

ガウス過程に対する経路積分 —時間分割近似法による経路空間上の解析として—

熊ノ郷 直人 (Naoto KUMANO-GO)*

概要

これは論文 [27] の概略である。講究録は一般の学術誌への投稿になじまない形態の原稿も発表する機会を与えてくれるので、実際の講演に従って、多くの絵を用いて [27] を説明する: 時間分割近似法により、ガウス過程に対する経路積分となめらかな汎関数微分が存在する一般的な汎関数のクラスを与える。この汎関数のクラスは和、積、経路の平行移動、経路の線形変換、経路に関する汎関数微分に関して閉じているため、多くの経路積分可能な汎関数の例が創れる。また、この経路積分において、Riemann-Stieltjes 積分や極限との順序交換定理、経路の平行移動や直交変換に対する自然な性質、汎関数微分に関する部分積分やテイラー展開、微分積分学の基本定理が成立する。

§ 1. 序

1948 年, R. P. Feynman [7] は Schrödinger 方程式

$$\left(i\hbar\partial_T + \frac{\hbar^2}{2}\Delta - V(T, x)\right)u(T, x) = 0, \quad T > 0, \quad x \in \mathbf{R}^d$$

の基本解の積分核 $K(T, x, x_0)$ を経路積分を用いて

$$K(T, x, x_0) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt} \mathcal{D}[\gamma]$$

と表現した。ここで $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ は $\gamma(0) = x_0, \gamma(T) = x$ となる経路である (図 1)。Feynman は経路積分 $\int \sim \mathcal{D}[\gamma]$ を“すべての経路に関する新しい和”であると主張し、有限次元積分の極限として説明した。この方法は現在、時間分割近似法と呼ばれている。

さらに Feynman [8, Chapter 7] は一般の汎関数 $F[\gamma]$ を被積分汎関数とする経路積分を考え、汎関数積分 (経路積分) と汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ からなる経路空間上の新しい解析学を提案した (L. S. Schulman [31, Chapter 8], K. L. Chung-J.-C. Zambrini [5, pp.129–130] 等)。

2000 Mathematics Subject Classification(s): 81S40, 60H99, 60G15

キーワード: Path integrals, Stochastic analysis, Gaussian processes.

京都大学数理解析研究所および科学研究費補助金基盤 (C)21540196 の援助を受けています。

*工学院大学工学部, 〒 163-8677 東京都新宿区西新宿 1-24-2

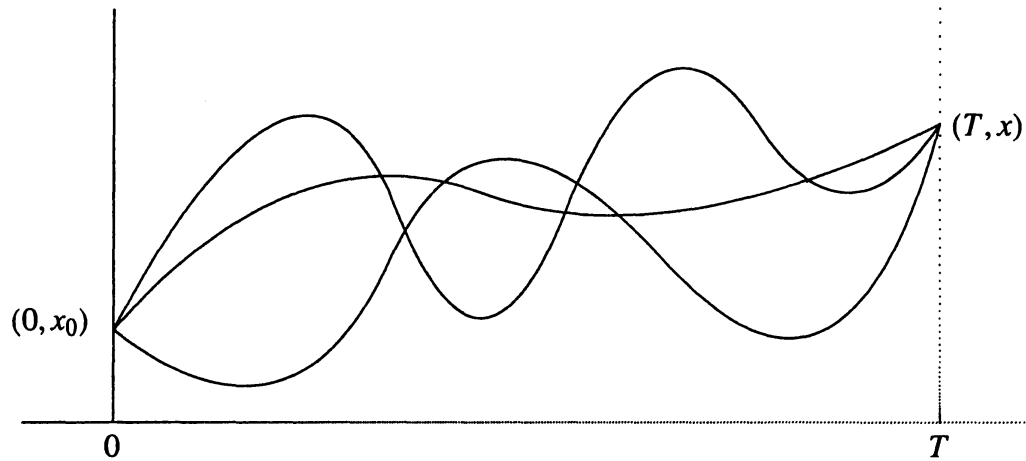


図 1.

しかし 1960 年, R. H. Cameron [3] は経路積分の測度 $e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 dt} \mathcal{D}[\gamma]$ が数学的に存在しないことを証明した. 数学においては測度を用いると, 積分の存在, 積分と極限の順序交換, 2つの積分の順序交換といった演算が保証できるが, Cameron の結果は, 経路積分において, こうした数学的議論が不可能であることを意味する. そうした数学的理論の不備にもかかわらず, 経路積分は, Hamilton 形式で定式化されていた量子力学に Lagrange 形式という別の視点を与え, その発展に貢献してきた (C. Grosche-F. Steiner [14], H. Kleinert [24], P. Cartier-C. DeWitt Morette [4] 等).

こうした背景から, 著者と D. Fujiwara [26], [13] は, 測度の代わりに Feynman の最初のアイデアである時間分割近似法を用いて, 経路積分となめらかな汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ が数学的に存在する一般的な汎関数 $F[\gamma]$ のクラスを与えた.

さて熱方程式

$$(1.1) \quad \left(\partial_T - \frac{1}{2} \Delta + V(T, x) \right) u(T, x) = 0, \quad T > 0, \quad x \in \mathbf{R}^d$$

の場合は Wiener 測度 $e^{-\int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{dy}{dt} \right|^2 dt} \mathcal{D}[\gamma]$ が存在する. P. Malliavin [28] や T. Hida [16] は Wiener 測度を用いて, 経路空間上の解析学の構成に成功している. また今日, 伊藤積分 [21] は数理ファイナンスの主要な道具となっている. しかし一方で, 経路積分を数理ファイナンスに適用した研究も多い (B. E. Baaquie [2], J. W. Dash [6] 等).

ゆえに, 今回の講演の [27] では, Malliavin 解析や Hida 解析とは別のアプローチとして, 時間分割近似法 [26], [13] をガウス過程に適用し, なめらかな汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ をもつ経路積分

$$(1.2) \quad \int e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]$$

の存在を証明した. ここで, 今後何度も用いるため,

$$(1.3) \quad S[\gamma] = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt$$

とおいた。正確に言えば、時間分割近似法が始点 $x \in \mathbf{R}^d$ と終点 $x_0 \in \mathbf{R}^d$ に関して広義一様収束する汎関数 $F[\gamma]$ のかなり一般的なクラス $\mathcal{F}$ を与えた。さらに、積分としての以下の性質を証明した。

- 微分積分学の基本定理,
- Riemann(-Stieltjes) 積分や $\lim$ との順序交換,
- 平行移動 $\gamma + \eta$ や直交変換 $Q\gamma$ のもとの自然な性質,
- 汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ に関する部分積分やテイラー展開.

注意. 経路積分 $\int e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt} \mathcal{D}[\gamma]$ については多くの研究者が数学的定義を与えてきた。E. Nelson [30] は Trotter 公式による時間分割近似法の定式化と Wiener 測度の解析接続としての定式化を与えた。K. Ito [22], S. Albeverio-Høegh-Krohn-S. Mazzucchi [1], [29] や A. Truman [33] は無限次元の振動積分として定式化した。また, G. W. Johnson-M. Lapidus [23], T. L. Gill-W. W. Zachary [15] は Feynman の Operational Calculus を定式化した。経路積分の数学理論についての日本語の解説としては、一瀬孝先生の [17], [18] がお勧めである。

注意. Kumano-go [13], Kumano-go-D. Fujiwara [26] は、藤原大輔先生の定式化 ([12], [9], [11] 等) を一般化したものである。大きな違いは、[12] が Schrödinger 方程式の解に対する経路積分 $\int e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt} \mathcal{D}[\gamma]$ だけの定式化であるのに対し、一般的な汎関数 $F[\gamma]$ に対して経路積分 $\int e^{\frac{i}{\hbar} \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 - V(t, \gamma) dt} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]$ を定式化した点である。著者が一般的な汎関数を被積分汎関数としてもつ経路積分の定式化を考えた理由は「経路積分は測度がないのに、何故“積分”と言うのか?」という疑問である。著者なりの答は「一般的な汎関数に対して定義できて、積分や極限との順序交換、平行移動や直交変換に関する性質など、積分が満たす性質を満たせば“積分”と言っても許されるだろう」である。

それでは今回の熱方程式に対する場合、Wiener 測度があり、しかも Malliavin 解析や Hida 解析という経路空間上の解析がすでに成功しているにも関わらず、なぜ、時間分割近似法を用いるのかと疑問をもつ人もいるかも知れない。しかし、そもそも Feynman の経路積分自体が量子力学において Hamilton 形式という主流の方法とは別の方法である。

§2. ガウス過程に対する経路積分の定義と存在

§2.1. 基本的な汎関数 $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ の例

経路積分が定義できる一般的な汎関数 $F[\gamma]$ のクラス $\mathcal{F}$ を与える点が本質であるので、まず例を挙げよう。汎関数のクラス $\mathcal{F}$ は以下の基本的な汎関数 $F[\gamma]$ を含む。

例 1 (汎関数の例).

- (1) $\kappa \geq 0$ とする. $B: [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ は任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha B(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha e^{\kappa|x|}$ をみたすとする. このとき, 時刻 t での値

$$F[\gamma] = B(t, \gamma(t)) \in \mathcal{F}.$$

特に, $F[\gamma] \equiv 1 \in \mathcal{F}$ である. また, Riemann (-Stieltjes) 積分

$$F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \in \mathcal{F}.$$

- (2) $B: [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ は任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha B(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ をみたすとする. このとき,

$$F[\gamma] = e^{\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt} \in \mathcal{F}.$$

- (3) $V: [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ は非負整数 m と正の定数 c が存在して $V(t, x) \geq c(1 + |x|)^m$ をみたし, 任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha V(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^m$ をみたすとする. このとき, $0 \leq T' \leq T'' \leq T$ に対し,

$$F[\gamma] = e^{-\int_{T'}^{T''} V(t, \gamma(t)) dt} \in \mathcal{F}.$$

- (4) $\kappa \geq 0$ とする. $'(\partial_x Z) = (\partial_x Z)$ となる $Z: [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}^d$ は $\partial_x^\alpha Z(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha Z(t, x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t Z(t, x)| \leq C_\alpha e^{\kappa|x|}$ をみたすとする. このとき, 経路に沿った線積分

$$F[\gamma] = \int_{T'}^{T''} Z(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) \in \mathcal{F}.$$

注意. 例 1 (3) の経路積分

$$K(T, x, x_0) = \int e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \int e^{-\int_0^T \frac{1}{2} |\frac{d\gamma}{dt}|^2 dt - \int_0^T V(t, \gamma) dt} \mathcal{D}[\gamma]$$

は熱方程式

$$\left(\partial_T - \frac{1}{2} \Delta + V(T, x) \right) u(T, x) = 0, \quad T > 0, \quad x \in \mathbf{R}^d$$

の基本解の積分核となり, 確率論における Feynman-Kac の公式 [25] に相当する.

また, $V(x) = |x|^2, |x|^4, |x|^6, \dots$, のときも, 例 1 (2), (3) より,

$$e^{\int_0^T 1 dt} \in \mathcal{F}, \quad e^{-\int_0^T (V(\gamma(t)) + 1) dt} \in \mathcal{F}.$$

定理 1 (1) より,

$$F[\gamma] = e^{-\int_0^T V(\gamma(t)) dt} = e^{\int_0^T 1 dt} e^{-\int_0^T (V(\gamma(t)) + 1) dt} \in \mathcal{F}$$

なので, 経路積分可能である.

§ 2.2. 多くの汎関数の例 $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ を創ることができる

汎関数のクラス $\mathcal{F}$ をどのように定義するかは後の節 § 11 で述べる. たとえ, ここで § 11 の $\mathcal{F}$ の定義 2 を述べなくても, 次の定理 1 を例 1 に適用すれば, 経路積分可能な多くの汎関数 $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ を創ることができるからである.

定理 1. 任意の $F[\gamma], G[\gamma] \in \mathcal{F}$, 任意の折れ線経路 $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$, 任意の $d \times d$ 型実行列 P に対し,

- (1) $F[\gamma] + G[\gamma] \in \mathcal{F}, F[\gamma]G[\gamma] \in \mathcal{F}$.
- (2) $F[\gamma + \eta] \in \mathcal{F}, F[P\gamma] \in \mathcal{F}$.
- (3) $(DF)[\gamma][\eta] \in \mathcal{F}$.

注意 (汎関数微分). 折れ線経路 $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ と $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ に対し, η 方向の汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ を

$$(DF)[\gamma][\eta] = \left. \frac{d}{d\theta} F[\gamma + \theta\eta] \right|_{\theta=0}$$

とする.

注意. 言い換えると, $\mathcal{F}$ は和, 積, 平行移動, 線形変換, 汎関数微分という演算に関して閉じている. 特に何回でも汎関数微分できる.

§ 2.3. 時間分割近似法

$\Delta_{T,0}: T = T_{J+1} > T_J > \cdots > T_1 > T_0 = 0$ を区間 $[0, T]$ の任意の分割とし, $t_j = T_j - T_{j-1}$, $|\Delta_{T,0}| = \max_{1 \leq j \leq J+1} t_j$ とする. $x = x_{J+1}$ とおき, $x_J, \dots, x_1 \in \mathbf{R}^d$ とし, $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ を, 2 点 (T_j, x_j) と (T_{j-1}, x_{j-1}) を線分で結ぶ折れ線経路とする (図 2).

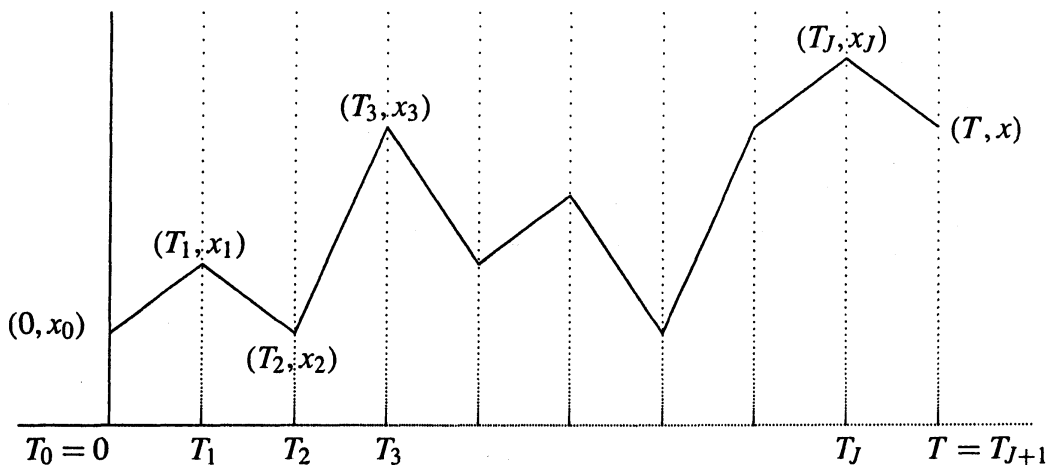


図 2.

汎関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ と $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ は $x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0$ の関数 $S_{\Delta_{T,0}}, F_{\Delta_{T,0}}$ となる.

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma_{\Delta_{T,0}}}{dt} \right|^2 dt = \sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j},$$

$$F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0).$$

定理 2 (経路積分の定義と存在). 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し,

$$(2.1) \quad \int e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] \equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j$$

は始点と終点 $(x, x_0) \in \mathbf{R}^{2d}$ に関して広義一様収束する. つまり well-defined である.

注意. (2.1) の有限次元積分において $x_j, \dots, x_1$ は $\mathbf{R}^d$ 上を動くことを図 2 で考えて, 有限次元積分は“分割 $\Delta_{T,0}$ をもつすべての折れ線経路に関する和”と解釈する. さらに, 分割の幅 $|\Delta_{T,0}|$ を 0 に近づけると, “すべての経路”は折れ線経路で近似できるのであろうから, (2.1) は“すべての経路に関する和”であると解釈する.

注意. 数学的には $|\Delta_{T,0}| = \max_{1 \leq j \leq J+1} t_j \rightarrow 0$ のとき, $\frac{1}{2\pi t_j} \rightarrow \infty$, 積分の個数 $J \rightarrow \infty$ である.

注意. 荒く言えば, 測度論は, (底辺) で極限を取って測度を構成したあと (高さ) をかける. これに対し (2.1) は, (底辺) に (高さ) をかけたあと極限を取る.

注意. Feynman [7] は関数 $S_{\Delta_{T,0}}, F_{\Delta_{T,0}}$ を用いて説明した. E. Nelson [30] は関数を近似し, Trotter 公式で積分を一個ずつ作用素として扱った. しかし, 近似はもとの関数とは異なる. これに対し, 我々は (2.1) の多重積分を直接扱い, 多重積分の中で汎関数 $S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ と $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ を保持する. このアイデアは, 関数を近似せず扱った A. Truman [33] や D. Fujiwara [9] に影響を受けている.

(2.1) の考え方に慣れるために, 先に定理 1, 2 を信じて定理 3–8 を説明し, そのあと定理 1, 2 を証明する.

§ 3. 微分積分学の基本定理

定理 3 (微分積分学の基本定理). $\kappa \geq 0, 0 \leq T' \leq T'' \leq T$ とする. $f(t, x): [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ は任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha f(t, x), \partial_x^\alpha \partial_t f(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して

$$|\partial_x^\alpha f(t, x)| + |\partial_x^\alpha \partial_t f(t, x)| \leq C_\alpha e^{\kappa|x|}$$

をみたす. このとき

$$\begin{aligned} & \int e^{-S[\gamma]} \left(f(T'', \gamma(T'')) - f(T', \gamma(T')) \right) \mathcal{D}[\gamma] \\ &= \int e^{-S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) + \int_{T'}^{T''} (\partial_t f)(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma]. \end{aligned}$$

注意. 経路積分の内部の式は微分積分学の基本定理である. ゆえに微分積分学の基本定理が経路積分においても成立することを意味する.

注意. 線積分 $\int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t)$ は経路空間上の経路に沿った新しい線積分である. 普通の線積分はすべての連続経路 γ やブラウン運動 $\mathbf{B}(t)$ に対して定義できないからである. 粗く言えば, ブラウン運動 $\mathbf{B}(t)$ と折れ線経路 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ を $\mathbf{B}(T_j) = x_j$ で比較したら, Itô 積分 [21] は $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ の各線分の始点で近似される (図 3).

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, \mathbf{B}(t)) \cdot d\mathbf{B}(t) \approx \sum_j Z(T_{j-1}, x_{j-1}) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

また, Stratonovich 積分 [32] は $\gamma_{\Delta T,0}$ の各線分の中点で近似される.

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, \mathbf{B}(t)) \cdot d\mathbf{B}(t) \approx \sum_j Z\left(\frac{T_j + T_{j-1}}{2}, \frac{x_j + x_{j-1}}{2}\right) \cdot (x_j - x_{j-1}).$$

Feynman 自身も中点を用いた方法を用いている (L. S. Schulman [31, pp.23, 27], K. L. Chung-J.-C. Zambini [5, pp.131, 132] 等).

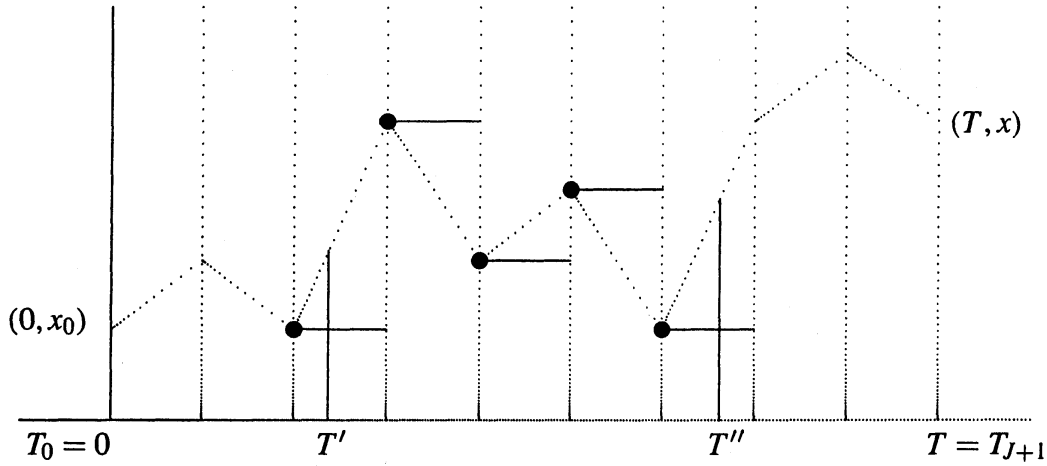


図 3.

これに対し, 新しい線積分は $\gamma_{\Delta T,0}$ に沿った古典的な線積分そのものである (図 4).

$$\int_{T'}^{T''} Z(t, \gamma_{\Delta T,0}(t)) \cdot d\gamma_{\Delta T,0}(t).$$

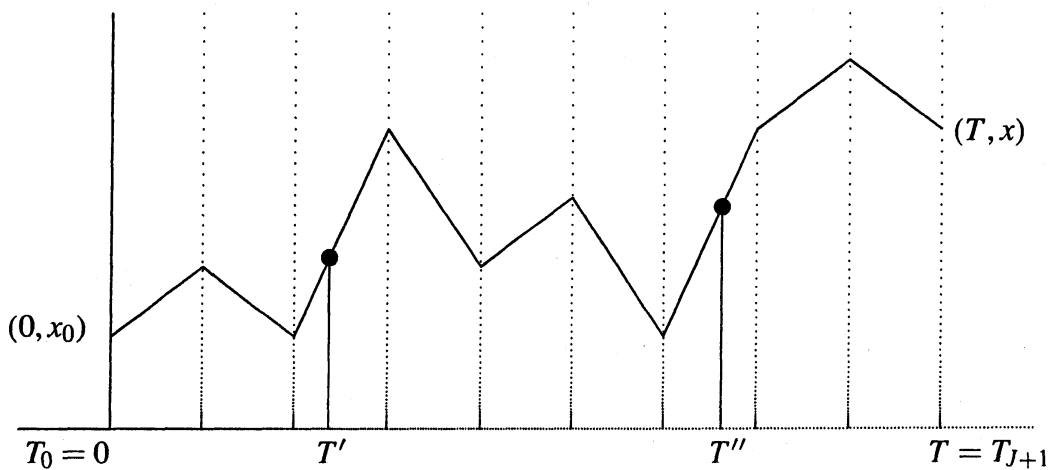


図 4.

証明. 例 1 (1), (4) と定理 1 (1) より

$$F_1[\gamma] = f(T'', \gamma(T'')) - f(T', \gamma(T')) \in \mathcal{F},$$

$$F_2[\gamma] = \int_{T'}^{T''} (\partial_x f)(t, \gamma(t)) \cdot d\gamma(t) + \int_{T'}^{T''} (\partial_t f)(t, \gamma(t)) dt \in \mathcal{F}.$$

微分積分学の基本定理より, 任意の折れ線経路 $\gamma_{\Delta_{T,0}}$ に対し

$$F_1[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_2[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$$

が成立する (図 4). 定理 2 より

$$\begin{aligned} \int e^{-S[\gamma]} F_1[\gamma] \mathcal{D}[\gamma] &\equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F_1[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F_2[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ &\equiv \int e^{-S[\gamma]} F_2[\gamma] \mathcal{D}[\gamma]. \end{aligned}$$

□

§ 4. Riemann (-Stieltjes) 積分や $\lim$ との順序交換

定理 4 (積分との順序交換). $\kappa \geq 0, 0 \leq T' \leq T'' \leq T$ とする. $B(t, x): [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{C}$ は任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha B(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha e^{\kappa|x|}$ とする. このとき

$$\int_{T'}^{T''} \left(\int e^{-S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \right) dt = \int e^{-S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma].$$

注意. (左辺) は経路積分したあと Riemann 積分し, (右辺) は Riemann 積分したあと経路積分する. ゆえに経路積分と Riemann 積分の順序交換可能であることを意味する.

注意 (極限との順序交換). 適当な条件下で積分と $\lim$ との順序交換定理も成立する. 特に $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ のとき摂動展開できる.

$$\begin{aligned} \int e^{-S[\gamma] + \int_0^T B(\tau, \gamma(\tau)) d\tau} \mathcal{D}[\gamma] &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^T d\tau_n \int_0^{\tau_n} d\tau_{n-1} \cdots \int_0^{\tau_2} d\tau_1 \\ &\quad \times \int e^{-S[\gamma]} B(\tau_n, \gamma(\tau_n)) B(\tau_{n-1}, \gamma(\tau_{n-1})) \cdots B(\tau_1, \gamma(\tau_1)) \mathcal{D}[\gamma]. \end{aligned}$$

注意. 定理 4 の証明の鍵を説明する. E. Nelson [30] は離散的な端点 x_j または x_{j-1} で近似し, 積分を一つずつ作用素として分けて扱った (図 5).

これに対し, 我々は多重積分を直接扱い, 粒子の位置

$$\gamma_{\Delta_{T,0}}(t) = \frac{t - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}} x_j + \frac{T_j - t}{T_j - T_{j-1}} x_{j-1}, \quad T_{j-1} \leq t \leq T_j$$

を保持する (図 6). ゆえに, 粒子 $\gamma_{\Delta_{T,0}}(t)$ は折れ線に沿って区間 $[0, T]$ を連続的に動く.

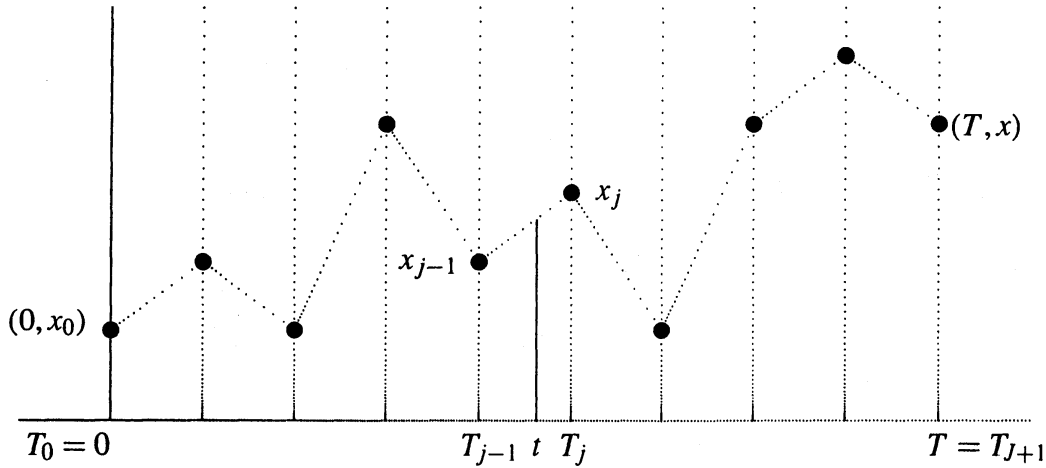


図 5.

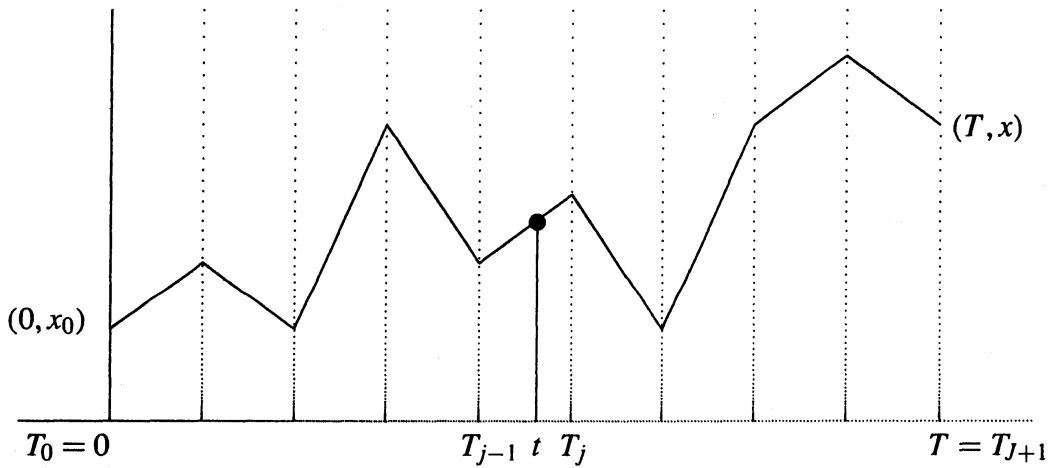


図 6.

証明. $\gamma_{\Delta_{T,0}}(t)$ を近似しないので, $B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t))$ は $t \in [T', T'']$ に関して (x_j に関する微分も含めて) 連続となる. ゆえに, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し

$$\prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j$$

は $t \in [T', T'']$ に関して連続である. 定理 2 より

$$\int e^{-S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \equiv \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j$$

は $t \in [T', T'']$ に関して一様収束する. ゆえに, 極限関数 $\int e^{-S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma]$ もまた $t \in [T', T'']$ に関して連続となる. つまり Riemann 可積分となる.

$$\int_{T'}^{T''} \left(\int e^{-S[\gamma]} B(t, \gamma(t)) \mathcal{D}[\gamma] \right) dt$$

$$\begin{aligned}
&\equiv \int_{T'}^{T''} \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j dt \\
&= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \int_{T'}^{T''} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) \prod_{j=1}^J dx_j dt.
\end{aligned}$$

有限次元積分と Riemann 積分の順序交換により,

$$\begin{aligned}
&= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} \int_{T'}^{T''} B(t, \gamma_{\Delta_{T,0}}(t)) dt \prod_{j=1}^J dx_j \\
&\equiv \int e^{-S[\gamma]} \left(\int_{T'}^{T''} B(t, \gamma(t)) dt \right) \mathcal{D}[\gamma].
\end{aligned}$$

□

§5. 平行移動 $F[\gamma + \eta]$ や直交変換 $F[Q\gamma]$

定理 5 (平行移動). 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と任意の折れ線経路 $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ に対し,

$$\int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{-S[\gamma+\eta]} F[\gamma + \eta] \mathcal{D}[\gamma] = \int_{\gamma(0)=x_0+\eta(0), \gamma(T)=x+\eta(T)} e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma].$$

注意. (左辺) はすべての経路を平行移動したあと、すべての経路に関して和を取る。(右辺) は始点と終点だけを平行移動したあと、すべての経路に関して和を取る。つまり、すべての経路の平行移動は、経路積分ではすべての経路に関して和を取るの、始点と終点だけを平行移動することと同じになる。

証明. 定理 2 より $\gamma_{\Delta_{T,0}}(T_j) = x_j$ とすれば

$$\begin{aligned}
&\int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{-S[\gamma+\eta]} F[\gamma + \eta] \mathcal{D}[\gamma] \\
&= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}} + \eta]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}} + \eta] \prod_{j=1}^J dx_j.
\end{aligned}$$

分割 $\Delta_{T,0}$ が折れ線経路 η が折れる時刻をすべて含むように選ぶ (図 7). $\eta(T_j) = y_j$, $j = 0, 1, \dots, J, J+1$ とおく. $\gamma_{\Delta_{T,0}} + \eta$ は $(T_j, x_j + y_j)$ と $(T_{j-1}, x_{j-1} + y_{j-1})$ を線分で結ぶ折れ線経路となるので

$$\begin{aligned}
&= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J + y_J, \dots, x_1 + y_1, x_0 + y_0)} \\
&\quad \times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J + y_J, \dots, x_1 + y_1, x_0 + y_0) \prod_{j=1}^J dx_j.
\end{aligned}$$

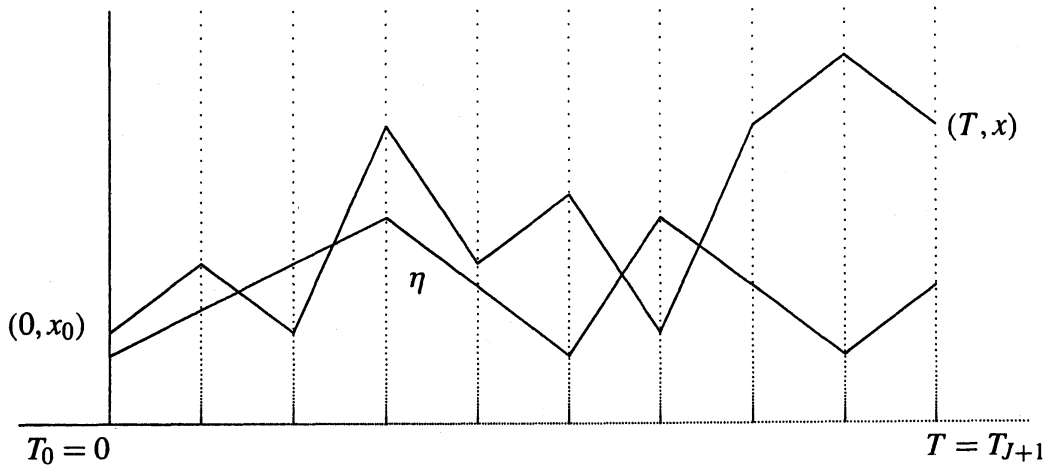


図 7.

変数変換: $x_j + y_j \rightarrow x_j, j = 1, 2, \dots, J$ より

$$= \lim_{|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0} \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0 + y_0)} \\ \times F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + y_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0 + y_0) \prod_{j=1}^J dx_j.$$

$y_{J+1} = \eta(T)$ と $y_0 = \eta(0)$ に注意すれば

$$= \int_{\gamma(0)=x_0+\eta(0), \gamma(T)=x+\eta(T)} e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma].$$

□

以下の性質も成立する.

定理 6 (直交変換). 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と任意の $d \times d$ 型直交行列 Q に対し,

$$\int_{\gamma(0)=x_0, \gamma(T)=x} e^{-S[Q\gamma]} F[Q\gamma] \mathcal{D}[\gamma] = \int_{\gamma(0)=Qx_0, \gamma(T)=Qx} e^{-S[\gamma]} F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma].$$

注意. (左辺) はすべての経路を回転したあと, すべての経路に関して和を取る. (右辺) は始点と終点だけを回転したあと, すべての経路に関して和を取る. つまり, すべての経路の回転は, 経路積分ではすべての経路に関して和を取るのので, 始点と終点だけを回転することと同じになる.

§ 6. 汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ に関する部分積分やテイラー展開

定理 7 (汎関数微分に関する部分積分). 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ と $\eta(0) = \eta(T) = 0$ となる任意の折れ線経路 $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ に対し

$$\int e^{-S[\gamma]} (DF)[\gamma][\eta] \mathcal{D}[\gamma] = \int e^{-S[\gamma]} (DS)[\gamma][\eta] F[\gamma] \mathcal{D}[\gamma].$$

注意. (左辺) は $F[\gamma]$ を汎関数微分する. (右辺) は $e^{-S[\gamma]}$ を汎関数微分し, (-1) をかける. ゆえに経路積分において汎関数微分に関する部分積分の公式が成立することを意味する.

注意 (変分法との関係). $V: [0, T] \times \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$ は非負整数 m と正の定数 c が存在して $V(t, x) \geq c(1 + |x|)^m$ をみたし, 任意の多重指数 α に対して $\partial_x^\alpha V(t, x)$ が連続で, 正の定数 C_α が存在して $|\partial_x^\alpha V(t, x)| \leq C_\alpha(1 + |x|)^m$ をみたすとする. $F[\gamma] = e^{-\int_0^T V(t, \gamma) dt}$ とおき

$$S[\gamma] = \int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt$$

に注意する. このとき, $\eta(0) = \eta(T) = 0$ となる任意の折れ線経路 $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ に対し

$$0 = \int e^{-\int_0^T \frac{1}{2} \left| \frac{d\gamma}{dt} \right|^2 dt - \int_0^T V(t, \gamma) dt} \int_0^T \left(\frac{d\gamma}{dt} \frac{d\eta}{dt} + (\partial_x V)(t, \gamma(t)) \eta(t) \right) dt \mathcal{D}[\gamma].$$

注意. 証明は省略して, 汎関数微分について説明する. 分割 $\Delta_{T,0}$ が折れ線経路 γ や折れ線経路 η が折れる時刻をすべて含むように選ぶ (図 8). $\gamma(T_j) = x_j, \eta(T_j) = y_j, j = 0, 1, \dots, J, J+1$ とおく. このとき任意の $\theta \in \mathbf{R}$ に対し, $\gamma + \theta\eta$ は $(T_j, x_j + \theta y_j)$ と $(T_{j-1}, x_{j-1} + \theta y_{j-1})$ を線分で結ぶ折れ線経路となるので,

$$F[\gamma + \theta\eta] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1} + \theta y_{J+1}, x_J + \theta y_J, \dots, x_1 + \theta y_1, x_0 + \theta y_0).$$

よって, 汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ は有限和で書ける.

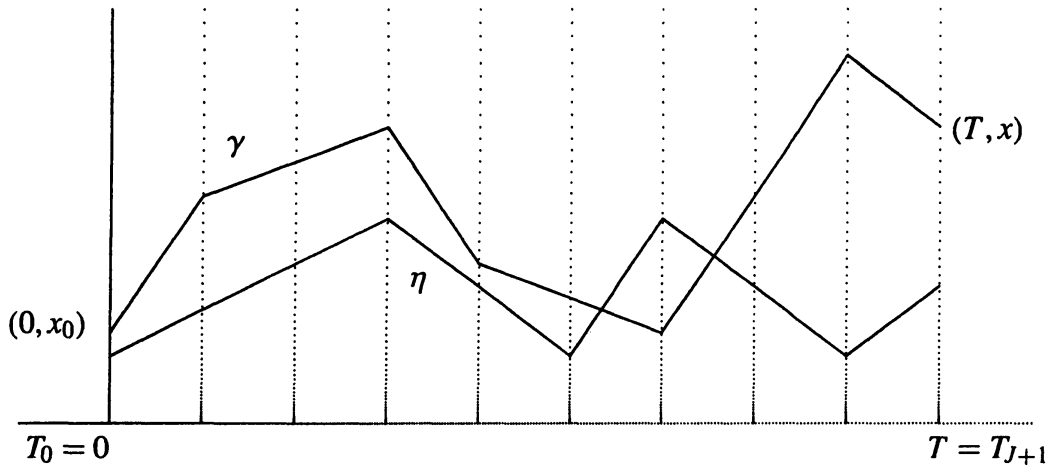


図 8.

$$(DF)[\gamma][\eta] = \frac{d}{d\theta} F[\gamma + \theta\eta] \Big|_{\theta=0} = \sum_{j=0}^{J+1} (\partial_{x_j} F_{\Delta_{T,0}})(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \cdot y_j.$$

汎関数微分の方角を折れ線経路に限定しているため, 扱いやすい点に注意して欲しい.

以下の性質も成立する.

定理 8 (汎関数微分に関するテイラー展開). 任意の折れ線経路 $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ と, 任意の

$F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し,

$$\begin{aligned} \int e^{-S[\gamma]} F[\gamma + \eta] \mathcal{D}[\gamma] &= \sum_{l=0}^L \frac{1}{l!} \int e^{-S[\gamma]} (D^l F)[\gamma][\eta] \cdots [\eta] \mathcal{D}[\gamma] \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^L}{L!} \int e^{-S[\gamma]} (D^{L+1} F)[\gamma + \theta\eta][\eta] \cdots [\eta] \mathcal{D}[\gamma] d\theta. \end{aligned}$$

§7. 定理2, 定理1(1)の証明の方針

さて定理2の証明の方針を述べる. 任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し, (2.1)の多重積分

$$(7.1) \quad \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j$$

が $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のとき収束することを証明するには, 収束するように被積分関数

$$F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) = F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$$

に仮定をどんどん加えていけば良い (この節まで $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ の仮定を与えていないので, 仮定が必要である. 数学的には, 仮定をどんどん加えれば何でも証明できる).

- + と $\times$ で閉じた仮定を加える. そうすれば $\mathcal{F}$ は + と $\times$ で閉じる.
- 収束だけを考え, 他のことは考えない. そうすれば $\mathcal{F}$ は集合としての器が大きくなり, 運が良ければ, 少なくとも1つ例を含む.

証明の計算においては $|\Delta_{T,0}| = \max_{1 \leq j \leq J+1} t_j \rightarrow 0$ のとき, $\left(\frac{1}{2\pi t_j} \right) \rightarrow \infty$, 積分の個数 $J \rightarrow \infty$ となる点が問題となる. 証明は以下の三つのステップからなる.

- 1° (2.1)の多重積分(7.1)を $J \rightarrow \infty$ のとき C^J (定数 C の J 乗) でコントロールする.
- 2° (2.1)の多重積分(7.1)を $J \rightarrow \infty$ によらない定数 C でコントロールする.
- 3° (2.1)の多重積分(7.1)を $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のとき収束させる.

§8. 多重積分を $J \rightarrow \infty$ のとき C^J でコントロールする

(2.1)の多重積分(7.1)を以下のように $q_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_0)$ とおいて考える.

$$\begin{aligned} (8.1) \quad \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-\sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j}} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \prod_{j=1}^J dx_j \\ = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-\frac{(x_{J+1} - x_0)^2}{2T}} q_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_0). \end{aligned}$$

補題 8.1. $\kappa \geq 0$ とする. 正の定数 A_0, X_0 が存在し,

$$(8.2) \quad |F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0)| \leq A_0 (X_0)^{J+1} e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq J+1} |x_j|},$$

をみたすとする。このとき、ある定数 C が存在し、多重積分 (8.1) は $J \rightarrow \infty$ のとき、以下の
ように C^J でコントロールできる。

$$|q_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_0)| \leq C^J e^{\kappa \max(|x_{J+1}|, |x_0|)}.$$

注意. 例 1 (2) の $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ をみたす $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は

$$F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \frac{(t-T_{j-1})x_j + (T_j-T_{j-1})x_{j-1}}{T_j-T_{j-1}}) dt}$$

と書けるので、 $\kappa = 0$ として条件 (8.2) をみたす。

証明. まず x_1 に関する積分を考える。

$$x_1^\dagger = \frac{T_1}{T_2} x_2 + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) x_0$$

とおく (図 9)。ここで $T_1 = t_1, T_2 = t_2 + t_1$ である。

$$\frac{(x_2 - x_1)^2}{2t_2} + \frac{(x_1 - x_0)^2}{2t_1} = \frac{(x_2 - x_0)^2}{2T_2} + \frac{T_2}{2t_2 T_1} (x_1 - x_1^\dagger)^2$$

と書ける。変数変換 $x_1 \rightarrow y_1 = \sqrt{\frac{T_2}{t_2 T_1}} (x_1 - x_1^\dagger)$ により

$$\begin{aligned} (8.3) \quad & \left(\frac{1}{2\pi t_2}\right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi t_1}\right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2t_2} - \frac{(x_1-x_0)^2}{2t_1}} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1, x_0) dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^{d/2} e^{-\frac{(x_2-x_0)^2}{2T_2}} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{|y_1|^2}{2}} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1^\dagger + \sqrt{\frac{t_2 T_1}{T_2}} y_1, x_0) \frac{dy_1}{(2\pi)^{d/2}}. \end{aligned}$$

帰納法で

$$q_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_0) = \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-\sum_{j=1}^J \frac{|y_j|^2}{2}} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, \dots, x_j^\circ + \sum_{k=j}^J \frac{T_j}{T_k} \sqrt{\frac{t_{k+1} T_k}{T_{k+1}}} y_k, \dots, x_0) \prod_{j=1}^J \frac{dy_j}{(2\pi)^{d/2}}$$

となる。ただし、

$$x_j^\circ = \frac{T_j}{T_{J+1}} x_{J+1} + \left(1 - \frac{T_j}{T_{J+1}}\right) x_0, \quad j = 1, 2, \dots, J$$

である。

$$\max(|x_{J+1}|, |x_0|, \max_{1 \leq j \leq J} |x_j^\circ| + \sum_{k=j}^J \frac{T_j}{T_k} \sqrt{\frac{t_{k+1} T_k}{T_{k+1}}} |y_k|) \leq \max(|x_{J+1}|, |x_0|) + \sqrt{T} \sum_{j=1}^J |y_j|$$

と

$$\int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{|y|^2}{2} + \kappa \sqrt{T} |y|} \frac{dy}{(2\pi)^{d/2}} < \infty$$

に注意して、 $y_j, j = 1, 2, \dots, J$ で積分すれば良い。

□

§9. 多重積分を $J \rightarrow \infty$ によらず C でコントロールする

さて, もう一度 x_1 に関する積分 (8.3) に戻り, 主部と余りに分けて考える.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi t_2}\right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi t_1}\right)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{(x_2-x_1)^2}{2t_2} - \frac{(x_1-x_0)^2}{2t_1}} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1, x_0) dx_1 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^{d/2} e^{-\frac{(x_2-x_0)^2}{2T_2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y_1|^2}{2}} F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1^\dagger + \sqrt{\frac{t_2 T_1}{T_2}} y_1, x_0) \frac{dy_1}{(2\pi)^{d/2}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^{d/2} e^{-\frac{(x_2-x_0)^2}{2T_2}} (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) \\ &\quad + \left(\frac{1}{2\pi T_2}\right)^{d/2} e^{-\frac{(x_2-x_0)^2}{2T_2}} (\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0). \end{aligned}$$

ただし, $F_{\Delta_{T,0}}$ に

$$x_1^\dagger = \frac{T_1}{T_2} x_2 + \left(1 - \frac{T_1}{T_2}\right) x_0$$

を代入したものを主部

$$(\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0) = F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1^\dagger, x_0)$$

とし, 余りを $(\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ とする. 図 9 のように $x_1^\dagger$ は (T_2, x_2) と $(0, x_0)$ を結ぶ線分上にあるので, T_1 を除いた分割 $(\Delta_{T,T_2}, 0): T = T_{J+1} > T_J > \dots > T_2 > T_0 = 0$ を用いると, 主部は単純に

$$(\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0) = F_{\Delta_{T,0}}(\dots, x_2, x_1^\dagger, x_0) = F_{(\Delta_{T,T_2}, 0)}(\dots, x_2, x_0),$$

と書ける.

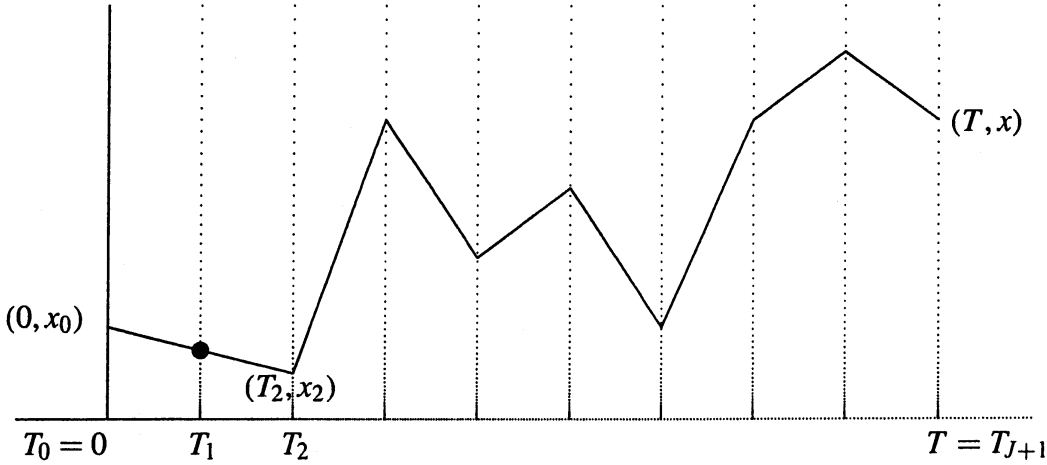


図 9.

余り $(\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は複雑であるが,

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_0) \\ &= \sqrt{\frac{t_2 T_1}{T_2}} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|y_1|^2}{2}} (\partial_{x_1} F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_1^\dagger + \theta \sqrt{\frac{t_2 T_1}{T_2}} y_1, x_0) \cdot y_1 \frac{dy_1}{(2\pi)^{d/2}} d\theta \end{aligned}$$

$$= \frac{t_2 T_1}{T_2} \int_0^1 \theta \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{|y_1|^2}{2}} (\partial_{x_1}^2 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_2, x_1^\dagger + \theta \sqrt{\frac{t_2 T_1}{T_2}} y_1, x_0) \frac{dy_1}{(2\pi)^{d/2}} d\theta$$

と書いて、小さな項 t_2 でコントロールできる。

主部 $(\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は単純なので、さらに x_2 に関して積分し、主部と余りに分ける。

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2\pi t_3} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi T_2} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\frac{(x_3-x_2)^2}{2t_3} - \frac{(x_2-x_0)^2}{2T_2}} (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_2, x_0) dx_2 \\ &= \left(\frac{1}{2\pi T_3} \right)^{d/2} e^{-\frac{(x_3-x_0)^2}{2T_3}} (\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) \\ &+ \left(\frac{1}{2\pi T_3} \right)^{d/2} e^{-\frac{(x_3-x_0)^2}{2T_3}} (\mathcal{R}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0). \end{aligned}$$

ただし、 $(\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ に

$$x_2^\dagger = \frac{T_2}{T_3} x_2 + \left(1 - \frac{T_2}{T_3} \right) x_0$$

を代入したものを主部

$$(\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) = (\mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_2^\dagger, x_0)$$

とし、余りを $(\mathcal{R}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ とする。図 10 のように $x_2^\dagger$ は (T_3, x_3) と $(0, x_0)$ を結ぶ線分上にあるので、 T_2, T_1 を除いた分割 $(\Delta_{T, T_3}, 0): T = T_{J+1} > T_J > \dots > T_3 > T_0 = 0$ を用いると、主部は単純で

$$(\mathcal{M}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})(\dots, x_3, x_0) = F_{(\Delta_{T, T_2}, 0)}(\dots, x_3, x_2^\dagger, x_0) = F_{(\Delta_{T, T_3}, 0)}(\dots, x_3, x_0),$$

と書ける。余り $(\mathcal{R}_2 \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}})$ は複雑であるが、小さな項 t_3 でコントロールできる。

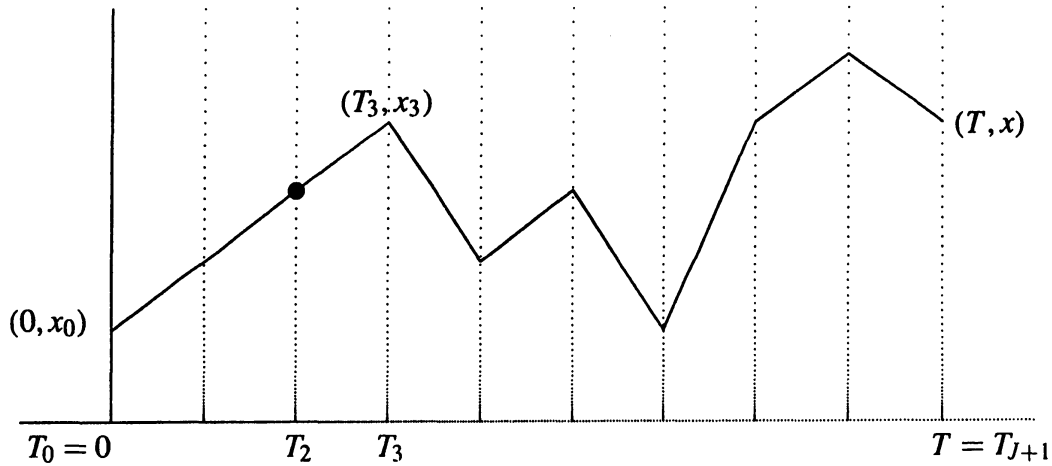


図 10.

同様に単純な主部の積分だけを繰り返すと、図 11 のようになり

$$(\mathcal{M}_J \mathcal{M}_{J-1} \dots \mathcal{M}_1 F_{\Delta_{T,0}}) = F_{T,0}(x, x_0) = F[\gamma_{T,0}].$$

を得る。ただし、分割 $(T, 0): T = T_1 > T_0 = 0$ とする。

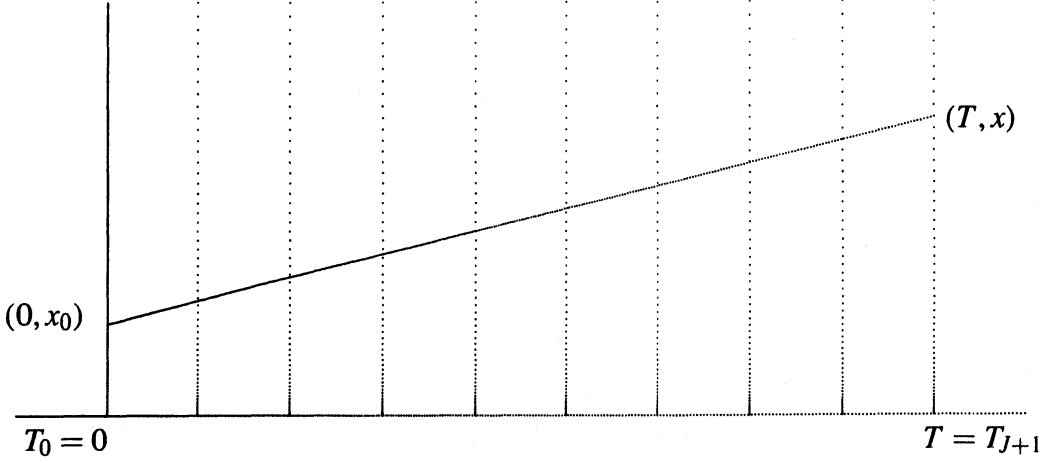


図 11.

さて、以下のように (2.1) の多重積分 (8.1) の主部を $F_{T,0}(x, x_0)$ としたときの余り $\Upsilon_{\Delta T,0}(x, x_0)$ を考える.

$$(9.1) \quad \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dJ}} e^{-\sum_{j=1}^{J+1} \frac{(x_j - x_{j-1})^2}{2t_j}} F_{\Delta T,0}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \prod_{j=1}^J dx_j \\ = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2T}} (F_{T,0}(x, x_0) + \Upsilon_{\Delta T,0}(x, x_0)).$$

次が成立する.

補題 9.1. $\kappa \geq 0$ とする. 正の定数 A_2, X_2 が存在し, 任意の分割 $\Delta T, 0$ と任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq 2, j = 0, 1, \dots, J, J+1$ に対し,

$$(9.2) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta T,0}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_2 (X_2)^{J+1} e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq J+1} |x_j|}$$

をみたすとする. このとき, 多重積分 (9.1) は以下のように $J \rightarrow \infty$ によらない定数 C でコントロールできる.

$$|\Upsilon_{\Delta T,0}(x, x_0)| \leq C T e^{\kappa \max(|x|, |x_0|)}.$$

注意. 例 1 (2) の $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ をみたす $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は

$$F_{\Delta T,0} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \frac{(t-T_{j-1})x_j + (T_j-T_{j-1})x_{j-1}}{T_j-T_{j-1}}) dt}$$

と書けるので, $\kappa = 0$ として条件 (9.2) をみたす.

注意. 証明は D. Fujiwara[10] のルールに従う. ルール自体は単純であるが計算は複雑なので, 証明の鍵だけ説明する. 条件 (9.2) は分割 $T = T_1 > T_0 = 0$ ($J = 0$) のとき

$$|\partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T,0}(x_1, x_0)| \leq A_2 (X_2)^1 e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq 1} |x_j|},$$

分割 $T = T_2 > T_1 > T_0 = 0$ ($J = 1$) のとき

$$|\partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T,T_1,0}(x_2, x_1, x_0)| \leq A_2 (X_2)^2 e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq 2} |x_j|},$$

分割 $T = T_3 > T_2 > T_1 > T_0 = 0$ ($J = 2$) のとき

$$|\partial_{x_3}^{\alpha_3} \partial_{x_2}^{\alpha_2} \partial_{x_1}^{\alpha_1} \partial_{x_0}^{\alpha_0} F_{T, T_2, T_1, 0}(x_3, x_2, x_1, x_0)| \leq A_2(X_2)^3 e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq 3} |x_j|},$$

となる。さらに $\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)$ が小さい項 t_j でコントロールできるたくさんの項からなることに注意して、計算は補題 8.1 に押し付ける。

§ 10. 多重積分を収束させる

仮定 1. $\kappa \geq 0, u_j \geq 0, \sum_{j=1}^{J+1} u_j = U < \infty$ とする。正の定数 A_2, X_2 が存在し、任意の分割 $\Delta_{T,0}$ 、任意の多重指数 $|\alpha_j| \leq 2, j = 0, 1, \dots, J+1$ と任意の $1 \leq k \leq J$ に対し

$$(10.1) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_2(X_2)^{J+1} e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq J+1} |x_j|},$$

$$(10.2) \quad \left| \left(\prod_{j=0}^{J+1} \partial_{x_j}^{\alpha_j} \right) \partial_{x_k} F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \right| \leq A_2(X_2)^{J+1} (u_{k+1} + u_k) e^{\kappa \max_{0 \leq j \leq J+1} |x_j|}.$$

注意. 収束させるために新たに導入したパラメータ u_j は t_j のように分割 $\Delta_{T,0}$ に依存するパラメータであるが、 $u_j = 0$ となっても良い。

注意. 例 1 (2) の $|\partial_x^\alpha B(t, x)| \leq C_\alpha$ をみたとす $F[\gamma] = e^{\int_0^T B(t, \gamma(t)) dt}$ は

$$\partial_{x_k} F_{\Delta_{T,0}} = \prod_{j=1}^{J+1} e^{\int_{T_{j-1}}^{T_j} B(t, \frac{(t-T_{j-1})x_j + (T_j-t)x_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}) dt} \left(\int_{T_k}^{T_{k+1}} \partial_{x_k} B dt + \int_{T_{k-1}}^{T_k} \partial_{x_k} B dt \right)$$

と書けるので、 $\kappa = 0, u_j = t_j, U = T$ とおけば、仮定 1 を満たす。

§ 10.1. 多重積分を経路で考える

$S_{T,0}(x, x_0) = \frac{(x - x_0)^2}{2T}$ とする。仮定 1 のもとで、(2.1) の多重積分

$$(10.3) \quad \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int_{\mathbf{R}^{dj}} e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-S_{T,0}(x, x_0)} q_{\Delta_{T,0}}(x, x_0) \\ = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-S_{T,0}(x, x_0)} (F_{T,0}(x, x_0) + \Upsilon_{\Delta_{T,0}}(x, x_0))$$

を考えると、補題 9.1 の評価は以下になる。

補題 10.1. 仮定 1 を仮定する。このとき、定数 C, C' が存在し、

$$(10.4) \quad |\Upsilon_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)| \leq C_1 T(T + U) e^{\kappa \max(|x|, |x_0|)},$$

$$(10.5) \quad |q_{\Delta_{T,0}}(x, x_0)| \leq C_2 e^{\kappa \max(|x|, |x_0|)}.$$

経路を用いて、補題 10.1 を解釈する。簡単のため $\kappa=0$ とする。

多重積分 (10.3) は図 12 の経路を表し、主部 $F_{T,0}(x, x_0)$ は図 11 の経路を表す。

ゆえに、評価 (10.4) は、図 12 の経路 (多重積分) と図 11 の経路の差が $C_1 T(T+U)$ でコントロールできることを示す。また評価 (10.5) は、図 12 の経路 (多重積分) が C_2 でコントロールできることを示す。

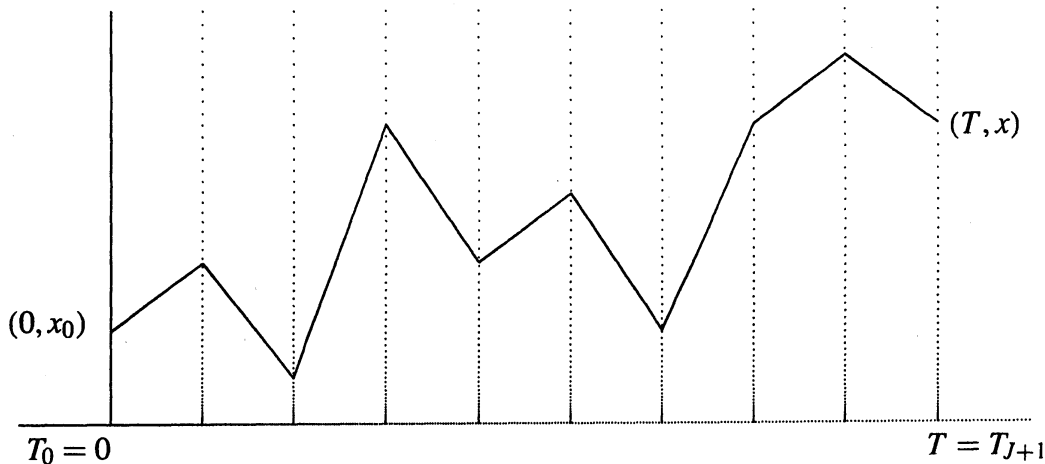


図 12.

§ 10.2. 2つの多重積分を2つの経路で比較する

極限の存在を示すには、分割 $\Delta_{T,0}$ に関する多重積分 (10.3) の Cauchy 列を作れば良い。2つの分割

$$\Delta_{T,0} : T = T_{J+1} > T_J > \cdots \cdots \cdots > T_1 > T_0 = 0,$$

$$(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0}) : T = T_{J+1} > \cdots > T_{N+1} > T_{n-1} > \cdots > T_0 = 0,$$

に対する2つの多重積分を考える。多重積分

$$(10.6) \quad \prod_{j=1}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \int \cdots \int \cdots \int \cdots \int e^{-S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]} F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] \prod_{j=1}^J dx_j \\ = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-S_{T,0}(x, x_0)} q_{\Delta_{T,0}}(x, x_0),$$

と多重積分

$$(10.7) \quad \prod_{j=N+2}^{J+1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \left(\frac{1}{2\pi(T_{N+1} - T_{n-1})} \right)^{d/2} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2\pi t_j} \right)^{d/2} \\ \int \cdots \int \int \cdots \int e^{-S[\gamma_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}]} F[\gamma_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}] \prod_{j=N+1}^J dx_j \prod_{j=1}^{n-1} dx_j \\ = \left(\frac{1}{2\pi T} \right)^{d/2} e^{-S_{T,0}(x, x_0)} q_{(\Delta_{T,T_{N+1}}, \Delta_{T_{n-1},0})}(x, x_0).$$

を2つの経路で比較する.

多重積分 (10.6) は図 13 の経路を表し, 多重積分 (10.7) は図 14 の経路を表す.

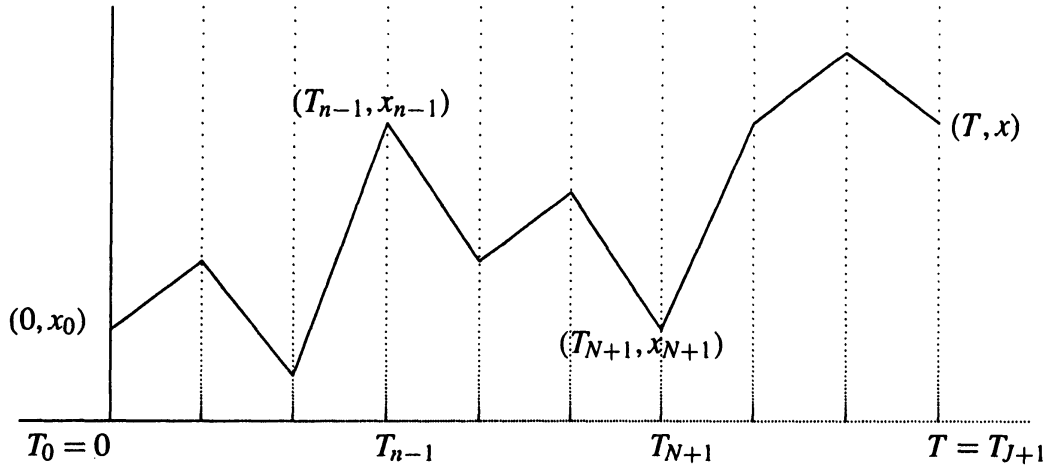


図 13.

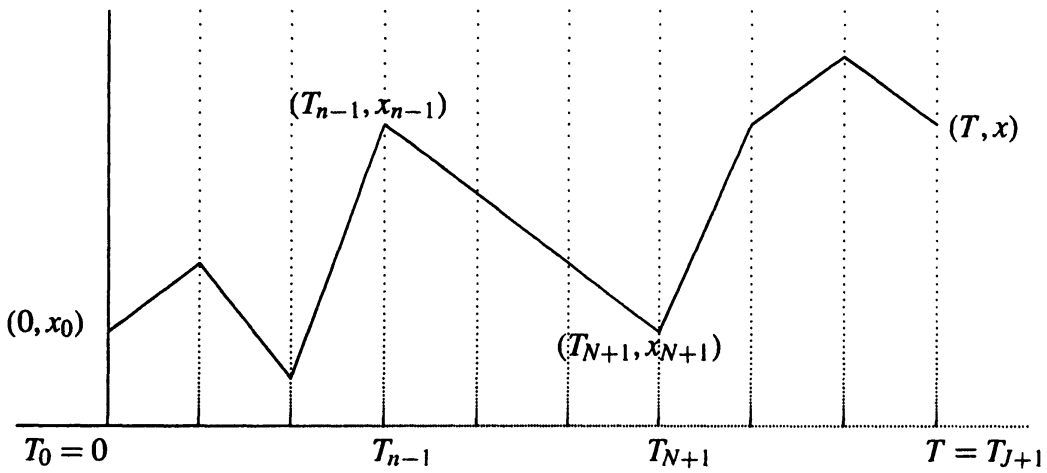


図 14.

(10.5) の評価より, 図 13 (図 14) において, 区間 $[0, T_{n-1}]$ における経路 (多重積分) は C_2 でコントロールでき, 区間 $[T_{N+1}, T]$ における経路 (多重積分) も C_2 でコントロールできる. さらに, (10.4) の評価より, 区間 $[T_{n-1}, T_{N+1}]$ において, 図 13 の経路 (多重積分) と図 14 の経路の差は

$$C_1(T_{N+1} - T_{n-1})(T_{N+1} - T_{n-1} + U_{N+1} - U_{n-1})$$

でコントロールできる. つまり, 2つの多重積分 (10.6) と (10.7) の差は,

$$\begin{aligned} & |q_{\Delta T, 0}(x, x_0) - q_{(\Delta T, T_{N+1}, \Delta T_{n-1}, 0)}(x, x_0)| \\ & \leq C(T_{N+1} - T_{n-1})(T_{N+1} - T_{n-1} + U_{N+1} - U_{n-1})e^{\kappa \max(|x|, |x_0|)}. \end{aligned}$$

でコントロールできる. ゆえに, 以下が成立する.

定理 9 (経路積分は存在する). 仮定 1 を仮定するとき, ある定数 C とある関数 $q(T, x, x_0)$ が存在し,

$$|q_{\Delta_{T,0}}(x, x_0) - q(T, x, x_0)| \leq C|\Delta_{T,0}|(U + T)e^{\kappa \max(|x|, |x_0|)},$$

となる. つまり, (2.1) の多重積分は $|\Delta_{T,0}| \rightarrow 0$ のとき, $\mathbf{R}^{2d}$ 上の任意のコンパクト集合上で収束する.

注意. + と $\times$ で閉じた仮定を加えてきたので, 定理 1 (1) も成立する. さらに偶然により汎関数の例 1 をすべて含んでいたため, 定理 3, 4 も成立する.

注意. 定理 2 の経路積分の存在だけならば, 仮定 1 のように 2 階微分までの評価で良い.

§ 11. 汎関数 $F[\gamma]$ のクラス $\mathcal{F}$ の仮定

仮定 1 を経路で書き直す. 自由に汎関数微分できるように, 高階の汎関数微分について考える.

定義 1 (高階の汎関数微分). 任意の分割 $\Delta_{T,0}$ に対し,

$$F[\gamma_{\Delta_{T,0}}] = F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1}, x_J, \dots, x_1, x_0) \in C^\infty(\mathbf{R}^{d(J+2)})$$

とする. 任意の折れ線経路 $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$ と $\eta_l: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d, l = 1, 2, \dots, L$ に対し, 高階の汎関数微分を

$$(D^L F)[\gamma] \prod_{l=1}^L [\eta_l] = \left(\prod_{l=1}^L \frac{\partial}{\partial \theta_l} \right) F[\gamma + \sum_{l=1}^L \theta_l \eta_l] \Big|_{\theta_1 = \dots = \theta_L = 0}$$

で定義する.

定義 2 (汎関数のクラス). 汎関数 $F[\gamma]$ が仮定 2 をみたすとき, $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ とする.

以下の図 15 は仮定 2 における経路である.

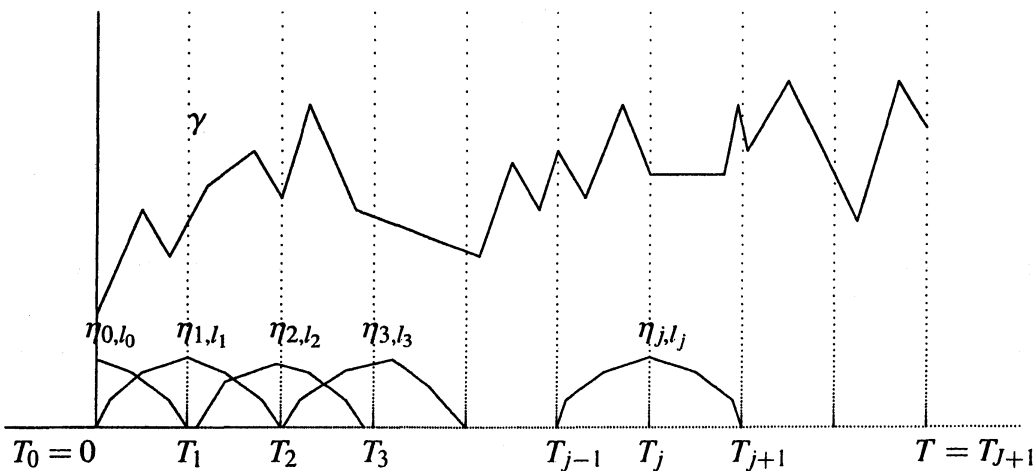


図 15.

仮定 2. $\kappa \geq 0$, $\rho(t)$ は有界変動関数, $|\rho|(t)$ は全変動とする. 任意の非負整数 M に対し, 正の定数 A_M, X_M が存在し,

$$(11.1) \quad |(D^{\sum_{j=0}^{J+1} L_j} F)[\gamma]| \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} [\eta_{j,l_j}] \leq A_M (X_M)^{J+1} e^{\kappa \|\gamma\|} \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} \|\eta_{j,l_j}\|,$$

$$(11.2) \quad |(D^{1+\sum_{j=0}^{J+1} L_j} F)[\gamma][\eta]| \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} [\eta_{j,l_j}] \\ \leq A_M (X_M)^{J+1} e^{\kappa \|\gamma\|} \int_0^T |\eta(t)| d|\rho|(t) \prod_{j=0}^{J+1} \prod_{l_j=1}^{L_j} \|\eta_{j,l_j}\|$$

が, 任意の分割 $\Delta_{T,0}$, 任意の折れ線経路 $\gamma: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$, $\eta: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$, 任意の $L_j = 0, 1, \dots, M$, $[T_{j-1}, T_{j+1}]$ に台をもつ任意の折れ線経路 $\eta_{j,l_j}: [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^d$, $l_j = 1, 2, \dots, L_j$ で成立する. $\|\gamma\| = \max_{0 \leq t \leq T} |\gamma(t)|$ とする.

注意. さらに偶然により, この仮定は平行移動, 線形変換, 汎関数微分に関しても閉じていた. ゆえに, 定理 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 すべて成立する.

謝辞. 収束だけを考えて汎関数のクラス $\mathcal{F}$ を構成したため, 論文 [27] を書いた時点では, 構成した $\mathcal{F}$ が重要な例 1(3) も含んでいたことに気づきませんでした. しかし, 一瀬孝先生に Ichinose-Tamura [19] の結果を教えていただいたときに気づきました. 今後の講演は例 1(3) を多用することになりそうです. 一瀬孝先生に感謝します.

参考文献

- [1] Albeverio, S., Høegh-Krohn and Mazzucchi, S., *Mathematical Theory of Feynman Path Integrals, Lecture Notes in Math.* **523**, Springer, Berlin, 1976; 2nd edition, 2008.
- [2] Baaquie, B. E., *Quantum Finance: Path Integrals and Hamiltonians for Options and Interest Rates*, Cambridge University Press, 2004.
- [3] Cameron, R. H., A family of integrals serving to connect the Wiener and Feynman integrals, *J. Math. and Phys.* **39** (1960), 126–140.
- [4] Cartier, P. and DeWitt-Morette, C., *Functional Integration: Action and Symmetries*, Cambridge University Press, 2007.
- [5] Chung, K. L. and Zambini, J.-C., *Introduction to Random Time and Quantum Randomness*, World Scientific Pub Co Inc., 2003.
- [6] Dash, J. W., *Quantitative Finance and Risk Management: A Physicist's Approach*, World Scientific Publishing Company, 2004.
- [7] Feynman, R. P., Space-time approach to non-relativistic quantum mechanics, *Rev. Modern Phys* **20** (1948), 367–387.

- [8] Feynman, R. P. and Hibbs, A. R., Quantum Mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, New York, 1965. 量子力学と経路積分, 北原和夫訳, みすず書房.
- [9] Fujiwara, D., Remarks on convergence of the Feynman path integrals, *Duke Math. J.* **47** (1980), 559–600.
- [10] ———, The stationary phase method with an estimate of the remainder term on a space of large dimension, *Nagoya Math. J.* **124** (1991), 61–97.
- [11] ———, Some Feynman path integrals as oscillatory integrals over a Sobolev manifold, *Lecture Notes in Math.* 1540, 39–53, Springer, 1993.
- [12] 藤原 大輔, ファインマン経路積分の数学的方法 — 時間分割近似法, シュプリンガー現代数学シリーズ, 1999.
- [13] Fujiwara, D. and Kumano-go, N., Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation, *Bull. Sci. Math.* **129** (2005), 57–79.
- [14] Grosche, C., and Steiner, F., *Handbook of Feynman path integrals*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1998.
- [15] Gill, T. L. and Zachary, W. W., Foundations for relatives quantum theory. I. Feynman's operational calculus and the Dyson conjecture, *J. Math. Phys.* **43** (2002), 69–93.
- [16] Hida, T., Kuo, H.-H., Potthoff, J., and Streit, L., *White Noise. An Infinite Dimensional Calculus*, Springer, 1993.
- [17] 一瀬 孝, Path Integral 入門, 数理物理への誘い (江沢 洋 編), 遊星社 1986, pp.88–110.
- [18] ———, 経路積分 — 解析学の立場から, 数学の未解決問題, 21 世紀数学への序章, サイエンス社 2003, pp.72–80.
- [19] Ichinose, T. and Tamura, H., Sharp error bound on norm convergence of exponential product formula and approximation to kernels of Schrödinger semigroups, *Comm. PDE* **29**, Nos. 11/12, (2004), 1905–1918.
- [20] Ichinose, W., On the formulation of Feynman path integral through broken line paths, *Commun. Math. Phys.* **189** (1997), 17–33.
- [21] Itô, K., Stochastic integral, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* **20** (1944), 519–524.
- [22] ———, Generalized uniform complex measure in Hilbert space and its application to the Feynman path integrals, Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Prob. **2**, part 1, University of California press, Berkeley, 1967, pp. 145–161
- [23] Johnson, G. W. and Lapidus, M., *The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus*, Oxford University Press, 2000.
- [24] Kleinert, H., *Path Integrals in Quantum Mechanics, Statistics, Polymer Physics, and Financial Markets*, World Scientific Publishing Co., Singapore 4th edition, 2006.
- [25] Kac, M., *Integration in function spaces and some of its applications*, Academia Nazionale dei Lincei Scuola Normale Superiore, Pisa, 1980.
- [26] Kumano-go, N., Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation, *Bull. Sci. Math.* **128** (2004), 197–251.
- [27] ———, Path integrals for Gaussian processes as analysis on path space by time slicing approximation, *Integration: Mathematical Theory and Applications*. **1** (In Press), 253–278.
- [28] Malliavin, P., *Stochastic Analysis*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1997.
- [29] Mazzucchi, S., *Mathematical Feynman Path Integrals and Their Applications*, World Scientific Pub Co Inc., 2009.

- [30] Nelson, E., Feynman integrals and Schödinger equation, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 332–343.
- [31] Schulman, L. S., Techniques and Applications of Path Integration, Jonh Wiley, New York, 1981 (Dover Publications, New York, 2005). ファインマン経路積分, 高塚和夫訳, 講談社.
- [32] Stratonovich, R. L., A new representation for stochastic integrals and equations, *J. SIAM Control* **4** (1966), No. 2, 362–371.
- [33] Truman, A., The Feynman Maps and the Wiener Integrals, *J. Math. Phys.* **19** (1978), 1742–1750.