数理解析研究所講究録
第 1732 巻 2011 年 92-94

A classification of Bott towers

石田 裕昭
(大阪市立大学)

1 はじめに

本稿では, *Bott tower* と呼ばれる $\mathbb{C}P^1$ 束の列の (smooth category における) 分類を与える. また, [2] の概説を行う.

定義 1.1. (高さ n の) Bott tower とは, 次のような $\mathbb{C}P^1$ 束の列

$$B_n \xrightarrow{\pi_n} B_{n-1} \xrightarrow{\pi_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\pi_2} B_1 \xrightarrow{\pi_1} B_0 = \{\text{a point}\}, \tag{1}$$

ただし各 fibration $\pi_i : B_i \to B_{i-1}$ は, 複素直線束の 2 つのホイットニー和に分解するような階数 2 の複素ベクトル束の射影化であるときを言う. (高さ n の) Bott tower (1) を, $B_\bullet = (\{B_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n)$ と書くことにする. Bott tower に表れる各多様体 B_i を, *Bott manifold* と呼ぶ.

例 1.2. B_1 は 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ の射影化であるから, 複素射影直線 $\mathbb{C}P^1$ に他ならない. $\mathbb{C}P^1$ 上の階数 2 の複素ベクトル束 η は, (topological には) その第一チャーン類 $c_1(\eta)$ で特徴づけられる. η の射影化の全空間は, $c_1(\eta) \equiv 0 \mod 2$ であるとき $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ と微分同相, $c_1(\eta) \not\equiv 0 \mod 2$ であるとき, $\mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相になることが知られている.

複素 3 次元 (実 6 次元) の Bott manifold に関しては, 次の定理が成り立つことが知られている:

定理 1.3 ([1]). 複素 3 次元の Bott manifold B_3, B_3' に対して, それらが微分同相になる必要十分条件は, それぞれの整係数コホモロジー環が同型になることである.

一般次元の Bott manifold に対しては, 次が予想されている:

問題 1.4 (Cohomological rigidity problem for Bott manifolds). Bott manifold たちは, その整係数コホモロジー環で分類される.

この問題に取り組む前段階として, *Bott tower* の分類を試みるのが本稿の目的である. Bott tower の定義において, 各 fibration は複素ベクトル束の射影化であったが, 正則構造を加味すれば, 各 B_i は複素多様体になり, 各 fibration は正則写像になる. しかし, 問題としたいのは, 次の同型の下での分類である:

定義 1.5. 2 つの高さ n の Bott tower $B_\bullet = (\{B_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n)$ と $B'_\bullet = (\{B'_i\}_{i=0}^n, \{\pi'_i\}_{i=1}^n)$ が同型である

とは, 次の図式

$$\begin{array}{ccccccccc}
B_n & \xrightarrow{\pi_n} & B_{n-1} & \xrightarrow{\pi_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi_2} & B_1 & \xrightarrow{\pi_1} & B_0 \\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_n} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}} & & & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_0} \\
B'_n & \xrightarrow{\pi'_n} & B'_{n-1} & \xrightarrow{\pi'_{n-1}} & \cdots & \xrightarrow{\pi'_2} & B'_1 & \xrightarrow{\pi'_1} & B'_0.
\end{array}$$

を可換にするような**微分同相**の collection $\varphi_\bullet = \{\varphi_i : B_i \to B'_i\}_{i=0}^n$ が存在することを云う.

例 1.6. 上の例 1.2 で見たように, $B_1 \cong \mathbb{C}P^1$ であり,

$$B_2 \cong \begin{cases} \mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1 & \text{if } c_1(\eta) \equiv 0 \mod 2, \\ \mathbb{C}P^2 \# \overline{\mathbb{C}P^2} & \text{if } c_1(\eta) \not\equiv 0 \mod 2. \end{cases}$$

であった. 実は, 階数 2 の $\mathbb{C}P^1$ 上の複素ベクトル束 η, η' に対して, $\mathbb{C}P^1$-束として

$$P(\eta) \cong P(\eta') \Longleftrightarrow c_1(\eta) \equiv c_1(\eta') \mod 2$$

となる.

2 Bott tower のフィルター付きコホモロジー

$B_\bullet = (\{B_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n)$ を Bott tower とする. 各 fibration $\pi_i : B_i \to B_{i-1}$ は, B_{i-1} 上の 2 つの直線束 ξ, ξ' のホイットニー和の射影化であった. 従って, 次のような大域切断が存在する:

$$\begin{array}{ccccc}
B_{i-1} & \longrightarrow & P(\xi \bigoplus \xi') & = B_i \\
\cup\!\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\!\shortmid & \\
x & \longmapsto & E(\xi)_x & \subset E(\xi \bigoplus \xi'),
\end{array}$$

ここで, ベクトル束 η に対して $E(\eta)$ でその全空間, $E(\eta)_x$ で x 上のファイバーを表す. 特に, 各 fibration π_i の誘導するコホモロジー環の間の準同型 $\pi_i^* : H^*(B_{i-1}) \to H^*(B_i)$ は単射である. この $\pi_i^* : H^*(B_{i-1}) \to H^*(B_i)$ を通じて, $H^*(B_{i-1})$ は $H^*(B_i)$ の部分環と思うことができる.

定義 2.1. Bott tower $B_\bullet = (\{B_i\}_{i=0}^n, \{\pi_i\}_{i=1}^n)$ に対して, フィルター付き次数付き環 $F_\bullet H^*(B_\bullet)$ を

$$F_i H^*(B_\bullet) := \begin{cases} H^*(B_n) & \text{for } n \geq i, \\ \pi_n^* \circ \pi_{n-1}^* \circ \cdots \circ \pi_{j+1}^*(H^*(B_j)) & \text{for } 0 \geq i \geq n-1 \end{cases}$$

と定める. このフィルター付き次数付き環 $F_\bullet H^*(B_\bullet)$ を Bott tower $B_\bullet$ の **フィルター付きコホモロジー**と呼ぶことにする. ここで, コホモロジー環はすべて整係数を考える.

フィルター付きコホモロジーは, Bott tower たちの不変量である. 実際, Bott tower の間の同型写像は, それぞれのフィルター付きコホモロジーの間の同型写像を導くことが容易に確かめられる.

3 主定理とその証明の概略

次が主定理である:

定理 3.1. $B_\bullet$, $B'_\bullet$ を Bott tower とする. それぞれのフィルター付きコホモロジーの間の任意の同型写像 $\Phi_\bullet : F_\bullet H^*(B'_\bullet) \to F_\bullet H^*(B_\bullet)$ に対して, Bott tower の間の同型写像 $\varphi_\bullet : B_\bullet \to B'_\bullet$ であって, $\varphi^*_\bullet = \Phi_\bullet$ となるものが存在する.

特に, Bott tower たちは, それぞれのフィルター付きコホモロジーで分類される.

これを示すために, 定理の特別な場合を考える. B_k を Bott manifold, η, η' を B_k 上の階数 2 の複素ベクトル束であって, 直線束に分解するものとする. このとき, 次の 3 つの補題を得る:

補題 3.2. 任意の B_k 上の直線束 ξ に対して, 束として

$$P(\eta) \cong P(\eta \otimes \xi).$$

補題 3.3. $P(\eta)$ および $P(\eta')$ のコホモロジーが $H^*(B_k)$-algebra として同型であることと, ある直線束 ξ が存在して

$$c(\eta) = c(\eta' \otimes \xi)$$

となることは同値である.

補題 3.4. η と η' が同型であることと, $c(\eta) = c(\eta')$ は同値である.

これらの系として, 次が得られる:

系 3.5. 束として $P(\eta)$ と $P(\eta')$ が同型になることと, それぞれのコホモロジー $H^*(P(\eta))$, $H^*(P(\eta'))$ が $H^*(B_k)$-algebra として同型になることは同値である.

さらに, η にエルミート計量を考えれば, 次が得られる:

補題 3.6. $H^*(P(\eta))$ の $H^*(B_k)$-algebra としての自己同型群は位数 2 であって, 次の束の自己同型から誘導される:

$$\begin{array}{ccc} P(\eta) & \longrightarrow & P(\eta) \\ \Psi & & \Psi \\ \ell & \longmapsto & \ell^{\perp}, \end{array}$$

ここで $\ell^{\perp}$ は ℓ の (与えられたエルミート計量に関する) 直交補空間を表す.

系 3.5 および補題 3.6 より, 次が得られる:

定理 3.7. $H^*(B_k)$-algebra としての任意の同型写像 $\Phi : H^*(P(\eta')) \to H^*(P(\eta))$ に対して, 束の同型写像 $\varphi : P(\eta) \to P(\eta')$ であって, その誘導する準同型 φ^* が Φ と一致するものが存在する.

最後に, 定理 3.7 を高さに関する帰納法に適用すれば, 定理 3.1 を得ることができる.

参考文献

[1] S. Choi, M. Masuda and D. Suh, *Topological classification of Generalized Bott towers*, Trans. Amer. Math. Soc. 362 (2010), 1097–1112.

[2] H. Ishida, *(Filtered) cohomological regidity of Bott towers*, preprint, arXiv:math.AT/1006.4932.