数理解析研究所講究録
第 1726 巻 2011 年 1-16

平均・分散モデルを用いた資産均衡問題と解の一意性

京都大学大学院 情報学研究科 数理工学専攻 *新見朋広, 山下信雄
Department of Applied Mathmatics and Physics,
Graduate School of Informatics, Kyoto University

1 序論

バブル崩壊後から日本では超低金利時代が続いている. そのため預貯金の魅力が薄れており, 近年は資産運用方法として様々な資産が注目を浴びている. 現在, 債権や株式のみならず, 不動産, 商品など様々な資産が市場で取引されている.

投資では, 収益率の高い銘柄に多額の投資をすればするほど高い利益を上げることができるが, 集中投資はその分高いリスクを負うことを意味する. このように収益とリスクのトレードオフを考慮し, 投資から得られる満足度を表した関数を効用関数という. 投資による効用関数値, すなわち投資から得られる満足度を最大化するような資産配分を決定する問題をポートフォリオ最適化問題という. 各投資家は個々のポートフォリオ最適化問題を解くことで最適な資産配分を決定し, 分散投資している. 各資産の価格は, 投資家からの投資額が増え (減) れば上 (下) がるため, 全投資家の投資額から妥当な価格が決定される. この価格を資産均衡という. 成長が見込める資産も, 多くの投資家が投資すれば資産価格は上昇し, 成長に見合った収益は得られない. そのため, 集団として投資家の行動, そしてその結果の資産均衡が重要になる. これまで, 均衡状態を表す様々なモデルが提案されているが, それらの多くは抽象的な確率微分方程式や効用関数に基づき, 一般的だが具体性に欠けていた. そのため均衡状態を求めたり, 均衡への個々の投資家の影響の分析は困難であった. そこで, 均衡状態の計算が容易な資産均衡問題モデルを提案し, その性質を調べる.

投資による収益を投資時点で知ることは不可能だが, この状況に対して Markowitz[1] は, 投資家がどのように振舞うかを数理モデルとして定式化した. Markowitz は, 収益のみに着目していた従来の資産配分方法に対し, 収益に加えてリスクを考慮した方法を提唱した. この理論は収益の指標として期待収益率, リスクの指標として収益率の分散を用いることから平均・分散モデルと呼ばれ, 2 次計画問題として定式化される. 本報告書でもこの平均・分散モデルに基づいたモデルを考えるが, ヒストリカル・データやシナリオ・モデルを用いた従来の平均・分散モデルに代わり, ゲーム理論の視点から平均・分散モデルを捉えることで, 均衡状態が計算可能な資産均衡問題を提案し, その性質を調べる.

本報告書の構成を記す. 第 2 節では, 投資額によって収益率が変動する平均・分散モデルを提案し, 平均・分散モデルに基づいたポートフォリオ最適化問題を定式化する. さらに, ポートフォリオ最適化問題を, 異なる投資方針 (リスク選好度・投資資金) を持つ m 人の投

資配分についての各投資家（以下, プレイヤー 1,$\cdots$, m）の効用関数値を最大化する非協力ゲームへと拡張し, 均衡解を求める資産均衡問題を定式化する. 第3節では, 変分不等式問題として再定式化することで均衡解の存在と一意性について調べ, 均衡状態の計算可能性を述べる. 第4節では, 各プレイヤーを投資方針ごとに分類する. このとき, 同じ投資方針を持つプレイヤー同士はまとめて特別な効用関数を持つ1人の仮想的なプレイヤーとみなすことができ, より小規模な資産均衡問題として定式化できることを示す. 同じく均衡状態の計算可能性について調べ, 効用関数の変化について考察する. 第5節では, 定式化した資産均衡問題のシミュレーションによる数値実験を行い, 各プレイヤーの投資方針の違いや資金規模による均衡状態への影響を分析する. 第6節でまとめと今後の課題を述べる.

2　平均・分散モデルを用いた資産均衡問題

本節では m 人のプレイヤーが平均分散モデルに基づいた各々の効用関数を最大化することによってポートフォリオを定める非協力ゲームを定式化する.

2.1　資産価格への影響を考慮した平均・分散モデル

まず, プレイヤー j 1人の投資戦略のモデルを与える. そのためにプレイヤー j 以外のプレイヤーの投資配分が所与として, プレイヤー j の効用関数の値を最大化するポートフォリオ最適化問題を定式化する. さらに定式化したポートフォリオ最適化問題を m 人による資産均衡問題へと拡張する. 今回, 各プレイヤーは各々投資資金 (p^1 , ... , p^m) を資産 1, ... ,n に分散投資し, 空売りは考えない. すなわち, 各資産への投資額は非負とする.

また投資家は, 収益を期待して投資を行うが, 収益率のモデル化を行う際には資産の“投資家から見た現在の資産価値 (以下, 投資家価値)”, “現在の本来の資産価値 (以下, 本来価値)”, “将来の資産価値 (以下, 将来価値)”が重要となる.

本報告書では, 投資家価値は各プレイヤーの投資額で変動し, 本来価値は定数, 将来価値は本来価値と資産の成長率 (定数) で定まる定数とする. すなわち, 資産 i における収益率は各プレイヤーの資産 i への投資額で変動するとする. 以下では次の記号を用いる.

${x^j}_i$	:	プレイヤー j の銘柄 i における投資額
X_i	:	各プレイヤーの銘柄 i における投資額の合計 ($=\sum_{j=1}^m {x^j}_i$)
α_j	:	プレイヤー j のリスク選好度 (定数)
p^j	:	プレイヤー j の投資資金 (定数)
V	:	収益率の分散共分散行列 (定数)
R_i	:	資産 i の成長率 (定数)
$\tilde{S}_i$	:	資産 i の本来価値 (定数)
S_i	:	資産 i の投資家価値
r_i	:	資産 i の期待収益率関数

また, 以下のように表記する.

$$\boldsymbol{x}^j := (x_1^j, \cdots, x^j n), \quad \boldsymbol{x}^{-j} := (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^{j-1}, \boldsymbol{x}^{j+1}, \cdots, \boldsymbol{x}^m), \quad \boldsymbol{r} := \begin{pmatrix} r_1 & \cdots & r_n \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

ポートフォリオ最適化問題を定式化するにあたり, 各プレイヤーの効用関数を定める必要がある. 効用関数とは人間の価値観 (心理的満足感の度合い) を定量的に表現するための数学モデルのことであり, 自然科学の領域では陽に議論されることが少ないが, 人間を主体とした方策を論じるオペレーションズ・リサーチの分野では重要な役割を果たす. 投資における効用関数の指標として一般に投資リターンと投資リスクを用いる. 本報告書では, 投資リターンおよび投資リスクの指標をそれぞれ期待収益率および収益率の分散とする平均・分散モデルを用いる. このときポートフォリオ $\boldsymbol{x}$, 投資資金 p を用いて, 投資リターン μ および投資リスク σ はそれぞれ $\boldsymbol{x}$ の関数として以下のように表される.

$$\mu(\boldsymbol{x}) := \boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}\frac{\boldsymbol{x}}{p}, \qquad \sigma(\boldsymbol{x}) := \left(\frac{\boldsymbol{x}}{p}\right)^{\mathrm{T}} V \left(\frac{\boldsymbol{x}}{p}\right)$$

ここで, 投資家のリスク観は多様であるため, 本報告書では各投資家ごとのリスク選好度 α を導入し投資リスクに対して重みをつける.

収益率のモデル化を行う. 収益率は 将来価値 に対して 投資家価値 が高 (低) ければ収益率は低く (高く) なる. そこでまずは投資家価値のモデル化を定める.

投資家価値は, 必ずしも本来価値 と一致しない. これは企業の株価が業績だけでなく, 投資家の人気等に伴い変動することを考えても明らかである. 投資家は収益を期待して投資を行うので, 自身の期待の大きな資産に対して多くの投資を行うと考えられる. そこで今回は, 投資家 (各プレイヤー) の投資比率が大きい資産ほど投資家の期待度が大きいと考え, 投資家価値が高いとする. すなわち, 資産の投資家価値は投資家 (各プレイヤー) のその資産への投資比率に比例するとする. このとき, 資産 i の投資家価値は以下で表される.

$$\begin{aligned}
\text{資産 } i \text{ の投資家価値 } (= S_i) &= \text{全資産の資産価値の合計・全投資家の資産 } i \text{ への投資比率} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i\right)\frac{X_i}{\sum_{i=1}^{n} X_i}
\end{aligned}$$

また, 資産 i の将来価値は以下のように表される.

$$\begin{aligned}
\text{資産 } i \text{ の将来価値 } &= (1 + \text{資産 } i \text{ の成長率}) \cdot \text{資産 } i \text{ の本来価値} \\
&= (1 + R_i)\tilde{S}_i
\end{aligned}$$

以上のように定めた上で, 資産 i における収益率のモデルとして以下のように定める. [1]

$$\begin{aligned}
r_i(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m) &= \frac{\text{資産 } i \text{ の将来価値} - \text{資産 } i \text{ の投資家価値}}{\text{資産 } i \text{ の将来価値}} \\
&= \frac{(1 + R_i)\tilde{S}_i - S_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i} = 1 - \frac{S_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i} \\
&= 1 - \frac{\sum_i \tilde{S}_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i(\sum_i X_i)} X_i = 1 - \frac{\sum_i \tilde{S}_i}{(1 + R_i)\tilde{S}_i(\sum_j p^j)} X_i \\
&= 1 - l_i X_i
\end{aligned} \tag{1}$$

[1], 一般的に投資による収益率といえば $r_i(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m) = \frac{\text{資産 } i \text{ の将来価値} - \text{資産 } i \text{ の投資家価値}}{\text{資産 } i \text{ の投資家価値}}$ と定めるのが自然であるが, このように定めると次節において解の存在と一意性を示すことが出来ないため, 式 (1) のように定めている.

ただし, l_i は以下で表される定数である.

$$l_i := \frac{\sum_{i=1}^{n} \tilde{S}_i}{(1+R_i)\,\tilde{S}_i \left(\sum_{j=1}^{m} p^j\right)}. \tag{2}$$

プレイヤー j の効用関数を $U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j})$ とする. 以上より, U_j はプレイヤー j 以外のプレイヤーのポートフォリオが所与で $\boldsymbol{x}^{-j*}$ であるとし, $L := \mathrm{diag}\,(l_1, \cdots, l_n)$ とすると

$$\begin{aligned} U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j*}) =& (\text{投資リターン}) - (\text{投資リスク}) \\ =& \boldsymbol{r}(\boldsymbol{x}^j, \boldsymbol{x}^{-j*})^{\mathrm{T}} \frac{\boldsymbol{x}^j}{p^j} - \frac{1}{\alpha_j}(\frac{1}{p^j}\boldsymbol{x}^j)^{\mathrm{T}} V (\frac{1}{p^j}\boldsymbol{x}^j) \\ =& -\frac{1}{\alpha_j {p^j}^2} {\boldsymbol{x}^j}^{\mathrm{T}} V \boldsymbol{x}^j - \frac{1}{p^j}\left(\sum_{j'=1}^{m} \boldsymbol{x}^{j'}\right)^{\mathrm{T}} L \boldsymbol{x}^j + \frac{x_1^j + \cdots + x_n^j}{p^j} \\ =& -\frac{1}{\alpha_j {p^j}^2} {\boldsymbol{x}^j}^{\mathrm{T}} V \boldsymbol{x}^j - \frac{1}{p^j}\left(\sum_{j'=1}^{m} \boldsymbol{x}^{j'}\right)^{\mathrm{T}} L \boldsymbol{x}^j + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

と定められる. V は半正定値行列なので U_j は $\boldsymbol{x}^j$ に関して凹関数になる. このとき, プレイヤー j の効用関数値を最大化するポートフォリオ最適化問題は以下で定式化される.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j*}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}^j \geq \boldsymbol{0}, \quad \sum_{i=1}^{n} {x^j}_i = p^j \end{array} \tag{4}$$

実行可能解の集合 Ω_j は凸集合なので, ポートフォリオ最適化問題 (4) は凸計画問題となる.

2.2 m プレイヤーによる資産均衡問題

問題 (4) として定式化したポートフォリオ最適化問題を m 人のプレイヤーによる非協力ゲームに拡張し, その均衡解を求める資産均衡問題を定式化する. まず均衡解を定義する.

非協力ゲームにおける均衡状態として, ナッシュ均衡 (Nash equilibrium) がある. ナッシュ均衡とは, ある戦略の組 (今回のモデルでは各投資家の分散投資の組み合わせ $(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m)$) に対して, 各プレイヤーが (他のプレイヤーは戦略を変化させないとして), どんな他の戦略を選んでもそれ以上自身の利得を高くできない戦略の組を言う.

前節で定式化したプレイヤー j についてのポートフォリオ最適化問題 (4) に対して, 他のプレイヤーについても同様に定式化すると以下の m 個の凸計画問題が定式化される.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & U_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1*}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}^1 \in \Omega_1 \end{array} \quad \cdots \quad \begin{array}{ll} \text{maximize} & U_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m*}) \\ \text{subject to} & \boldsymbol{x}^m \in \Omega_m \end{array}$$

このとき, 次式を満たす $(\boldsymbol{x}^{1*}, \cdots, \boldsymbol{x}^{m*}) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m$ をナッシュ均衡解とよぶ.

$$\left.\begin{array}{l} U_1(\boldsymbol{x}^{1*}; \boldsymbol{x}^{-1*}) \geq U_1(\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^{-1*}) \\ \qquad \vdots \\ U_m(\boldsymbol{x}^{m*}; \boldsymbol{x}^{-m*};) \geq U_m(\boldsymbol{x}^m, \boldsymbol{x}^{-m*}) \end{array}\right. \quad \forall(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \tag{5}$$

このナッシュ均衡解を求める問題 (5) を資産均衡問題とよぶ. 均衡解が求まれば資産価格等も求められる. そこで, 資産均衡問題 (5) の均衡解の一意性や計算可能性が重要になる.

3 均衡解の存在と一意性

本節では, 資産均衡問題 (5) において, 均衡解の存在と一意性について調べ, 均衡解の計算の可能性を議論する. まず, 資産均衡問題 (5) を変分不等式問題へと再定式化する.

変分不等式問題 (variational inequality problem) とは, 空でない閉凸集合 $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ とベクトル値写像 $\boldsymbol{F}_{IV} : \boldsymbol{R}^n \quad \to \quad \boldsymbol{R}^n$ に対して, 以下のように表される問題をいう.

$$\text{find} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega \quad \text{such that} \quad \langle \boldsymbol{F}_{IV}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{x} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{y} \in \Omega \tag{6}$$

資産均衡問題 (5) を変分不等式問題に再定式化するために以下の補題を用いる.

補題 3.1. [3, 定理 3.4.] Ω を空でない凸集合とする. $f : \boldsymbol{R}^n \quad \to \quad \boldsymbol{R}$ が点 $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ において微分可能な凸関数であるとき, 以下の凸計画問題

$$\text{minimize} \quad f(\boldsymbol{x}) \qquad \text{subject to} \quad \boldsymbol{x} \in \Omega$$

において $\bar{\boldsymbol{x}} \in \Omega$ が大域的最適解であるための必要十分条件は以下が成り立つことである.

$$\langle \nabla f(\bar{\boldsymbol{x}}), \boldsymbol{x} - \bar{\boldsymbol{x}} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \Omega.$$

補題 3.1 を用いると, プレイヤー j のポートフォリオ最適化問題 (4) は, プレイヤー j 以外のプレイヤーのポートフォリオが所与で $\boldsymbol{x}^{-j*}$ であるとすると以下の変分不等式問題

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \boldsymbol{x}^{j*} \in \Omega_j \\ \text{such that} & \langle \nabla_{\boldsymbol{x}^j} U_j(\boldsymbol{x}^{j*}, \boldsymbol{x}^{-j*}), \boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^{j*} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}^j \in \Omega_j \end{array} \tag{7}$$

と等価である. 変分不等式問題 (7) の不等式の両辺を p^j 倍しても解は変わらないので,

$$F_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) := -p^j \nabla_{\boldsymbol{x}^j} U_j(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) = \frac{2}{\alpha_j p^j} V \boldsymbol{x}^j + L\boldsymbol{x}^j + \textstyle\sum_{j'=1}^{m} \left(L\boldsymbol{x}^{j'} \right)$$

とおくと変分不等式問題 (7) は, 以下と等価である.

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \boldsymbol{x}^{j*} \in \Omega_j \\ \text{such that} & \langle F_j(\boldsymbol{x}^{j*}; \boldsymbol{x}^{-j*}), \boldsymbol{x}^j - \boldsymbol{x}^{j*} \rangle \geq 0 \quad \forall \boldsymbol{x}^j \in \Omega_j \end{array} \tag{8}$$

ここで, $\boldsymbol{F} := \begin{pmatrix} F_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1}) \\ \vdots \\ F_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m}) \end{pmatrix}$ とすると, 資産均衡問題 (5) は以下と等価である.

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \left(\boldsymbol{x}^{1*}, \cdots, \boldsymbol{x}^{m*} \right) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \\ \text{such that} & \left\langle \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^{1*}, \cdots, \boldsymbol{x}^{m*}), \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{m*} \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0 \\ & \forall (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m) \in \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_m \end{array} \tag{9}$$

この変分不等式問題 (9) の変数の数は mn である.

以下では, 写像の強単調性, 狭義単調性を用いて変分不等式問題に対する解の存在と一意性について調べる. そこで, まず写像の強単調性および狭義単調性の定義を与える.

$\boldsymbol{R}^n$ から $\boldsymbol{R}^n$ への写像 A と空でない凸集合 $\Omega \subseteq \boldsymbol{R}^n$ に対して

- A が Ω において強単調 (strongly monotone) であるとは, ある定数 $\sigma > 0$ が存在して, 以下が成り立つことをいう.

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega \quad \Longrightarrow \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{y}) \rangle \geq \sigma \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|^2$$

- A が Ω において狭義単調 (strictly monotone) であるとは以下が成り立つことをいう.

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \Omega, \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y} \quad \Longrightarrow \quad \langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}, A(\boldsymbol{y}) - A(\boldsymbol{y}) \rangle > 0$$

補題 3.2. [3, 定理 5.4.] $\boldsymbol{F}_{IV}$ が連続写像である変分不等式問題 (6) において, $\boldsymbol{F}_{IV}$ が強単調であれば, 変分不等式問題 (6) は唯一の解を持つ.

補題 3.3. $\boldsymbol{F}$ は強単調である.

証明. $F_1(\boldsymbol{x}^1; \boldsymbol{x}^{-1}), \cdots, F_m(\boldsymbol{x}^m; \boldsymbol{x}^{-m})$ の定義より,

$$\boldsymbol{F} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha_1 p^1} V & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \frac{2}{\alpha_m p^m} V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2L & L & \cdots & L \\ L & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L \\ L & \cdots & L & 2L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^m \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

を得る. これは $\boldsymbol{F}$ が $(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^m)$ のアフィン写像になっていることを示している. アフィン写像において強単調性と狭義単調性は等価であるので, $\boldsymbol{F}$ の狭義単調性を示せばよい.

任意の $\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{z}_1 & \cdots & \boldsymbol{z}_m \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \neq \boldsymbol{0}$ $(\boldsymbol{z}_1, \cdots, \boldsymbol{z}_m \in \boldsymbol{R}^n)$ に対して,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} (\nabla_{\boldsymbol{x}} \boldsymbol{F}) \boldsymbol{z} &= \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} \frac{2}{\alpha_1 p^1} V & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \frac{2}{\alpha_m p^m} V \end{pmatrix} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} 2L & L & \cdots & L \\ L & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & L \\ L & \cdots & L & 2L \end{pmatrix} \boldsymbol{z} \\ &> \boldsymbol{z}^{\mathrm{T}} \begin{pmatrix} L & \cdots & L \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L & \cdots & L \end{pmatrix} \boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1 + \cdots + \boldsymbol{z}_m)^{\mathrm{T}} L \, (\boldsymbol{z}_1 + \cdots + \boldsymbol{z}_m) \\ &> 0 \end{aligned}$$

2 行目の不等式は V が半正定値行列, かつ l_i $(i = 1, \cdots, n)$ が正定数であることより従う. よって狭義単調性, すなわち強単調性が示される. □

以下の定理では, 提案した資産均衡問題 (9) の均衡解の存在と一意性について述べる.

定理 3.1. 資産均衡問題 (9) は一意の解を持つ.

証明. 補題 3.2 より, 変分不等式問題 (9) において $\boldsymbol{F}$ が強単調であれば, この変分不等式問題が唯一の解を持つことが保証される. 補題 3.3 より, $\boldsymbol{F}$ の強単調性がいえるので変分不等式問題 (9) は一意の解を持つ. □

定理 3.1 より, 資産均衡問題 (9) は一意の解を持つ凸計画問題であるので, 準ニュートン法等の既存アルゴリズムを用いることで均衡解は計算可能である.

4 プレイヤーの分類による効率化

現実において m や n の値は非常に大きくなるため，均衡状態の分析や計算には困難が伴う．特に，均衡状態の分析においては個々のプレイヤーの振る舞いよりも，むしろそのプレイヤーの属する集団，例えば富裕層であるとか高齢者であるといった分類による各集団の振る舞いを調べることが重要となる．そこで，等しいリスク選好度および投資資金をもつプレイヤー同士をひとつのクラスとしてまとめ，m 人のプレイヤーを T 個のクラスに分類することを考える．後述のように，このようにクラス分けを行うことによって各クラスをそれぞれ特殊な効用関数をもつひとつの仮想的なプレイヤーとみなすことができる．そこでこの T 人の仮想的なプレイヤーによる資産均衡問題を定式化することで，前節の mn 変数の変分不等式問題を解くところを Tn 変数の変分不等式問題を解くことへと縮小できる．

4.1 クラス分けの定式化

いま，リスク選好度および投資資金が等しいプレイヤーの集合をクラスとよび，T 個のクラスがあるものとする．さらに，各プレイヤーはクラス $C_1, \cdots, C_T$ のいずれかに属するものとする．あるクラス C_t に属するプレイヤー τ のリスク選好度を α_τ，投資資金を p^τ とする．また，クラス C_t に属するプレイヤーの数を κ_t とする．定理 3.1 より，資産均衡問題 (9) の均衡解は唯一であるから同じクラスに属するプレイヤー同士の最適ポートフォリオは等しくなる．ここでプレイヤー τ の効用関数の勾配は

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\boldsymbol{x}^\tau} U_\tau(\boldsymbol{x}^\tau; \boldsymbol{x}^{-\tau}) &= -\frac{2}{\alpha_\tau p^{\tau 2}} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau} L\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau} \textstyle\sum_{j=1}^m (L\boldsymbol{x}^j) \\
&= -\frac{2}{\alpha_\tau p^{\tau 2}} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{\kappa_t + 1}{p^\tau} L\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau} \textstyle\sum_{j \notin C_t} (L\boldsymbol{x}^j)
\end{aligned}
$$

と書ける．最後の等号はクラス C_t に属する κ_t 人のプレイヤーはすべてプレイヤー τ と同じ最適ポートフォリオを持つことから従う．よってプレイヤー τ の効用関数は

$$
U_\tau(\boldsymbol{x}^j; \boldsymbol{x}^{-j}) = -\frac{1}{\alpha_\tau p^{\tau 2}} \boldsymbol{x}^{\tau\mathrm{T}} V\boldsymbol{x}^\tau - \frac{1}{p^\tau} \left(\frac{\kappa_j + 1}{2} \boldsymbol{x}^\tau + \textstyle\sum_{j \notin C_t} \boldsymbol{x}^j \right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^\tau
$$

とみなせるので，非協力ゲームにおけるプレイヤー τ のポートフォリオ最適化問題は

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -\dfrac{1}{\alpha_a p^{\tau 2}} \boldsymbol{x}^{\tau\mathrm{T}} V\boldsymbol{x}^\tau - \dfrac{1}{p^\tau} \left(\dfrac{\kappa_t + 1}{2} \boldsymbol{x}^\tau + \sum_{j \notin C_t} \boldsymbol{x}^j \right)^{\mathrm{T}} L\boldsymbol{x}^\tau \\
\text{subject to} & \boldsymbol{x}^\tau \geq \mathbf{0}, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^s = p^\tau
\end{array}
\tag{10}
$$

と考えることができる．この問題は C_t に属するすべてのプレイヤーおいて共通である．ここで $\bar{\boldsymbol{x}}^t := \kappa_t \boldsymbol{x}^\tau$, $\bar{\alpha}_t := \alpha_\tau$, $\bar{p}^t := \kappa_t p^\tau$ とおくと，問題 (10) は以下の問題として表される．

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximize} & -\dfrac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}} \bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} V\bar{\boldsymbol{x}}^t - \dfrac{1}{\bar{p}^t} \left(\dfrac{\kappa_t + 1}{2\kappa_t} \bar{\boldsymbol{x}}^t + \sum_{j \notin C_t} \bar{\boldsymbol{x}}^j \right)^{\mathrm{T}} L\bar{\boldsymbol{x}}^t \\
\text{subject to} & \bar{\boldsymbol{x}}^t \geq \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^n \bar{x}_i^t = \bar{p}^t
\end{array}
\tag{11}
$$

クラス C_t には, 投資資金 p^τ の κ_t 者のプレイヤーが属しているのでクラス C_t に属するプレイヤーの総投資資金は $\bar{p}^t$ であり, その総ポートフォリオは $\bar{\boldsymbol{x}}^t$ である. そのため凸計画問題 (11) はクラス t についてのポートフォリオ最適化問題とみなすことができる. そこで, 問題 (11) を解く仮想的なプレイヤーを考え, これをクラスプレイヤー t と呼ぶことにする. 他のクラスについても同様に考えると, 結局各クラスはそれぞれ仮想的なプレイヤーであるクラスプレイヤーが以下の問題を解いているものとみなすことができる.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -\dfrac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}} \bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} V \bar{\boldsymbol{x}}^t - \dfrac{1}{\bar{p}^t} \left(\dfrac{\kappa_t + 1}{2\kappa_t} \bar{\boldsymbol{x}}^t + \sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^j \right)^{\mathrm{T}} L \bar{\boldsymbol{x}}^t \\ \text{subject to} & \bar{\boldsymbol{x}}^t \geq \boldsymbol{0}, \qquad \sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i^t = \bar{p}^t \end{array} \tag{12}$$

ここで, 問題 (11) の目的関数にある $\sum_{j \notin C_t} \bar{\boldsymbol{x}}^j$ が問題 (12) では $\sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^j$ と表されていることに注意する. そのため問題 (12) は $\bar{\boldsymbol{x}}^j$ のみで表される.

問題 (3), (4) と比較すると, クラスプレイヤーのポートフォリオ最適化問題では, 自身の投資が収益率関数に与える影響が $\frac{\kappa_t+1}{2\kappa_t}$ 倍に減少していることがわかる.

$$\bar{\boldsymbol{x}}^j := (\bar{x}_1^j, \cdots, \bar{x}_n^j), \qquad \bar{\boldsymbol{x}}^{-j} := (\bar{\boldsymbol{x}}^1, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}^{j-1}, \bar{\boldsymbol{x}}^{j+1}, \cdots, \bar{\boldsymbol{x}}^T)$$

と表記することにする. 資産均衡問題 (5) はクラスプレイヤーによる資産均衡問題に変換することができる. ここで

$$\begin{aligned} \bar{U}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) &:= -\frac{1}{\bar{\alpha}_t \bar{p}^{t2}} \bar{\boldsymbol{x}}^{t\mathrm{T}} V \bar{\boldsymbol{x}}^t - \frac{1}{\bar{p}^t} \left(\frac{\kappa_j + 1}{2\kappa_j} \bar{\boldsymbol{x}}^t + \sum_{j \neq t}^{T} \bar{\boldsymbol{x}}^t \right)^{\mathrm{T}} L \bar{\boldsymbol{x}}^t, \\ \bar{F}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) &:= -\bar{p}^t \nabla_{\bar{\boldsymbol{x}}^t} \bar{U}_t(\bar{\boldsymbol{x}}^t; \bar{\boldsymbol{x}}^{-t}) \\ \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^T) &:= \begin{pmatrix} \bar{F}_1(\bar{\boldsymbol{x}}^1; \bar{\boldsymbol{x}}^{-1}) \\ \vdots \\ \bar{F}_T(\bar{\boldsymbol{x}}^T; \bar{\boldsymbol{x}}^{-T}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とおき, さらにポートフォリオ最適化問題 (12) の実行可能解の集合を $\bar{\Omega}_t$ とすると, 資産均衡問題は以下の変分不等式問題へと定式化される.

$$\begin{array}{ll} \text{find} & \left(\boldsymbol{x}^{1*}, \cdots, \boldsymbol{x}^{T*} \right) \in \bar{\Omega}_1 \times \cdots \times \bar{\Omega}_T \\ \text{such that} & \left\langle \bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^{1*}, \cdots, \boldsymbol{x}^{T*}), \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^T \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}^{1*} \\ \vdots \\ \boldsymbol{x}^{T*} \end{pmatrix} \right\rangle \geq 0 \\ & \qquad\qquad \forall (\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^T) \in \bar{\Omega}_1 \times \cdots \times \bar{\Omega}_T \end{array} \tag{13}$$

この変分不等式問題の変数の数は Tn である. つまり, 変数の数を mn から Tn へと減らすことができたことになる.

次に, クラス分けによる分類を用いた場合の資産均衡問題 (13) の均衡解の存在と一意性について調べる. 前節同様, $\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^T)$ の強単調性を調べればよく, $\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^T)$ は

$$
\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^T)=\begin{pmatrix}\frac{2}{\bar{\alpha}_1\bar{p}^1}V & & \mathbf{0}\\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \frac{2}{\bar{\alpha}_T\bar{p}^T}V\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^T\end{pmatrix}
+\begin{pmatrix}\frac{\kappa_1+1}{\kappa_1}L & L & \cdots & L\\ L & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & L\\ L & \cdots & L & \frac{\kappa_T+1}{\kappa_T}L\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^T\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}
$$

と表せるため．これは $\bar{\boldsymbol{F}}$ が $(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)$ のアフィン写像である．さらに $\bar{\boldsymbol{F}}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^T)$ の狭義単調性については前節と全く同様に示すことができる．以上より，クラス分けによる分類を用いた場合の資産均衡問題 (13) は唯一の解を持つ．さらに，前節同様に均衡解は計算可能である．

5 数値実験

本節では，提案した資産均衡問題に対して，いくつかの状況を設定して数値実験を行う．

数値実験を行うため，変分不等式問題として定式化された資産均衡問題を，変分不等式問題に対する KKT 条件 (Karush-Kuhn-Tucker Conditions) を考えることによって以下のような混合相補性問題 (mixed complementarity problem, MCP) へと再定式化する．

$$
\begin{array}{lcl}
\text{find} & (\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}) & \\
\text{such that} & \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m) & =\mathbf{0}\\
 & \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)+\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda} & \geq\mathbf{0}\\
 & \left(\boldsymbol{x}^{1\mathrm{T}},\ \cdots,\ \boldsymbol{x}^{m\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} & \geq\mathbf{0}\\
 & \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)+\nabla\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda}\right)^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^m\end{pmatrix} & \geq\mathbf{0}
\end{array}
$$

ただし

$$
\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m):=\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^n {x^1}_i-p^1\\ \vdots\\ \sum_{i=1}^n {x^m}_i-p^m\end{pmatrix}
$$

であり，$\boldsymbol{\lambda}=\left(\lambda^1,\cdots,\lambda^m\right)^{\mathrm{T}}$ は制約条件 $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)=\mathbf{0}$ に対するラグランジュ乗数．さらに Fischer-Burmeister 関数を用いることにより以下のような制約なし最小化問題へと変換し，数値実験を行う．[7]

$$
\begin{array}{ll}
\text{minimize} & \|\Phi(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda})\|^2\\
\text{subject to} & \begin{pmatrix}\boldsymbol{x}^1\\ \vdots\\ \boldsymbol{x}^m\\ \boldsymbol{\lambda}\end{pmatrix}\in\boldsymbol{R}^{mn+m}
\end{array}
\tag{14}
$$

ただし

$$\Phi(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}) := \begin{pmatrix} \phi_{FB}\left(x^1{}_1, (\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_1\right) \\ \vdots \\ \phi_{FB}\left(x^1{}_n, (\boldsymbol{F}_1(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_n\right) \\ \phi_{FB}\left(x^2{}_1, (\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_{n+1}\right) \\ \vdots \\ \phi_{FB}\left(x^2{}_n, (\boldsymbol{F}_2(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_{2n}\right) \\ \phi_{FB}\left(x^3{}_1, (\boldsymbol{F}_3(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_1 + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_{2n+1}\right) \\ \vdots \\ \phi_{FB}\left(x^m{}_n, (\boldsymbol{F}_m(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m,\boldsymbol{\lambda}))_n + (\nabla \boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}^1,\cdots,\boldsymbol{x}^m)\boldsymbol{\lambda})_{mn}\right) \end{pmatrix}$$

であり, ϕ_{FB} は Fischer-Burmeister 関数, すなわち $\phi_{FB}(a,b) := a + b - \sqrt{a^2, b^2}$ とする. 本数値実験は MATLAB7.6 を用いて実装し, 制約なし最小化問題 (14) の計算にはコマンド fminunc を用いた.

5.1 数値実験に用いたシナリオ

本数値実験では, プレイヤー同士が各自の投資資金を持ち寄り 1 人のプレイヤーとして投資を行うことによる資産均衡状態への影響を調べる. なお, このような投資を以下では協力投資とよぶことにする. そこで以下のような状況について数値実験を行った.

シナリオ 1 クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする. 各クラスに属するプレイヤーの数はいずれも 1000 人とする. クラス a, b, c に属するプレイヤーのリスク選好度はそれぞれ 25(リスク選好型), 20(リスク中立型), 15(リスク回避型) とし, 各プレイヤーの投資資金は一律に 1 とする. すなわち

$$m = 3000, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \underbrace{25\cdots25}_{1000} & \underbrace{20\cdots20}_{1000} & \underbrace{15\cdots15}_{1000} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \underbrace{1\cdots1}_{1000} & \underbrace{1\cdots1}_{1000} & \underbrace{1\cdots1}_{1000} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

シナリオ 2 シナリオ 1 において, クラス a, c の設定は同一とする. またクラス b に属する 1000 人を 900 人と 100 人のクラス b', b" に分割し, クラス b" の 100 人は資金を合わせて 1 人のプレイヤーとして協力投資を行うものとする. つまり, クラス b', b" に属するプレイヤーの数はそれぞれ 900 人と 1 人, リスク選好度はいずれも 20(リスク中立型) とし, クラス b', b" に属するプレイヤーの投資資金はそれぞれ 1 と 100 とする. すなわち

$$m = 2901, \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \underbrace{25\cdots25}_{1000} & \underbrace{20\cdots20}_{900} & 20 & \underbrace{15\cdots15}_{1000} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} \underbrace{1\cdots1}_{1000} & \underbrace{1\cdots1}_{900} & 100 & \underbrace{1\cdots1}_{1000} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

シナリオ 3 クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする. クラス a, b, c に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, 1000 人, リスク選好度はそれぞれ 10(リスク回避型), 10(リスク回避型), 20(リスク中立型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100, 1 とする. このとき, クラス b に属するプレイヤーはクラス a に属すると同じリスク選好度および投資資金をもった 100 人のプレイヤーが協力投資を行ったものに相当する. すなわち

$$m = 1101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{10 \cdots 10}_{100} \quad 10 \quad \underbrace{20 \cdots 20}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1 \cdots 1}_{100} \quad 100 \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}$$

シナリオ 4 クラスの数を 3 とし, それぞれクラス a, b, c とする. クラス a, b, c に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, 1000 人, リスク選好度はそれぞれ 40(リスク選好型), 40(リスク選好型), 20(リスク中立型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100, 1 とする. このとき, クラス b に属するプレイヤーはクラス a に属すると同じリスク選好度および投資資金をもった 100 人のプレイヤーが協力投資を行ったものに相当する. すなわち

$$m = 1101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{40 \cdots 40}_{100} \quad 40 \quad \underbrace{20 \cdots 20}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1 \cdots 1}_{100} \quad 100 \quad \underbrace{1 \cdots 1}_{1000} \right)^{\mathrm{T}}$$

シナリオ 5 クラスの数を 2 とし, それぞれのクラスを a, b とする. クラス a, b に属するプレイヤーの数はそれぞれ 100 人, 1 人, リスク選好度は一律に 40(リスク選好型) とし, 投資資金はそれぞれ 1, 100 とする. すなわち

$$m = 101, \boldsymbol{\alpha} = \left(\underbrace{40 \cdots 40}_{100} \quad 40 \right)^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{p} = \left(\underbrace{1 \cdots 1}_{100} \quad 100 \right)^{\mathrm{T}}$$

各シナリオにおいて資産の設定は共通とし, 以下のように定める.

- 資産数は 3 とし, 各資産の収益率の間には相関がなく, 分散はそれぞれ 0.5, 3.5, 9.0 とする. さらに各資産の成長率はそれぞれ 0.05, 0.15, 0.45, 各資産の本来価値は一律に 10 とする. つまり本数値実験では, ローリスク・ローリターン (資産 1), ミドルリスク・ミドルリターン (資産 2), ハイリスク・ハイリターン (資産 3) の 3 社の資産を想定する. すなわち

$$n = 3, V = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 3.5 & 0 \\ 0 & 0 & 9.0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.15 \\ 0.45 \end{pmatrix}, \tilde{\boldsymbol{S}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix}$$

5.2 数値実験結果・考察

以上のようなシナリオ 1 ～ 5 に対して提案モデルの数値実験を行った結果, 各プレイヤーの各資産への投資配分, リターン, リスクおよび効用関数の値について表 1, 2, 5～7 のような結果を得た. これらの数値実験結果に対して, 均衡状態におけるポートフォリオ, 投資成果 (効用関数値), 市場支配力の 3 点について考察を与える.

5.2.1 均衡ポートフォリオについて

表 1, 2 の結果を見ると, リスク選好度の高いプレイヤーはハイリスク・ハイリターンの資産への投資を好み, リスク選考度の低いプレイヤーはローリスク・ローリターンの資産への投資を好むことが確認できる. 実験結果を比べると, シナリオ 1 においてクラス b に属するプレイヤーおよびシナリオ 2 においてクラス b' に属するプレイヤーのポートフォリオは「資産 3 への投資額 > 資産 2 への投資額 > 資産 1 への投資額」であるのに対し, シナリオ 2 においてクラス b" に属するプレイヤーのポートフォリオは (リスク選好度は等しいにも関わらず), 「資産 1 への投資額 > 資産 2 への投資額 > 資産 3 への投資額」へと転じていることがわかる. すなわち, 協力投資を行うことでハイリスク・ハイリターンな投資志向へと変わっていることがわかるこれは以下のように考えることで説明できる.

m 人の資産均衡問題において同一の投資資産 p^j およびリスク選好度 α_j を持つ k 人が協力して「ひとつの投資家 (プレイヤー j)」として投資を行う場合を考える. これは, $m-k+1$ 人の資産均衡問題においてプレイヤー j が kp^j の投資資産と α_j のリスク選好度を持っていると考えればよく, プレイヤー j のポートフォリオ最適化問題は以下の問題と等価になる.

$$\begin{array}{ll} \text{maximize} & -\dfrac{\alpha_j}{(kp^j)^2}\boldsymbol{x}^{j\mathrm{T}}V\boldsymbol{x}^j - \dfrac{1}{kp^j}\left(\sum_{j'=1}^{m-k+1}\boldsymbol{x}^{j'}\right)^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}^j + 1 \\ \text{subject to} & \sum_{i=1}^{n} {x^j}_i = kp^j, \quad \boldsymbol{x}^j \geq \boldsymbol{0} \end{array}$$

ここで, 目的関数は以下のように書き換えることが出来る.

$$-\frac{\alpha_j}{(kp^j)^2}\boldsymbol{x}^{j\mathrm{T}}\left(V + \frac{kp^j}{\alpha_j}\right)\boldsymbol{x}^j - \frac{1}{kp^j}\left(\sum_{j'\neq j}\boldsymbol{x}^{j'}L\right)^{\mathrm{T}}L\boldsymbol{x}^j + 1$$

ここから, k が大きくなればなるほど V の影響力に対して L の影響力が大きくなることがわかる. また, l_i は式 (2) で定めたように資産 i の将来価値に反比例する定数であり, 資産の本来価値が一律の場合は資産の成長率に反比例する定数である.

よってシナリオ 1 におけるクラス b やシナリオ 2 におけるクラス b' では V の影響が大きく, よりリスク (分散) の少ない資産に多くの投資していたものがシナリオ 2 におけるクラス b" のように協力投資を行った結果, V に対して L の影響が大きくなったためにより高い成長率の資産への投資にシフトしたものと考えることができる.

なお, 本実験では各資産の収益率の間に相関はない, すなわち分散共分散行列 V の対角成分以外は 0 としたが, 相関がある場合にも同様の議論が当てはまる. その結果を示したものが表 3, 4 のシナリオ 1', 2' である. シナリオ 1' およびシナリオ 2' はそれぞれ各プレイヤーや資産の本来価値, 資産の成長率, 各資産の収益率の分散はシナリオ 1 およびシナリオ 2 と同一であるが, シナリオ 1, 2 と違い各資産の収益率の共分散を設定する. すなわち, 分散共分散行列 V のみを以下のように変更する.

$$V = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.1 & 0.2 \\ -0.1 & 3.5 & -0.15 \\ 0.2 & -0.15 & 9.0 \end{pmatrix}$$

表 3 のクラス b および表 4 のクラス b' に属するプレイヤーと表 4 のクラス b" に属するプレイヤーを比べることにより, 各資産の収益率の間に相関 (共分散) がある場合にも, 協力投資を行うことでより高い成長率の資産への投資にシフトしていることが確認できる.

表 1: 数値実験結果 (シナリオ 1)

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 2000$	$2001, \cdots, 3000$
リスク選好度	25	20	15
投資資金	1	1	1
資産 1 への投資額	0.2140	0.3375	0.4614
資産 2 への投資額	0.3845	0.3318	0.2790
資産 3 への投資額	0.4015	0.3306	0.2597
リターン	0.1862	0.1611	0.1359
リスク	1.9913	1.4263	0.9857
効用関数値	0.1065	0.0897	0.0702

表 2: 数値実験結果 (シナリオ 2)

クラス	a	b'	b"	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 1900$	1901	$1902, \cdots, 2901$
リスク選好度	25	20	20	15
投資資金	1	1	100	1
資産 1 への投資額	0.2144	0.3379	32.63	0.4616
資産 2 への投資額	0.3843	0.3317	33.54	0.2789
資産 3 への投資額	0.4013	0.3304	33.83	0.2595
リターン	0.1861	0.1610	0.1636	0.1358
リスク	1.9890	1.4248	1.4769	0.9849
効用関数値	0.1065	0.0897	0.0897	0.0702

5.2.2 投資成果について

シナリオ 1, 2 では, 協力投資の結果, 高成長率の資産への投資へとシフトすることを見た. 表 1, 2 からも確認できるようにこれは (リスクが増えても) リターンを増やす投資へとシフトしたことを意味する. これより, 同じリスク選好度のプレイヤー同士の協力投資における効用関数値, すなわちプレイヤーの投資に対する投資成果に対して考察を与える.

協力投資によるリターンの増加はリスク選好型投資家に対しては有利に働くといえる. また, ハイリスク・ハイリターン, ローリスク・ローリターン型の資産への投資においては, 協力投資によるリターンの増加はリスクの増加を意味するため, リスク回避型投資家に対して不利に働くといえる. このことは表 5, 6 の実験結果に見ることができる.

ここで, シナリオ 3, 4 においてクラス c, つまりリスク選好度が 20(リスク中立型) の 1000 人のプレイヤーを設けたのは特定のプレイヤーが過度の市場支配力を持つことを避けるためである. このとき, シナリオ 3 においてはクラス a に属する協力投資を行わないプレイヤーの方が, シナリオ 4 においてはクラス b に属する協力投資を行うプレイヤーの方が効用関数値が高くなっていることが確認できる.

表 3: 数値実験結果 (シナリオ 1')

クラス	a	b	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 2000$	$2001, \cdots, 3000$
リスク選好度	25	20	15
投資資金	1	1	1
資産 1 への投資額	0.3226	0.3333	0.3625
資産 2 への投資額	0.3111	0.3240	0.3578
資産 3 への投資額	0.3663	0.3427	0.2797
リターン	0.1687	0.1633	0.1488
リスク	1.5913	1.4705	1.2024
効用関数値	0.1051	0.0897	0.0686

表 4: 数値実験結果 (シナリオ 2')

クラス	a	b'	b"	c
プレイヤー	$1, \cdots, 1000$	$1001, \cdots, 1900$	1901	$1902, \cdots, 2901$
リスク選好度	25	20	20	15
投資資金	1	1	100	1
資産 1 への投資額	0.3353	0.3039	31.62	0.3425
資産 2 への投資額	0.3331	0.3022	32.94	0.3418
資産 3 への投資額	0.3316	0.2939	35.44	0.3157
リターン	0.1605	0.1593	0.1668	0.1566
リスク	1.4232	1.4000	1.5492	1.3522
効用関数値	0.1036	0.0893	0.0894	0.0665

5.2.3 市場支配力について

シナリオ 3, 4 では市場支配力を抑制するためにクラス c のプレイヤーを設けたが, ここでは市場支配力の影響について考察する. シナリオ 4 において市場支配力の抑制をなくした場合の数値計算結果が表 7 である. シナリオ 4 では協力投資によってより良い投資成果 (効用関数値) をあげていたが, クラス a, b に属するプレイヤーの設定は不変にも関わらずシナリオ 5 では投資成果が落ちていることがわかる. これはクラス b のプレイヤーのように協力投資により過度の市場支配力を持つと, 収益率への影響が大きくなるために自身の投資による収益率が下がり, 結果として投資成果が落ちることを意味する.

6 まとめと今後の課題

本報告書では, 異なる投資方針 (リスク選好度および投資資金) を持った複数の投資家による均衡解の計算が可能な資産均衡問題を提案し, 数値実験によってプレイヤー同士が協力して投資を行った場合のポートフォリオや効用関数値の変化について考察を与えた.

このようにプレイヤー同士が協力投資を行う場合と行わない場合の最適ポートフォリオ

表 5: 数値実験結果 (シナリオ 3)

クラス	a	b	c
プレイヤー	1, ⋯ , 100	101	102, ⋯ , 1101
リスク選好度	10	10	20
投資資金	1	100	1
資産 1 への投資額	0.5122	44.82	0.3181
資産 2 への投資額	0.2850	31.85	0.3313
資産 3 への投資額	0.2028	23.33	0.3506
リターン	0.1145	0.1283	0.1660
リスク	0.7857	0.9454	1.5410
効用関数値	0.0359	0.0338	0.0890

表 6: 数値実験結果 (シナリオ 4)

クラス	a	b	c
プレイヤー	1, ⋯ , 100	101	102, ⋯ , 1101
リスク選好度	40	40	20
投資資金	1	100	1
資産 1 への投資額	0.2670	20.60	0.3466
資産 2 への投資額	0.2323	33.87	0.3412
資産 3 への投資額	0.5008	45.53	0.3121
リターン	0.1964	0.1943	0.1600
リスク	2.4814	2.2881	1.3445
効用関数値	0.1344	0.1362	0.0927

の違いについて得られる知見の意味・応用として“投資信託”が考えられる. 投資信託とは, 多数の投資家により出資・拠出されてプールされた資金を, 資産運用の専門家 (アセットマネージャー) が運用し, 運用成果を投資家に分配する金融商品のことである. 投資信託を利用することは, 本数値実験において協力投資を行うことに相当する. 投資信託では通常の投資と同じく元本保証はないが, 自らに代わり資産運用の専門家が取引してくれるため, 一見して自ら投資を行うよりも高い成果が期待できそうである. 本報告書で定式化した資産均衡問題を通じて, 個人での投資と投資信託による投資の違いや投資信託の妥当性等について, ゲーム理論的視点から何らかのヒントを得られるように思われる. 例えば, 本数値実験・考察で見たようにアクティブ運用の投資ファンドにおいてはローリスク・ローリターン型投資ファンドよりもハイリスク・ハイリターン型投資ファンドのほうが良いかもしれない. また, 運用総額が多く大きな市場支配力を持つ投資信託は避けたほうがよいかもしれない. 今後は, より現実に則した収益率モデルの考えることや, より多くの状況の下での数値実験を行いさらに有用な考察の試みること, また, 本報告書では平均・分散モデ

表 7: 数値実験結果 (シナリオ 5)

クラス	a	b
プレイヤー	$1, \cdots, 100$	101
リスク選好度	40	40
投資資金	1	100
資産 1 への投資額	0.3322	29.39
資産 2 への投資額	0.3270	32.15
資産 3 への投資額	0.3408	38.46
リターン	0.1705	0.1766
リスク	1.4749	1.7365
効用関数値	0.1337	0.1332

ルに基づいた資産均衡問題を定式化したが, その他のリスク指標として用いられる絶対偏差等を用いたモデルについても考えること等が課題である.

参考文献

[1] 茨木俊秀, 福島雅夫, 最適化の手法, 共立出版, 1993.

[2] F. Facchinei and J. S. Pang, *Finite-Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems I*, Springer-Verlag, New York, 2003.

[3] 福島雅夫, 非線形最適化の基礎, 朝倉書店, 2001.

[4] 今野浩, 理財工学 I 平均・分散モデルとその拡張, 日科技連, 1995.

[5] H. Markowitz, *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, John Wiley & Sons, New York, 1959.

[6] R. Marton, *Optimum Consumption and Portfolio Rules in Continuous Time Model*, Journal of Economic Theory 3 (1971), pp.373-413.

[7] 渡辺隆裕, ゲーム理論入門, 日本経済新聞社, 2008.

[8] J. Y. Wei and Y. Smeers, *Spatial Oligopolistic Electricity Models with Cournot Generators and Regulated Transmission Prices*, Operations Research 47 (1999), pp.102-112.