightarrow \pm\infty$ )を満たすので, 定理1によれば理論誤差評価は

$$\epsilon_N = \begin{cases} O(q^N) & (q > \sqrt{a} = 0.4) \\ O(a^{N/2}) = O(0.4^N) & (q < \sqrt{a} = 0.4) \end{cases} \quad (N \rightarrow \infty) \quad (10)$$

となる. 一方, 数値計算により求めた誤差は,  $N$ に対し指数関数的に減衰することが分かる(図2参照). そこで, 誤差の減衰率を最小自乗近似により調べると, 数値計算結果は理論誤差評価(10)とよく符合している(表1参照).

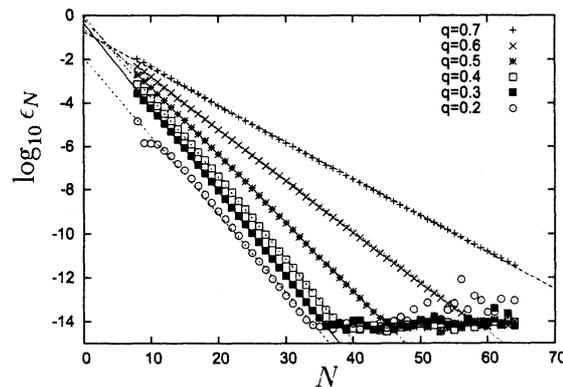


図 2: 2次元円外領域におけるポテンシャル問題に対する代用電荷法の誤差.

表 1: 2次元円外領域におけるポテンシャル問題に対する代用電荷法の誤差のオーダー.

$q$	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$\epsilon_N$	$O(0.68^N)$	$O(0.59^N)$	$O(0.49^N)$	$O(0.42^N)$	$O(0.42^N)$	$O(0.44^N)$

### 3 円板外部領域問題の代用電荷法に対する $O(q^N)$ の法則

前節で記した通り, 2次元円板外部領域におけるポテンシャル問題に対する代用電荷法の誤差評価について,  $O(q^N)$  の法則が成立する. ところで, 以下で紹介するように, 著者の研究を含むいくつかの先行研究において, ポテンシャル問題以外の2次元円板外部問題に対する代用電荷法についても, 誤差評価に関する  $O(q^N)$  の法則が成立する.

**弾性問題** 著者は論文 [8] において, 1次元周期的な構造を持つ2次元弾性体の問題に対する代用電荷法を提案した (方法の詳細は [8] を参照). この論文では数値例のひとつとして, 1次元周期的に並ぶ円孔列をもつ2次元弾性体の問題 (図 3(a) 参照) を扱い, assignment parameter  $q$  の等間隔同位相点配置に電荷点・拘束点をとった代用電荷法を適用した. この問題では, 弾性体上面に一様に圧力を加え, 下面を固定, そして円孔境界には応力が働いていないという境界条件を課している. 図 3(a) は, 圧力を加えていないとき弾性体に描いた正方形メッシュの変形の様子を示している. 図 3(b) は, この問題に対する代用電荷法の誤差を示している. 図中, “hole” のグラフは円孔境界上の応力 (= 0) の誤差, “top” のグラフは弾性体上面の応力の相対誤差, “bottom” のグラフは弾性体下面の変位の相対誤差を表わす. この図より, 円孔境界上の誤差は代用電荷法の点数  $N$  に対し指数関数的に減衰していることが分かる. そこで, いくつかの assignment parameter  $q$  の値に対し円孔境界上の誤差の減衰率を最小自乗近似で求めた. 表 2 にその結果を示す. 表から分かるように,  $q = 0.4$  の場合を除いて誤差は  $O(q^N)$  のオーダーで減衰していることが分かる. このことは,  $O(q^N)$  の法則が周期的弾性体問題の代用電荷法に対して成立することを示唆している.

表 2: 図 3 の弾性体問題に対する代用電荷法の誤差 (円孔境界上の応力の誤差).

$q$	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4
誤差	$O(0.93^N)$	$O(0.81^N)$	$O(0.71^N)$	$O(0.62^N)$	$O(0.53^N)$	$O(0.66^N)$

**波動問題** 千葉・牛島は波動問題 (ヘルムホルツ方程式の境界値問題) に対する代用電荷法 (基本解近似解法) について, 一連の研究を理論・数値実験の両面から行っている [2, 9, 10]. 波動問題に対する代用電荷法の具体的な方法については, 次節で詳しく述べる. これらの一連の研究の中のひとつ, [2] では, 円板外部領域における Helmholtz 方程式の Neumann 問題に対する代用電荷法を扱っている. そして, assignment parameter  $q$  の等

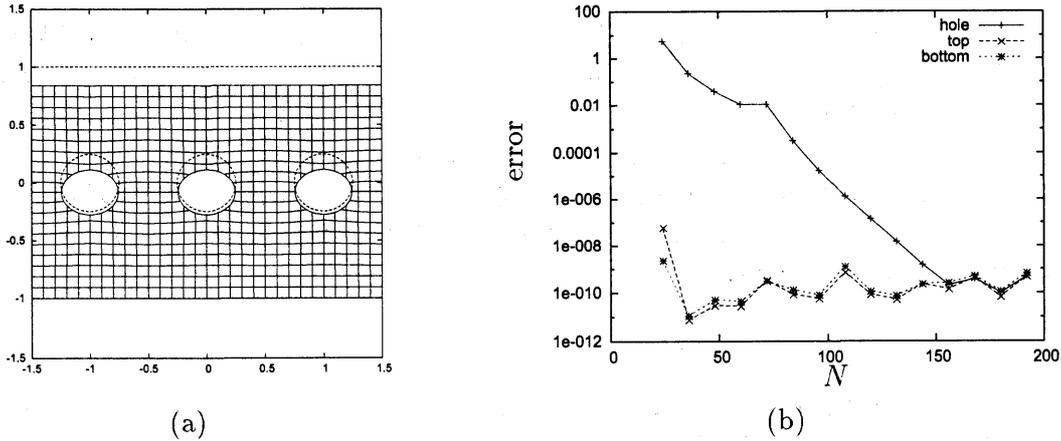


図 3: (a)1次元周期的に並ぶ円孔を持つ2次元弾性体. 上面に一様に圧力を加え, 下面を固定している. そして, 円孔境界には応力は働いていない. (b)1次元周期的円孔列をもつ2次元弾性体の問題に対する代用電荷法の誤差. (a), (b)ともに [8] より引用.

間隔同位相点配置に電荷点・拘束点をとった代用電荷法の誤差が, 理論的には  $O(q^{N/2})$  で与えられることを示している一方, 数値実験では  $O(q^N)$  となることを報告している. このことは, 波動問題の代用電荷法に対して  $O(q^N)$  の法則が成り立つことを示唆している.

上記のとおり, 弾性体問題および波動問題に対する代用電荷法に対して  $O(q^N)$  の法則が成り立つことが示唆される. そこで, 次の節では, 2次元円板外部 Dirichlet 境界値波動問題に対する代用電荷法について, 数値実験で誤差のふるまいを調べることにより  $O(q^N)$  の法則が成り立つことを改めて確かめ, さらに理論解析による定理で  $O(q^N)$  の法則の成立を主張する.

#### 4 円板外部 Dirichlet 波動問題に対する代用電荷法

本節では, 2次元円板外部領域の Dirichlet 境界値波動問題に対する代用電荷法について, 誤差評価に関する  $O(q^N)$  の成立を数値実験・理論の両面から調べる.

はじめに, 一般の外部単連結領域  $\mathcal{D}$  における波動問題に対し, 代用電荷法はどのように適用されるかを述べる. 次の  $u$  に対する Dirichlet 境界値波動問題 (Helmholtz 方程式) を考える.

$$-\Delta u - k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathcal{D}, \quad u = f \quad \text{on } \partial\mathcal{D}, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0. \quad (11)$$

ここで,  $f$  は境界  $\partial\mathcal{D}$  上で定義された関数, 式 (11) 第3式は Sommerfeld 放射条件である. 問題 (11) に対する代用電荷法の近似解は次のようになる.

$$u(\mathbf{x}) \approx u_N(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N Q_j H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}_j\|). \quad (12)$$

ここで,  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) は境界  $\partial\mathcal{D}$  内部に与えられた点で, 波源点とよばれる (図 1 参照).  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) は複素数定数である. 物理的には, 近似解 (12) は点  $\xi_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) から放射される 2次元球面波の重ね合わせで波動問題 (11) の解を近似していることに相当する. 近似解  $u_N$  は領域  $\mathcal{D}$  において Helmholtz 方程式 ((11) 第 1 式) および Sommerfeld 放射条件 ((11) 第 3 式) を厳密にみたすことに注意する. 残る Dirichlet 境界条件 ((11) 第 2 式) については, 境界  $\partial\mathcal{D}$  上に拘束点と呼ばれる点  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N$  をとり (図 1 参照), 拘束条件

$$u_N(\mathbf{x}_i) = f(\mathbf{x}_i) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (13)$$

が成り立つよう係数  $Q_j$  ( $j = 1, 2, \dots, N$ ) を定める. 拘束条件 (13) は,  $Q_j$  に対する次の連立 1 次方程式に書き直される.

$$\begin{bmatrix} G_{11} & \cdots & G_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{N1} & \cdots & G_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(\mathbf{x}_1) \\ \vdots \\ f(\mathbf{x}_N) \end{bmatrix}, \quad G_{ij} = H_0^{(1)}(k\|\mathbf{x}_i - \xi_j\|) \quad (i, j = 1, 2, \dots, N). \quad (14)$$

連立 1 次方程式 (14) を解いて未知係数  $Q_j$  を定め (12) を代入することにより, 近似解  $u_N$  を得る.

とくに 2次元円板外部領域  $\mathcal{D} = \mathcal{D}_\rho$  の問題については, 拘束点  $\mathbf{x}_i$ , 波源点  $\xi_j$  を assignment parameter  $q$  の等間隔同位相点配置 (7) にとった代用電荷法を適用すると, 次の定理が成り立つ.

**定理 2** 円板外部領域  $\mathcal{D}_\rho$  における Dirichlet 境界値波動問題 (11) に対し, 拘束点  $\mathbf{x}_i$ , 波源点  $\xi_j$  を assignment parameter  $q$  の等間隔同位相点配置 (7) にとった代用電荷法を適用する. このとき, 次の 1., 2. が成立する.

1.  $q, k, \rho$  が

$$J_n(qk\rho) \neq 0 \quad (\forall n \in \mathbb{Z}) \quad (15)$$

を満たすならば, 代用電荷法は可解である. すなわち,  $Q_j$  に対する連立 1 次方程式 (14) は一意解をもつ.

2. 条件 (15) に加え, さらに, 境界データ  $f$  の Fourier 係数

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) e^{-in\theta} d\theta \quad (n \in \mathbb{Z}) \quad (16)$$

が  $|f_n| \leq A_f a^{|n|}$  ( $A_f$  は  $f$  に依る正の定数) のように指数関数的減衰すると仮定する. このとき, 十分大きい  $N$  に対し, 近似解  $u_N$  の誤差について次の不等式が成立する.

$$\epsilon_N = \sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{D}_\rho} |u(\mathbf{x}) - u_N(\mathbf{x})| \leq C(k, \rho, a, q) A_f \cdot \begin{cases} q^N & (q > \sqrt{a}) \\ Nq^N & (q = \sqrt{a}) \\ a^{N/2} & (q < \sqrt{a}). \end{cases} \quad (17)$$

ここで,  $C(k, \rho, a, q)$  は  $k, \rho, a, q$  のみに依る正の定数である.  $\square$

この定理より, 2次元円板外部領域の Dirichlet 境界値波動問題に対し assignment parameter  $q$  の等間隔同位相点配置の拘束点・波源点を用いた代用電荷法を適用すると,  $q$  があまり小さくなければ誤差は  $O(q^N)$  のオーダーで指数関数的に減衰する, すなわち,  $O(q^N)$  の法則が成立する.

**数値例** 二つの数値例により, 定理 2 の成立を確かめる.

1 番目の数値例は, 境界データ  $f$  を

$$f^{(I)}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \cos m\theta \quad (18)$$

とした波動問題 (11) である. この問題の場合, 境界データの Fourier 係数は任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $f_n^{(I)} = O(\varepsilon^{|n|})$  ( $n \rightarrow \pm\infty$ ) をみたすので, 定理 2 によれば理論誤差評価は

$$\epsilon_N = O(q^N) \quad (N \rightarrow \pm\infty) \quad (19)$$

となる. 一方, 数値実験結果は下記のとおりとなる.  $m = 1, 16$  の場合について, 代用電荷法の近似解の誤差  $\epsilon_N$  の  $N$  に対する変化をいくつかの assignment parameter  $q$  の値について計算し, 図 4 に記した.

$m = 1$  の場合, 図 4 より, 誤差  $\epsilon_N$  は  $N$  に対し指数関数的に減衰することが分かる. そこで, 誤差  $\epsilon_N$  が指数関数的減衰するような  $N$  の範囲で  $\epsilon_N$  の減衰率を最小二乗近似で計算し, その結果を表 3 に載せた. この表から,  $k\rho = 1$  の場合, 誤差  $\epsilon_N$  はほぼ  $O(q^N)$  のオーダーとなり, 理論誤差評価 (19) と符合する.  $k\rho = 10$  の場合,  $q = 0.7, 0.6$  と  $q$  が比較的大きい場合は誤差  $\epsilon_N$  は  $O(q^N)$  のオーダーとなり, 理論誤差評価 (19) と符合する. 一方, それらより  $q$  が小さい  $q = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2$  の場合, 誤差  $\epsilon_N$  は理論誤差評価 (19) の  $\epsilon_N = O(q^N)$  より若干小さいオーダーとなる.

$m = 16$  の場合, 図 4 より,  $N$  を大きくしていくと誤差  $\epsilon_N$  は  $N = 32$  まではほとんど減衰せず,  $N = 32 = 2m$  において一旦大きく減少, その後指数関数的減衰する. そして, 誤差の減衰の仕方は  $m = 1$  の場合に比べて不安定である. しかし, この場合も ( $q = 0.2$  の場合を除いて)  $N$  が 32 よりある程度大きい範囲では  $\epsilon_N$  は  $N$  について指数関数的減衰している. そこで, それぞれの  $q$  の値について,  $\epsilon_N$  が  $N$  について指数関数的減衰するような  $N$  の範囲において  $\epsilon_N$  の減衰率を最小自乗近似を用いて調べ, 表 3 に記した.  $q = 0.2$  の場合は  $\epsilon_N$  が指数関数的減衰するような  $N$  の範囲が見られないので, 誤差の減衰率を計算していない. 表 3 より,  $k\rho = 1$  の場合,  $q = 0.7, 0.6, 0.5$  について誤差  $\epsilon_N$  はほぼ  $O(q^N)$  のオーダーで減衰し, 理論誤差評価 (19) と符合する.  $m = 16$  の場合, 表に載せている ( $q = 0.2$  を除く) すべての  $q$  の値に対して誤差  $\epsilon_N$  はほぼ  $O(q^N)$  のオーダーとなり, 理論誤差評価 (19) と符合する.

2 番目の数値例は, 境界データを

$$f^{(II)}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) = \frac{1 - a \cos \theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} \quad (a = 0.16) \quad (20)$$

とした波動問題 (11) である. この問題の場合, 境界データの Fourier 係数は  $f_n^{(II)} = O(a^{|n|})$  ( $n \rightarrow$

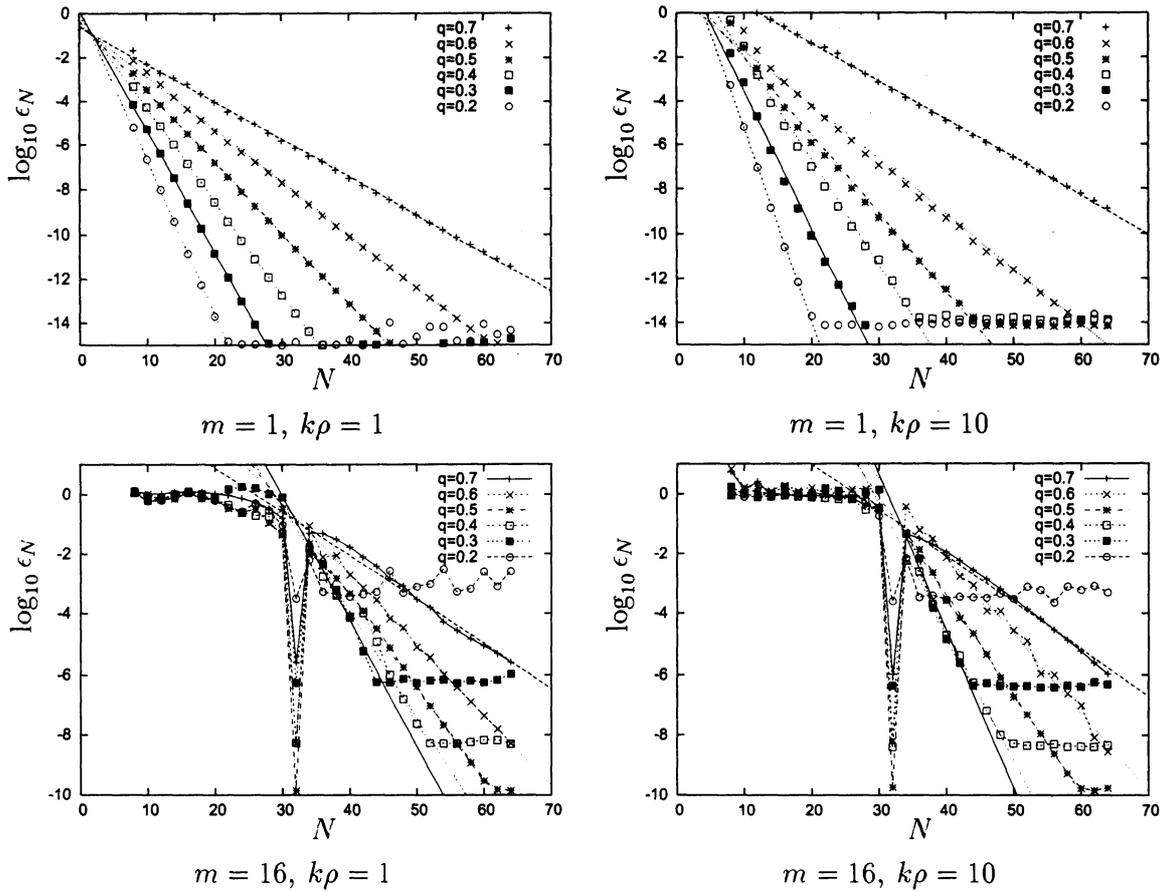


図 4: 境界データ  $f^{(1)}$  の波動問題に対する代用電荷法の誤差。

$\pm\infty$ ) をみtasので、定理 2 によれば理論誤差評価は

$$\epsilon_N = \begin{cases} O(q^N) & (q > \sqrt{a} = 0.4) \\ O(a^{N/2}) = O(0.4^N) & (q < \sqrt{a} = 0.4) \end{cases} \quad (21)$$

となる。一方、数値実験結果は下記のとおりである。波数  $k$  が  $k\rho = 1$  および 10 で与えられる場合について、代用電荷法の誤差  $\epsilon_N$  をいくつかの  $q$  の値に対して計算し、その結果を図 5 に示した。図より、誤差  $\epsilon_N$  は  $N$  に対し指数関数的に減衰することが分かる。そこで、誤差  $\epsilon_N$  の減衰率を最小自乗近似により計算し、表 4 に示した。表より、 $k\rho = 1$  の場合、誤差  $\epsilon_N$  はほぼ

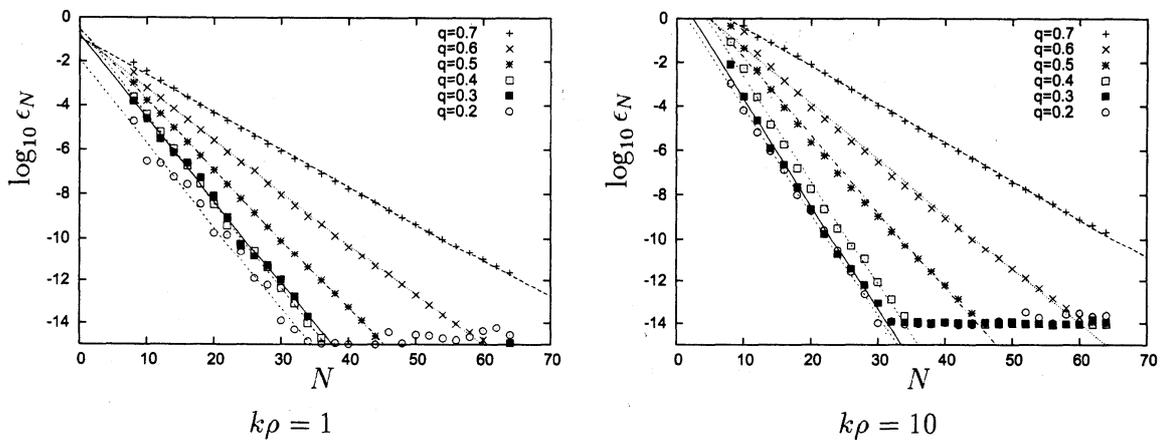
$$\epsilon_N = \begin{cases} O(q^N) & (q > 0.4) \\ O(0.4^N) & (q \leq 0.4) \end{cases}$$

のオーダーで減衰しており、理論誤差評価 (21) とほぼ符合している。 $k\rho = 10$  の場合、 $q = 0.7, 0.6, 0.5$  の場合については誤差  $\epsilon_N$  はほぼ  $O(q^N)$  のオーダーで減衰しており、理論誤差評価 (21) とほぼ符合する。一方、 $q = 0.4, 0.3, 0.2$  の場合、理論誤差評価 (21) によれ

表 3: 境界データ  $f^{(1)}$  の波動問題に対する代用電荷法の誤差のオーダー.

$q$	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$m = 1$						
$k\rho = 1$	$O(0.68^N)$	$O(0.58^N)$	$O(0.48^N)$	$O(0.38^N)$	$O(0.28^N)$	$O(0.20^N)$
$k\rho = 10$	$O(0.67^N)$	$O(0.57^N)$	$O(0.44^N)$	$O(0.34^N)$	$O(0.24^N)$	$O(0.13^N)$
$\epsilon_N$	$m = 16$					
$k\rho = 1$	$O(0.71^N)$	$O(0.58^N)$	$O(0.50^N)$	$O(0.45^N)$	$O(0.38^N)$	
$k\rho = 10$	$O(0.70^N)$	$O(0.55^N)$	$O(0.47^N)$	$O(0.38^N)$	$O(0.30^N)$	

ば誤差  $\epsilon_N$  は  $O(0.4^N)$  のオーダーになるが, 表 4 の結果では理論誤差評価より若干小さい減衰率で  $\epsilon_N$  が減衰している.

図 5: 境界データ  $f^{(1)}$  の波動問題に対する代用電荷法の誤差.

以上より, 数値実験により観察される代用電荷法の収束の仕方 (誤差の減衰の仕方) は, おおむね定理 2 が示す理論誤差評価に符合している. すなわち, 円板外部領域波動問題に対する代用電荷法について  $O(q^N)$  の法則が成り立つことが実験的にも示されたことになる. しかし, 境界データ  $f^{(1)}$ , 波数  $k\rho = 10$  の場合のように, 代用電荷法の収束が不安定である場合もある. この場合は, [2] のように多倍長計算を用いて計算精度を上げて数値実験を行う必要があると考えられる.

## 5 定理 2 の証明の概略

ここでは, 円外 Dirichlet 波動問題 (11) の代用電荷法に対する定理 2 の証明の概略を示す. 証明の方針は基本的には, 円板領域ポテンシャル問題の代用電荷法に対する一意可解

表 4: 境界データ  $f^{(II)}$  の波動問題に対する代用電荷法の誤差のオーダー.

$q$	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
$k\rho = 1$	$O(0.68^N)$	$O(0.58^N)$	$O(0.48^N)$	$O(0.40^N)$	$O(0.42^N)$	$O(0.42^N)$
$\epsilon_N$ $k\rho = 10$	$O(0.66^N)$	$O(0.55^N)$	$O(0.45^N)$	$O(0.34^N)$	$O(0.33^N)$	$O(0.33^N)$

性および指数関数的収束を示した定理 [4] と同様である. なお, 定理 2 のうち代用電荷法の一意可解性は [10] ですでに証明されている.

**定理 2 の証明** 以降, 2次元平面の点  $\boldsymbol{x} = (x, y)$  を複素平面の点  $z = x + iy$  と同一視し,  $u(z) = u(\boldsymbol{x}) = u(x, y)$  などと記す.

未知係数  $Q_j$  を求める連立 1 次方程式 (14) の係数行列を  $G$  とおくと,  $G$  は巡回行列であるから,

$$W^{-1}GW = N \operatorname{diag}[g_0^{(N)}(\rho), g_1^{(N)}(\rho), \dots, g_{N-1}^{(N)}(\rho)] \quad (22)$$

と対角化できる. ここで,  $W$  は  $(i, j)$ -成分が  $W_{ij} = \omega^{(i-1)(j-1)}/\sqrt{N}$ ,  $\omega = \exp(2\pi i/N)$  で与えられる  $N \times N$  行列,  $g_n^{(N)}(z)$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ ) は

$$g_n^{(N)}(z) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \omega^{nj} H_0^{(1)}(k|z - q\rho\omega^j|) \quad (23)$$

で与えられる. 式 (22) において  $g_n^{(N)}(\rho) \neq 0$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) が示されるから,  $G$  は逆行列  $G^{-1} = W(W^{-1}GW)^{-1}W^{-1}$  をもつ (したがって, 連立 1 次方程式 (14) は一意的可解である). 逆行列  $G^{-1}$  の表式を求めて, 連立 1 次方程式 (14) の解である  $Q_j$  を求め, 近似解  $u_N$  の式 (12) に代入して, 境界データの Fourier 級数表示  $f(\rho e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$  を用いると, 結局, 近似解の表式

$$u_N(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{g_n^{(N)}(z)}{g_n^{(N)}(\rho)} \quad (24)$$

を得る. 一方, 波動問題 (11) の厳密解は

$$u(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(k\rho)} e^{in\theta} \quad (r = |z|, \theta = \arg z) \quad (25)$$

と表わされるので, 誤差関数  $e_N(z) \equiv u(z) - u_N(z)$  の表式

$$e_N(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi_n^{(N)}(r, \theta), \quad \phi_n^{(N)}(r, \theta) = \frac{H_n^{(1)}(kr)}{H_n^{(1)}(k\rho)} e^{in\theta} - \frac{g_n^{(N)}(re^{i\theta})}{g_n^{(N)}(\rho)} \quad (26)$$

を得る.

ここで,  $|\phi_n^{(N)}(r, \theta)|$  の上からの評価に関する次の補題を用いる.

**補題 1** 式 (26) で定義される  $\phi_n^{(N)}(r, \theta)$  の絶対値の上からの評価に関して, 次の不等式が成立する.

$$|\phi_n^{(N)}(r, \theta)| \leq C'(k\rho, q)q^{N-2|n|} \left( 0 \leq |n| \leq \frac{N}{2}, r \geq \rho, 0 \leq \theta < 2\pi \right), \quad (27)$$

$$|\phi_n^{(N)}(r, \theta)| \leq C''(k\rho, q) \quad (n \in \mathbb{N}, r \geq \rho, 0 \leq \theta < 2\pi), \quad (28)$$

ここで,  $C'(k\rho, q), C''(k\rho, q)$  は  $k\rho, q$  にのみ依る正の定数である.  $\square$

この補題は, Bessel 関数と Hankel 関数に対する漸近公式 ([1], §9.3 参照) と  $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$ ,  $H_{-m}^{(1)}(x) = (-1)^m H_m^{(1)}(x)$  から得られる漸近公式

$$H_m^{(1)}(kr)J_m(qk\rho) \sim \frac{1}{i\pi|m|} \left(\frac{q\rho}{r}\right)^{|m|} \quad \text{as } m \rightarrow \pm\infty,$$

および Hankel 関数に対する Graf の加法定理 ([11], §11.3 参照) から得られる等式

$$g_n^{(N)}(re^{i\theta}) = \sum_{\substack{m \equiv n \pmod{N} \\ m \in \mathbb{Z}}} H_m^{(1)}(kr)J_m(qk\rho) e^{im\theta}$$

を用いて証明できる.

補題を用いると, 誤差の絶対値は次のように上から評価される.

$$\begin{aligned} |\epsilon_N(re^{i\theta})| &\leq |f_0| |\phi_0^{(N)}(r, \theta)| + \sum_{1 \leq |n| \leq N/2} |f_n| |\phi_n^{(N)}(r, \theta)| + \sum_{|n| > N/2} |f_n| |\phi_n^{(N)}(r, \theta)| \\ &\leq C' A_f q^N + C' A_f \sum_{1 \leq |n| \leq N/2} a^{|n|} q^{N-2|n|} + C'' A_f \sum_{|n| > N/2} a^{|n|} \\ &\leq C' A_f q^N + C'' A_f \frac{a^{N/2}}{1-a} + \left( \begin{array}{c} k\rho, q, a \\ \text{による定数} \end{array} \right) \times A_f \begin{cases} q^N & (q > \sqrt{a}) \\ Nq^N & (q = \sqrt{a}) \\ a^{N/2} & (q < \sqrt{a}). \end{cases} \end{aligned}$$

これにより題意の不等式を得る.  $\blacksquare$

## 6 まとめと今後の課題

2次元円板外部問題の代用電荷法に対し, ポテンシャル問題の場合  $O(q^N)$  の法則が成り立つことは既に知られている. 本論文では,  $O(q^N)$  の法則がポテンシャル問題以外の偏微分方程式についても成り立つことを, 周期的弾性問題, 波動問題について数値例により示した. そして, 円板外部領域 Dirichlet 境界値波動問題について  $O(q^N)$  の法則の性質を理論的に示した.

一般に数値計算におけるパラメータ等の設定は, 数値計算公式の数学的性質が分かれば効率的に行うことができ, それは代用電荷法でも同様である. 代用電荷法の性質は2次元ポテンシャル問題についてはよく調べられているが, それ以外の偏微分方程式問題

については十分に調べられているとは言えない。本論文では2次元円板外部領域問題に限り代用電荷法の性質をいくつかの偏微分方程式について調べ、 $O(q^N)$ の法則という性質が普遍的に成り立つことを確かめた。このような代用電荷法の普遍性は、ポテンシャル問題について効率的とされるパラメータ設定、とくに拘束点・電荷点配置が、様々な偏微分方程式についてもまた有用であることを示唆する。

今後の課題として、円板外部以外の領域の問題について代用電荷法の性質を調べることが上げられる。2次元ポテンシャル問題については[6]により理論誤差評価が与えられているが、それ以外の偏微分方程式の問題についてもポテンシャル問題と同様の性質が成り立つか否かが、興味をもたれる。

## 謝辞

本論文の研究において、牛島照夫電気通信大学名誉教授、千葉文浩氏、杉原正顯東京大学大学院教授、小山大介博士（電気通信大学）から、議論を通して貴重なコメントを頂いた。ここに謝意を表わす。なお、本研究は科学研究費補助金（基盤研究(B)、課題番号19340024）の支援を受けている。

## 参考文献

- [1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables, Ninth Printing, Dover, New York, 1970.
- [2] 千葉文浩, 牛島照夫, 円外帰着波動ノイマン問題へ適用した多倍長計算による基本解近似解法, 日本応用数学会論文誌, **15** (2005) 361–384.
- [3] F. Chiba and T. Ushijima, Exponential decay of errors of a fundamental solution method applied to a reduced wave problem in the exterior region of a disc, J. Comput. Appl. Math., **231** (2009) 869–885.
- [4] M. Katsurada and H. Okamoto, A mathematical study of the charge simulation method I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., **35** (1988) 507–518.
- [5] M. Katsurada, A mathematical study of the charge simulation method II, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., **36** (1989) 135–162.
- [6] M. Katsurada, Asymptotic error analysis of the charge simulation method in a Jordan region with an analytic boundary, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, Math., **37** (1990) 635–657.
- [7] 室田一雄, 代用電荷法におけるスキームの「不変性」について, 情報処理学会論文誌, **34** (1993) 533–535.

- [8] H. Ogata, Fundamental solution method for periodic plane elasticity, *J. Numer. Anal. Indust. Appl. Math. (JNAIAM)*, **3** (2008) 249–267.
- [9] T. Ushijima and F. Chiba, A fundamental solution method for the reduced wave problem in a domain exterior to a disc, *J. Comput. Appl. Math.*, **152** (2002) 545–557.
- [10] T. Ushijima and F. Chiba, Error estimate for a fundamental solution method applied to reduced wave problems in a domain exterior to a disc, *J. Comput. Appl. Math.*, **159** (2003) 137–148.
- [11] G. N. Watson, *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge, 1966.