数理解析研究所講究録
第1731巻 2011年 28-39

無限次元タイヒミュラー空間の問題

早稲田大学　教育・総合科学学術院　松崎　克彦　(KATSUHIKO MATSUZAKI)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF EDUCATION
WASEDA UNIVERSITY

1. タイヒミュラー空間と円周の擬対称写像

双曲リーマン面 R のタイヒミュラー空間（以下，一般的な理論については [9], [12], [20] を参照）は，R の普遍被覆である単位円板 $\mathbb{D}$ のタイヒミュラー空間 T に埋め込むことができる．これを**普遍タイヒミュラー空間**と呼ぶ．単位円板 $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像 $f:\mathbb{D}\to\mathbb{D}$ 全体のなす群を QC とおく．この元 f のタイヒミュラー同値類 $[f]$ 全体の集合が普遍タイヒミュラー空間 T である．2つの擬等角自己同相写像がタイヒミュラー同値であるとは，その単位円周 S^1 への拡張（**擬対称写像**）が，メビウス変換の差を除いて一致することで定義する．したがって，単位円周 S^1 の擬対称自己同相写像全体のなす群を QS であらわすとすると，普遍タイヒミュラー空間は $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus \mathrm{QS}$ であらわせる．ここで Möb はメビウス変換全体のなす群である．Ahlfors-Bers による可測リーマン写像定理により，$\mathbb{D}$ 上の有界可測関数全体のなす複素バナッハ空間 $L^\infty(\mathbb{D})$ の開単位球 M の元に対して，それを歪曲係数 $\mu_f=f_{\bar z}/f_z$ としてもつ擬等角自己同相写像 f がメビウス変換のあとからの合成を除いて一意的に存在する．よって $\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus \mathrm{QC}$ は M と同一視できる．M の複素構造とノルムから $T=\mathrm{M\ddot{o}b}\setminus \mathrm{QS}$ の複素構造と計量（タイヒミュラー計量）が誘導される．T は無限次元非可分で可縮なバナッハ多様体で，タイヒミュラー計量に関して完備である．普遍タイヒミュラー空間 T には擬対称自己同相写像群 QS が作用する．すなわち，任意の $g\in\mathrm{QS}$ に対して，$g_*:T\to T$ を $g_*[f]=[f\circ g^{-1}]$ により定める．この作用は T の複素構造と計量に関して双正則かつ等長的である．T の双正則自己同型群を

$\mathrm{Aut}(T)$ とすると，対応 $g \mapsto g_*$ で定義される表現 $\iota_T : \mathrm{QS} \to \mathrm{Aut}(T)$ は（全射）同型写像である．

双曲リーマン面 R は $\mathbb{D}$ を普遍被覆としてもつので，その被覆変換群 G は Möb の部分群で $\mathbb{D}$ に固定点をもたずに固有不連続に作用するものである．そのような群をフックス群という．R のタイヒミュラー空間は，普遍タイヒミュラー空間 T の $G \subset \mathrm{QS}$ により不変な元全体からなる閉部分空間（多様体）

$$T(G) = \{[f] \in T \mid g_*[f] = [f]\ (\forall g \in G)\}$$

として定義できる．G と両立する擬対称自己同相写像全体のなす群を

$$\mathrm{QS}(G) = \{f \in \mathrm{QS} \mid f \circ g \circ f^{-1} \in \text{Möb}\ (\forall g \in G)\}$$

とおくと，$T(G) = \text{Möb} \setminus \mathrm{QS}(G)$ と定義することと同値である．また，G の QS における正規化群を $N_{\mathrm{QS}}(G)$ とすると，これは $T(G)$ に双正則かつ等長的に作用する．$G \subset N_{\mathrm{QS}}(G)$ は自明に作用するので，$\mathrm{MC}(G) = N_{\mathrm{QS}}(G)/G$ とおき，これを**擬等角写像類群**とよぶ．タイヒミュラー空間の次元の低いいくつかの例外を除き，この作用により導かれる表現 $\iota_{T(G)} : \mathrm{MC}(G) \to \mathrm{Aut}(T(G))$ は（全射）同型写像となる ([14])．

2. 普遍漸近的タイヒミュラー空間

単位円板の擬等角自己同相写像 $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ が**漸近的等角**であるとは，f の歪曲係数 $\mu_f \in M$ が境界で 0 となること，すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある半径 $r < 1$ が存在して，$\operatorname{ess.sup}_{|z|>r} |\mu_f(z)| < \varepsilon$ をみたすことである．また，このような境界で 0 となるような可測関数からなる M の部分空間を M_0 とする．漸近的等角自己同相写像全体のなす QC の部分群を AC とする．この元の S^1 への拡張を**対称写像**といい，対称自己同相写像全体からなる QS の部分群を Sym とする．このとき，**普遍漸近的タイヒミュラー空間** は $AT = \mathrm{Sym} \setminus \mathrm{QS}$ で定義される ([10])．$f \in \mathrm{QS}$ に対して，AT の元を $[[f]]$ であらわすとすると，$[f] \mapsto [[f]]$ で与えられる射影 $\alpha : T \to AT$ が正則になるような複素構造が AT に導入でき，また，T のタイヒミュラー計量の商として AT に完備な計量（漸近的タイヒミュラー計量）が定義される．AT も無限次元非可分可縮なバナッハ多様体であ

る．射影 α に局所的な正則切断が存在するかどうかは知られていない．そのために AT 上の解析が T 上のものから容易に従うとは限らないことがある．T の複素構造に関する小林計量はタイヒミュラー計量と一致することが知られているが，AT については未解決である ([6]).

問題 1 (***). 普遍漸近的タイヒミュラー空間 AT の小林計量は漸近的タイヒミュラー計量と一致する.

任意の $p \in T$ に対して，p を含む $\alpha : T \to AT$ のファイバー $\alpha^{-1}(\alpha(p))$ を T_p とかく．とくに原点 $0 = [\mathrm{id}] \in T$ に対しては $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}$ となる．擬対称自己同相群 QS は T にファイバーを保って作用すること（$g_*(T_p) = T_{g_*(p)}$）は容易にわかるので，QS は AT に作用する．すなわち，任意の $g \in \mathrm{QS}$ に対して $g_{**}[[f]] = [[f \circ g^{-1}]]$ が定まる．このとき，α の局所的な正則切断の存在を示さなくても，g_{**} は AT の双正則写像（等長は明らか）となることが証明できる．対応 $g \mapsto g_{**}$ により準同型 $\iota_{AT} : \mathrm{QS} \to \mathrm{Aut}(AT)$ を得るが，これは忠実な表現（単射）であることが知られている ([4]).

問題 2 (**). 単射準同型写像 $\iota_{AT} : \mathrm{QS} \to \mathrm{Aut}(AT)$ は全射である.

射影 α のファイバーは T の可分な閉部分空間になるが，T の計量に関する幾何学的性質について次のことはまだ知られていない ([6]).

問題 3 (***). ファイバー $T_0 = \mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Sym}$ は T のタイヒミュラー計量に関して凸である.

3. リーマン面の漸近的タイヒミュラー空間と群不変対称構造のタイヒミュラー空間

タイヒミュラー空間の場合と同様に，漸近的タイヒミュラー空間についてもリーマン面あるいはフックス群に対する概念が定義できる．ただし，この場合２種類の別の空間が研究されている.

リーマン面の漸近的タイヒミュラー空間: フックス群 G と両立する $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像の全体のなす群を $\mathrm{QC}(G)$ とする．$f \in \mathrm{QC}(G)$ の歪曲係数 μ_f がリーマン面 $R = \mathbb{D}/G$

の境界で 0 となるということを，任意の $\varepsilon > 0$ に対してあるコンパクト集合 $V \in \mathbb{D}$ が存在して，

$$\operatorname*{ess.\,sup}_{z \in \mathbb{D} - \tilde{V}} |\mu_f(z)| < \varepsilon \qquad (\tilde{V} = \bigcup_{g \in G} g(V))$$

であることにより定義する．このような R の境界で 0 となる擬等角自己同相写像の全体を AC^G とし，その S^1 への拡張全体を $\mathrm{Sym}^G \subset \mathrm{QS}(G)$ とおく．このとき，R の漸近的タイヒミュラー空間を $AT(R) = \mathrm{Sym}^G \backslash \mathrm{QS}(G)$ で定義する ([5])．リーマン面 R のタイヒミュラー空間 $T(R)$（$= T(G)$ で定義する）が無限次元のとき，かつ，そのときに限り $AT(R)$ は 1 点ではなくなる．このような場合に，普遍漸近的タイヒミュラー空間の場合の議論を一般化することにより，射影 $\alpha_R : T(R) \to AT(R)$ が正則となるような複素構造が $AT(R)$ に入り，また完備な計量も入る．$AT(R)$ は無限次元非可分可縮なバナッハ多様体となる ([7])．また，R の擬等角写像類群 $\mathrm{MC}(R)$（$= \mathrm{MC}(G)$ で定義する）は同様に $AT(R)$ に双正則等長的に作用し，表現 $\iota_{AT(R)} : \mathrm{MC}(R) \to \mathrm{Aut}(AT(R))$ を得る．R が $\mathbb{D}$ または 1 点穴あき円板の場合のときのみ $\iota_{AT(R)}$ は単射であることがわかっている ([4])．

問題 4 (***)．第 2 節の問題 1〜3 に対応する問題をリーマン面の漸近的タイヒミュラー空間の場合にも考えよ．

群不変対称構造のタイヒミュラー空間: フックス群 G に対して弱い意味での不変性をもつ普遍タイヒミュラー空間 T の元の集合を

$$\tilde{T}(G) = \{[f] \in T \mid g_{**}[[f]] = [[f]] \ (\forall g \in G)\}$$

として定義する．これは

$$\widetilde{\mathrm{QS}}(G) = \{f \in \mathrm{QS} \mid f \circ g \circ f^{-1} \in \mathrm{Sym} \ (\forall g \in G)\}$$

とおくと，$\tilde{T}(G) = \mathrm{M\ddot{o}b} \backslash \widetilde{\mathrm{QS}}(G)$ と定義することと同じである．このとき，G-不変対称構造のタイヒミュラー空間を射影 $\alpha : T \to AT$ を使って $AT(G) = \alpha \tilde{T}(G)$ で与える．すなわち $AT(G) = \mathrm{Sym} \backslash \widetilde{\mathrm{QS}}(G)$ である．$AT(G)$ は普遍漸近的タイヒミュラー空間 AT の閉部分空間であり，タイヒミュラー空間 $T(G)$ が 1 点となる場合を除き，無限次元非可分となる．

問題 5 (*). G-不変対称構造のタイヒミュラー空間 $AT(G)$ は可縮である.

問題 6 (*). G-不変対称構造のタイヒミュラー空間 $AT(G)$ は（G が初等的である場合を除き）AT の漸近的タイヒミュラー計量に関して凸でない.

擬等角写像類群 $\mathrm{MC}(G)$ は $AT(G)$ に双正則等長的に作用する. したがって表現 $\iota_{AT(G)}$: $\mathrm{MC}(G) \to \mathrm{Aut}(AT(G))$ を得る.

問題 7 (**). 準同型写像 $\iota_{AT(G)} : \mathrm{MC}(G) \to \mathrm{Aut}(AT(G))$ は（例外型の G を除き）同型である.

4. 擬対称写像群の擬等角拡張

まず, S^1 の擬対称自己同相写像の $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像への拡張について述べる. 定義より, このような拡張は必ず存在する. Douady-Earle による**等角重心拡張**は次のように定義される ([3]). $f \in \mathrm{QS}$ の $z \in \mathbb{D}$ からみた重心とは, ポアソン積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{S^1} P_w(f(\zeta))|P'_z(\zeta)||d\zeta|$$

の値が 0 となる点 $w \in \mathbb{D}$ のことである. ここで $P_z(\zeta) = (\zeta - z)(1 - \bar{z}\zeta)^{-1}$ は z を 0 に写す単位円板のメビウス変換であり, その $\zeta \in S^1$ における微分の絶対値 $|P'_z(\zeta)| = (1-|z|^2)|\zeta - z|^{-2}$ がポアソン核である. 重心は一意的に存在するので, 対応 $z \mapsto w$ により $E(f)$ を定義する. このとき $E(f)$ は $\mathbb{D}$ の擬等角自己同相写像となり, その S^1 への拡張が f と一致する. $f \in \mathrm{QS}$ に対して, f の擬等角拡張 $F \in \mathrm{QC}$ すべてに渡ってとった歪曲度の下限を

$$k_*(f) = \inf_F \|\mu_F\|_\infty$$

とおく. このとき $\|\mu_{E(f)}\|_\infty$ は $k_*(f)$ のみによる定数で 1 から離れて評価できる. また, $E(f)$ は $\mathbb{D}$ の微分自己同相写像となり, $\mathbb{D}$ の双曲計量に関する微分係数は一様に $k_*(f)$ で評価できる. 定義より, $g \in \mathrm{M\ddot{o}b}$ に対して $E(g)$ は $\mathbb{D}$ のメビウス変換であるが, さらに $g_1, g_2 \in \mathrm{M\ddot{o}b}$, $f \in \mathrm{QS}$ に対して, 等角自然性

$$E(g_1 \circ f \circ g_2) = E(g_1) \circ E(f) \circ E(g_2)$$

が成り立つ．しかし，$E : \mathrm{QS} \to \mathrm{QC}$ は準同型とはならない．

擬等角自己同相写像群 QC から擬対称自己同相写像群 QS への対応を与える準同型を $q : \mathrm{QC} \to \mathrm{QS}$ とおく．等角重心拡張 $E : \mathrm{QS} \to \mathrm{QC}$ は $q \circ E = \mathrm{id}_{\mathrm{QS}}$ をみたすが，準同型ではない．実際，このような q の切断となるような準同型は存在しないことが証明されている ([8])．さらにフックス群 G の QC での正規化群 $N_{\mathrm{QC}}(G)$ に制限し，全体を G で割った対応

$$q_G : \widetilde{\mathrm{MC}}(G) = N_{\mathrm{QC}}(G)/G \to \mathrm{MC}(G) = N_{\mathrm{QS}}(G)/G$$

に対して，準同型 $e_G : \mathrm{MC}(G) \to \widetilde{\mathrm{MC}}(G)$ で $q_G \circ e_G = \mathrm{id}_{\mathrm{MC}(G)}$ をみたすものが存在するかどうかも問題になるが，これについても $\mathbb{D}/G$ がコンパクトとなるような G（ココンパクトフックス群）については否定的であることが証明されている ([16])．

問題 8 (*)．任意の非初等的なフックス群 G に対して，準同型 $e_G : \mathrm{MC}(G) \to \widetilde{\mathrm{MC}}(G)$ で $q_G \circ e_G = \mathrm{id}_{\mathrm{MC}(G)}$ をみたすものは存在しない．

対称自己同相写像 $f \in \mathrm{Sym}$ に対しては $E(f) \in \mathrm{AC}$ が成り立つ ([7])．よって等角重心拡張 E は $q : \mathrm{AC} \to \mathrm{Sym}$ の切断である．

問題 9 (*)．準同型 $e : \mathrm{Sym} \to \mathrm{AC}$ で $q \circ e = \mathrm{id}_{\mathrm{Sym}}$ をみたすものは存在しない．

一方，QS の部分群が Möb の部分群に内部共役のときは，その群上での q の切断 e で準同型となるものが存在することは明らかである．次節ではこのような状況について説明する．

問題 10 (**)．QS の部分群 Γ で，Möb の部分群に内部共役ではないが，Γ 上では q の切断 e で準同型となるようなものが存在する．

擬対称自己同相写像の拡張については，等角重心拡張のほかに調和拡張も研究されている．単位円板 $\mathbb{D}$ の微分自己同相写像 F が双曲計量 $\rho(w)|dw| = 2|dw|/(1-|w|^2)$ に関して調和写像であるということを，オイラー・ラグランジュ方程式

$$\partial_z \partial_{\bar{z}} F(z) + \partial_w(\log \rho(w)) \circ F(z) \cdot \partial_z F(z) \partial_{\bar{z}} F(z) \equiv 0$$

をみたすことで定義する．擬対称自己同相写像 $f \in \mathrm{QS}$ の**調和拡張** $F \in \mathrm{QC}$ とは，$q(F) = f$ となるような擬等角調和写像のことである．このような F は存在すれば一意的であることが知られている．存在するような $f \in \mathrm{QS}$ の集合を QS' とすると，QS' はタイヒミュラー位相に関して QS の開集合であり，任意のココンパクトフックス群 G に対して $\mathrm{QS}(G) \subset \mathrm{QS}'$ である．また $\mathrm{Sym} \subset \mathrm{QS}'$ も証明されている ([13])．$\mathrm{QS}' = \mathrm{QS}$ であるという主張が Schoen 予想とよばれる．

問題 11 (***). 任意の $f \in \mathrm{QS}$ に対して $q(F) = f$ となるような調和拡張 $F \in \mathrm{QC}$ が存在する．

調和拡張を $H : \mathrm{QS}' \to \mathrm{QC}$ とすれば，H は等角重心拡張 E と同様な性質をもつ．等角自然性や Sym と AC の対応も成り立つ ([23])．

5. 固定点問題

一般にフックス群 G に対し，$\mathrm{MC}(G)$ の部分群 Γ をとる．この Γ に制限した準同型 $e_G : \Gamma \to \widetilde{\mathrm{MC}}(G)$ で $q_G : \widetilde{\mathrm{MC}}(G) \to \mathrm{MC}(G)$ の切断となっているものを求める問題を考える．$\mathrm{MC}(G)$ の $T(G)$ への作用において，Γ の共通固定点 $[f] \in T(G)$ が存在したとする．このとき $\hat{\Gamma}/G = \Gamma$ となる $\hat{\Gamma} \subset N_{\mathrm{QS}}(G)$ をとれば，$f\hat{\Gamma}f^{-1} \subset \text{Möb}$ となる．$q(F) = f$ となる $F \in \mathrm{QC}(G)$ をひとつ選び，S^1 上のメビウス変換を自明に $\mathbb{D}$ に拡張し，F による共役をとれば，$q : \mathrm{QC} \to \mathrm{QS}$ の切断となる準同型 $e : \hat{\Gamma} \to N_{\mathrm{QC}}(G)$ を得る．よって全体を G で割ることにより q_G の切断である準同型 $e_G : \Gamma \to \widetilde{\mathrm{MC}}(G)$ を得る．ニールセン実現問題は，ココンパクトなフックス群 G と有限部分群 $\Gamma \subset \mathrm{MC}(G)$ に対し，準同型 $e_G : \Gamma \to \widetilde{\mathrm{MC}}(G)$ で $q_G : \widetilde{\mathrm{MC}}(G) \to \mathrm{MC}(G)$ の切断となっているものを求める問題であると翻訳できる．これは Γ の作用の共通固定点 $[f] \in T(G)$ の存在を示すことにより証明された ([11])．

普遍タイヒミュラー空間 T 上の QS の部分群の作用に関する固定点問題は次のように解決されている．$\Gamma \subset \mathrm{QS}$ が**一様擬対称群**であるとは，ある定数 $0 \leq k < 1$ が存在して，任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して $k_*(\gamma) \leq k$ をみたすことであるとする．この必要十分条件が，Γ が T に共通固定点（ひとつとは限らない）をもつことであることが証明されている ([15])．

共通固定点を $[f] \in T$ とすると，これは $f\Gamma f^{-1}$ が Möb の部分群となることと同値である．この結果より，任意のフックス群 G に対して部分群 $\Gamma \subset \mathrm{MC}(G)$ が $T(G)$ に共通固定点をもつための必要十分条件は，Γ による点の軌道が $T(G)$ 内で有界であることであることがわかる．これは上記のニールセン実現問題の一般化を与えている．

一様擬対称群 Γ が**一様対称群**であるとは，$\Gamma \subset \mathrm{Sym}$ をみたすことである．このとき，Γ の AT への作用は原点 [[id]] を固定する．したがって T への作用ではファイバー $T_0 = \mathrm{Möb} \setminus \mathrm{Sym}$ を不変にする．一方，一様擬対称群であることより Γ は少なくともひとつ共通固定点 $[f] \in T$ をもつ．ここで，その共通固定点 $[f]$ が不変ファイバー T_0 上にあるという条件は，$[f]$ の代表元として $f \in \mathrm{Sym}$ がとれることを意味するので，対称自己同相写像による共役 $f\Gamma f^{-1}$ が Möb の部分群になるということと同値である．Γ が有限群の場合には，必ずこの条件がみたされる．

問題 12 (*). 一様対称群 Γ が（一様収束位相で）非離散的であるとき，Γ は共通固定点を T_0 上にもつ．

一様対称群 Γ が離散無限群の場合は，擬対称自己同相写像による共役 $f\Gamma f^{-1}$ は無限フックス群 H となる．よって無限フックス群 H の共役である一様対称群 Γ に対して上記の問題を考える．このとき，H のタイヒミュラー空間 $T(H)$ が 1 点である（すなわち H が剛性をもつ）場合を除き，H の共役 Γ で T_0 上に共通固定点をもたないもの，つまり，対称自己同相写像でフックス群とは共役にできないものが必ず存在する ([18])．第 3 節で述べた群不変対称構造のタイヒミュラー空間を用いて言い換えれば，$AT(H)$ は $\alpha T(H)$ を真に包含することと同値である．実際，$T(H)$ が有限次元の場合にも $AT(H)$ は非可分な無限次元空間となる．フックス群 H が剛性をもつ場合については第 7 節で述べる．

固定点問題は普遍漸近的タイヒミュラー空間 AT の上にも定式化できる．QS は AT に作用するので，部分群 $\Gamma \subset \mathrm{QS}$ が AT 上に共通固定点をもつための条件を考えることができる．

問題 13 (**). $\Gamma \subset \mathrm{QS}$ が AT 上に共通固定点をもつための必要十分条件は，Γ の軌道が AT 上で有界であることである．

$\Gamma \subset \mathrm{MC}(G)$ の $AT(G)$ への作用，$\Gamma \subset \mathrm{MC}(R)$ の $AT(R)$ への作用についても同様の問題が考えられる．ただし，$AT(R)$ の場合，あるリーマン面 R に対しては，$\mathrm{MC}(R)$ 全体が $AT(R)$ に共通固定点をもつ（より強く，すべての点が共通固定点となる）ことがありえる ([17])．これはタイヒミュラー空間 $T(R) = T(G)$ の場合はありえない現象である．

問題 14 (*). $\mathrm{MC}(G)$ の $AT(G)$ への作用が共通固定点をもつことはない．

6. 共役問題

$p \geq 1$ に対して，$\mathbb{D}$ の双曲計量 $\rho(z)|dz| = 2|dz|/(1-|z|^2)$ に関して p 乗可積分であるような有界可測関数の集合

$$M_p = \{\mu \in M \mid \int_{\mathbb{D}} |\mu(z)|^p \rho(z)^2 dxdy < \infty\}$$

を定義する．擬等角自己同相 $f \in \mathrm{QC}$ で $\mu_f \in M_p$ となるようなもの全体を QC_p とし，それらの元の S^1 への拡張全体を Sym_p とする．$p \leq q$ のとき $\mathrm{Sym}_p \subset \mathrm{Sym}_q$ が成り立つことは定義よりわかる．$p=2$ の場合，Sym_2 は Sym の部分群になることは知られている ([2])．

問題 15 (*). 任意の $p \geq 1$ に対して Sym_p は Sym の部分群となる．

離散的な一様擬対称群 Γ が Sym に含まれる（Γ が一様対称群である）場合，Γ は Sym 内でフックス群に共役とは限らなかった．Sym_p の場合に同じ問題を考えることができる．

問題 16 (**). 離散的な一様擬対称群 Γ が Sym_p に含まれるとき，Γ は Sym_p 内でフックス群に共役である．

とくに $p=2$ の場合，一様擬対称群 $\Gamma \subset \mathrm{Sym}_2$ は $T_2 = \text{Möb} \setminus \mathrm{Sym}_2 \subset T_0$ に等長的に作用する．T_2 にはヴェイユ・ピーターソン計量が定義でき，T_0 のタイヒミュラー計量に対して連続であることが示されている ([2], [22])．もし Γ の軌道が T_2 のヴェイユ・ピーターソン計量に関して有界（この条件は Γ が一様対称群であること，すなわち，軌道が T_0 のタイヒミュラー計量に関して有界であることより強い）であるならば，軌道のチェ

ビシェフ中心をとることにより Γ は T_2 内に共通固定点をもつことがわかる．よって，この場合は Γ は Sym_2 内でフックス群に共役である．

$\alpha \geq 1$ に対して，S^1 の C^α 級微分自己同相写像全体からなる群を Diff^α とする．このとき，$\mathrm{Diff}^1 \subset \mathrm{Sym}$ および $\mathrm{Diff}^3 \subset \mathrm{Sym}_2$ であることが知られている ([10], [22])．また $\mathrm{M\ddot{o}b} \setminus \mathrm{Diff}^\infty$ は T_2 のヴェイユ・ピーターソン計量，T_0 のタイヒミュラー計量で稠密である．Sym を Diff^α に取り替えて同様にして共役問題が考えられる．$\alpha \geq 3$ の場合には，離散的で非初等的な一様擬対称群 Γ が Diff^α に含まれ，さらに $\gamma \in \Gamma$ のリュービルコサイクル

$$c(\gamma)(x,y) = \frac{\gamma'(x)\gamma'(y)}{4\sin^2(\frac{1}{2}(\gamma(x)-\gamma(y)))} - \frac{1}{4\sin^2(\frac{1}{2}(x-y))} \qquad ((x,y) \in S^1 \times S^1)$$

とよばれる歪み度を測る量の L^1-ノルムが一様に有界であるとき，Γ は Diff^α 内でフックス群に共役であることが示されている ([21])．

問題 17 (*)． $\gamma \in \mathrm{Diff}^1$ に対して，リュービルコサイクル $c(\gamma)$ の L^1-ノルムと，γ の等角重心拡張 $E(\gamma)$ の歪曲係数 $\mu_{E(\gamma)}$ の双曲計量に関する L^1-ノルムとの関係を調べよ．

問題 18 (**)． 離散的な一様擬対称群 Γ が Diff^α に含まれるとき，Γ は Diff^α 内でフックス群に共役である．

なお，AC の元 f の歪曲係数 $\mu_f(z)$ の境界で 0 に収束する速さを測るために，$\beta > 0$ に対する広義積分

$$\int_0^1 \frac{\kappa(t)^\beta}{t} dt \qquad (\kappa(t) = \operatorname*{ess.sup}_{|z|>1-t} |\mu_f(z)|)$$

の収束，発散を用いることができる．$\beta = 1$ で収束するような歪曲係数をもつ $f \in \mathrm{AC}$ の S^1 への拡張は Diff^1 に属することが知られている ([1])．

7. 剛性問題

フックス群 G が剛性をもつとは，タイヒミュラー空間 $T(G)$ が 1 点からなること，すなわち $\mathrm{QS}(G) = \mathrm{M\ddot{o}b}$ となることである．剛性をもたないフックス群 G に対しては，群不変対称構造のタイヒミュラー空間 $AT(G)$ は無限次元空間で，射影 $\alpha : T \to AT$ に対し

て $\alpha T(G) \subsetneqq AT(G)$ が成り立っていた．一方，剛性をもつフックス群 G に対してはこの結果が成り立つかどうかは不明である ([19]).

問題 19 (**). 剛性をもつフックス群 G に対して $AT(G)$ は 1 点からなる.

この主張は $\widetilde{\mathrm{QS}}(G) = \mathrm{Sym}$ と同値である．つまり，G の QS の元による共役が Sym の部分群となるならば，その共役は Sym の元によるものであることを意味する．通常のフックス群の剛性を Möb-剛性とよぶならば，これは Sym-剛性とよぶべき性質である.

8. あとがき

本稿は「無限次元タイヒミュラー空間の問題」と題したが，当然のことながら，この分野の問題すべてを網羅しているわけではなく，また，現在活発に研究がなされている問題を選んだわけでもない．2010 年 9 月の数理解析研究所における講演ではおもに第 7 節の内容を目標に解説した．その後 10 月に姚国武（Yao, Guowu) 氏に講演していただく機会を得たが，そのとき教えられた結果のいくつかが新たに題材として付け加えられている．問題の難易度 (*) ～(***) の表示に明確な根拠はなく，また，問題によっては主張の反例を考える方が適切かもしれないものもある．本研究は，科学研究費補助金・基盤研究 (B)「対称構造のタイヒミュラー空間と擬等角写像類群の剛性および固定点問題」（研究課題番号 20340030）によるものである.

参考文献

[1] J. M. Anderson and J. Becker, *On the boundary correspondence of asymptotically conformal automorphisms*, J. London Math. Soc. **38** (1988), 453–462.

[2] G. Cui, *Integrably asymptotic affine homeomorphisms of the circle and Teichmüller spaces*, Sci. China Ser. A **43** (2000), 267–279.

[3] A. Douady and C. Earle, *Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle*, Acta Math. **157** (1986), 23–48.

[4] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic, *Teichmüller spaces with asymptotic conformal equivalence*, IHES 1995, unpublished manuscript.

[5] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part I: The complex structure*, In the tradition of Ahlfors and Bers, Contemporary Math. **256**, pp. 17–38, Amer. Math. Soc., 2000.

[6] C. Earle, F. Gardiner and N. Lakic, *Asymptotic Teichmüller space, Part II: The metric structure*, In the tradition of Ahlfors and Bers, III, Contemporary Math. **355**, pp. 187–219, Amer. Math. Soc., 2004.

[7] C. Earle, V. Markovic and D. Saric, *Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space*, Complex manifolds and hyperbolic geometry, Contemporary Math. **311**, pp. 87–105, Amer. Math. Soc., 2002.

[8] D. Epstein and V. Markovic, *Extending homeomorphisms of the circle to quasiconformal homeomorphisms of the disk*, Geom. Topol. **11** (2007), 517–595.

[9] F. Gardiner and N. Lakic, *Quasiconformal Teichmüller Theory*, Mathematical Surveys and Monographs **76**, Amer. Math. Soc., 2000.

[10] F. Gardiner and D. Sullivan, *Symmetric structure on a closed curve*, Amer. J. Math. **114** (1992), 683–736.

[11] S. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. **117** (1983), 235–265.

[12] O. Lehto, *Univalent Functions and Teichmüller Spaces*, Graduate Text in Math. **109**, Springer, 1986.

[13] V. Markovic, *Harmonic diffeomorphism of noncompact surfaces and Teichmüller spaces*, J. London Math. Soc. **65** (2002), 103–114.

[14] V. Markovic, *Biholomorphic maps between Teichmüller spaces*, Duke Math. J. **120** (2003), 405–431.

[15] V. Markovic, *Quasisymmetric groups*, J. Amer. Math. Soc. **19** (2006), 673–715.

[16] V. Markovic and D. Saric, *The Mapping class group cannot be realized by homeomorphisms*, preprint.

[17] K. Matsuzaki, *Quasiconformal mapping class groups having common fixed points on the asymptotic Teichmüller spaces*, J. Anal. Math. **102** (2007), 1-28.

[18] K. Matsuzaki, *Symmetric groups that are not the symmetric conjugates of Fuchsian groups*, In the tradition of Ahlfors and Bers, V, Contemporary Math. **510**, pp. 239–247, Amer. Math. Soc., 2010.

[19] K. Matsuzaki, *An averaging operator and non-separability of certain Banach spaces of holomorphic automorphic forms*, Infinite dimensional Teichmueller space and moduli space, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B17**, pp. 65-72, Research Institute for Mathematical Sciences, 2010.

[20] S. Nag, *The Complex Analytic Theory of Teichmüller Spaces*, Canadian Math. Soc. Ser. of Monographs and Advanced Texts, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1988.

[21] A. Navas, *On uniformly quasisymmetric groups of circle diffeomorphisms*, Ann. Acad. Sci. Fenn. **31** (2006), 437–462.

[22] L. Takhtajan and L. Teo, *Weil-Petersson metric on the universal Teichmüller space*, Mem. Amer. Math. Soc. **183** (2006), No. 861.

[23] G. Yao, *Harmonic maps and asymptotic Teichmüller Space*, Manuscripta Math. **122** (2007), 375–389.