

分散コンピューティングのための 5 手じゃんけんモデルによる リーダー選出アルゴリズムの期待時間計算量の数値計算

南山大学大学院数理情報研究科 須崎政文 (Masabumi Suzaki)
Graduate School of Mathematical Sciences and Information Engineering,
Nanzan University
南山大学情報理工学部 尾崎俊治 (Shunji Osaki)
Faculty of Information Sciences and Engineering,
Nanzan University

1 はじめに

リーダー選出アルゴリズムの目的はある平等な集団の中から効率的にリーダーを選ぶことである。分散アルゴリズムを実行する前にリーダーを選出する必要があるため、リーダー選出アルゴリズムは分散コンピューティングにおいて基本的な問題である。これは、一度この問題が解決すれば多くの問題を解決できることを意味している (see [1]).

近年、分散コンピューティングはコンピュータネットワークにおいて様々な目的のために使われている。(see [1, 2, 3]). 多種多様な分散コンピューティングとその応用が存在するため、異種の状況のために数多くのリーダー選出アルゴリズムが提案されている。Malpani ら [4] はモバイルアドホックネットワークのための TORA [5] と呼ばれるルーティンアルゴリズムを基にした二つの新しいリーダー選出アルゴリズムを示した。Kapron ら [6] は非同期完全情報モデル下のリーダー選出アルゴリズムが準指数時間で解けることを示した。Xu ら [7] は木グラフにおける新しい自動安定匿名リーダー選出アルゴリズムを提案した。Fernández-Zepeda ら [8] は Xu らのアルゴリズムの期待実行時間を示した。谷ら [9] は量子コミュニケーションで接続されたネットワークにおいて多項式時間で解ける量子リーダー選出アルゴリズムを示した。

最もよく知られている古典的なリーダー選出アルゴリズムは決定的アルゴリズムである。ネットワーク内の全てのコンピュータが ID を持っているという仮定で、その ID の中で最大値を持つコンピュータをリーダーに選出するのが古典的なリーダー選出アルゴリズムである。

他方、確率的アルゴリズムのリーダー選出アルゴリズムも提案されている。ネットワークが匿名であるとする、古典的リーダー選出アルゴリズムは適用できない。その中で、最も代表的な確率的リーダー選出アルゴリズムは Prodinger [10] の提案したコイン投げモデルを基にした確率的リーダー選出アルゴリズムである。Fill ら [11] はコイン投げモデルを基にしたリーダー選出アルゴリズムの分布と高次モーメントを求めた。コイン投げモデルを基にしたリーダー選出アルゴリズムの研究は以上の他に [12, 13, 14] のような研究もある。また、Beauquier ら [15] は自動安定確率的リーダー選出アルゴリズムを示した。

日本において、最も有名なリーダー選出プロセスはじゃんけんである。第三者が存在しないとき集団の中から一人選ぶとき、じゃんけんゲームを頻繁におこなう。伊藤ら [16] はこのじゃんけんモデルを基にした確率的

リーダ選出アルゴリズムとその期待時間計算量が $\Theta\left(\left(\frac{3}{2}\right)^N\right)$ であることを示した。我々は [17] において新しい 4 手じゃんけんモデルを示し、その確率的リーダ選出アルゴリズムと期待時間計算量 $\Theta\left(\left(\frac{4}{3}\right)^N\right)$ を示した。

Prodinger のコイン投げモデルを基にしたリーダ選出アルゴリズムはコインの表か裏が勝つかをあらかじめ決める必要がある。しかし、じゃんけんモデルではその必要がない。手の関係によって勝利手は動的に変化するからである。また、じゃんけんモデルでは手を自由に選択できる。これらの点から、じゃんけんモデルは個の自律性があり、コイン投げモデルより自律的である。

しかしながら、伊藤ら [16] と我々 [17] の既存のじゃんけんモデルは数多く存在するリーダ選出アルゴリズムより期待時間計算量という観点から劣っている。我々は [17] においてじゃんけんの手数を十分に増やせば期待時間計算量は e に収束すると予測した。しかし、我々の以前のモデルではじゃんけんの手数を十分に増やすのは困難である。

この論文では、じゃんけんの手数の拡張が容易な新しい 5 手じゃんけんモデルを示す。そして、5 手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムを示す。最後に、数値計算による期待時間計算量を示す。

2 新しいじゃんけんモデル

5 手じゃんけんモデルの前に元のじゃんけんゲームを再考する。元のじゃんけんゲームはグーがチョキに勝ち、チョキがパーに勝ち、パーがグーに勝つというゲームである。また、この 3 手全てが出されるか、1 手のみ出されたときはあいことして再起的にゲームがおこなわれる。

我々は以前の論文 [17] でこのゲームのルールを表 1 のような方法で解釈した。この表で 0 は同等、1 は勝ち、-1 は負けを意味している。ゲームにおいて選択されなかった手を表から消去して、残りの手の値の合計を求めて、合計の多い方が勝利手とするのがこの表の使い方である。例えば、表 2 はグーが選択されなかったときであり、パーとチョキの勝負である。ここでパーの合計は -1 であり、チョキが 1 であることからチョキの勝ちである。同じように他の場合も元のじゃんけんゲームのルールと合致する。

表 1 表を使った解釈方法

	グー	パー	チョキ	合計
グー	0	-1	1	0
パー	1	0	-1	0
チョキ	-1	1	0	0

表 2 グーが選択されなかったとき

	パー	チョキ	合計
パー	0	-1	-1
チョキ	1	0	1

この表を使った解釈方法は一見して理解しやすい。しかし、この解釈方法を 5 手以上に拡張するには難し

い。このまま拡張すると勝利手を決める際に困難が生じるからである。すなわち、この解釈方法では手数が多くなったとき、勝利手が複数になってしまうことがある。勝利手が複数になるということはそれだけリーダーの選出が遅くなるということであり、望ましくない。勝利手は常に1手であることが高速なリーダー選出のために望ましいのである。

そこで新しく考えたのが表3のような解釈方法である。以前のモデルと異なり、この表では 2^1 は同等、 2^2 は勝ち、 2^0 は負けを意味している。この方法だと勝利手は常に1手になる。また、2のべき乗はコンピュータと相性が良いため、効率的である。

表3 新しい解釈方法

	グー	パー	チョキ	合計
グー	2^1	2^0	2^2	7
パー	2^2	2^1	2^0	7
チョキ	2^0	2^2	2^1	7

3 5手じゃんけんモデルとそのリーダー選出アルゴリズム

3.1 5手じゃんけんモデル

前節で求めた新しいじゃんけんモデルを拡張して、5手じゃんけんモデルを表4のように作る。ここで H_1, \dots, H_5 は手の名前である。この表では 2^2 は同等、 2^3 は勝ち、 2^4 はより強い勝ち、 2^1 は負け、 2^0 はより弱い負けを意味している。3手のときと同様に、ゲームにおいて選択されなかった手を表から消去して、残りの手の値の合計を求めて、合計の多い手を勝利手とするのがこの表の使い方である。例えば、表5は H_3 が選択されなかったときであり、残りの H_1, H_2, H_4, H_5 の勝負である。ここで H_1 の合計は29であり、最大値であることから H_1 が勝利手である。

表4 5手じゃんけんモデル

	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	合計
H_1	2^2	2^1	2^0	2^4	2^3	31
H_2	2^3	2^2	2^1	2^0	2^4	31
H_3	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	31
H_4	2^0	2^4	2^3	2^2	2^1	31
H_5	2^1	2^0	2^4	2^3	2^2	31

3.2 5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズム

5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズムを考えるにあたり本論文では、以下のような状況を仮定する：

- あるコンピュータ集団の中からリーダーを選出する。その際、第三者（集中的管理機構）は選出に介入し

表5 H_3 が選択されないとき、最大値は H_1 となる.

	H_1	H_2	H_4	H_5	合計
H_1	2^2	2^1	2^4	2^3	30
H_2	2^3	2^2	2^0	2^4	29
H_4	2^0	2^4	2^2	2^1	23
H_5	2^1	2^0	2^3	2^2	15

ない.

- 個々のコンピュータはリーダーに選出される権利を等しく持っている (選出確率は等しい). すなわち, コンピュータの処理能力等はリーダー選出に影響を及ぼさない.
- 各コンピュータはネットワーク内の全てのコンピュータと直接相互に通信できる (完全グラフ).
- ネットワーク内の通信は同期している (同期ネットワーク).
- 個々のコンピュータは自由に手を選ぶことができる (個の自律).
- 各コンピュータは ID のような個々を特定できるものを持たず, 匿名である (匿名ネットワーク).

すなわち, 匿名自律分散ネットワークである. じゃんけんモデルの特徴は, 匿名自律分散ネットワークのような条件の厳しいネットワークでもリーダー選出が行えることである. しかし本論文では, アルゴリズムの期待時間計算量を求めるため, 個々のコンピュータがある手を選ぶ確率は各手を等しく $1/5$ とする.

5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズムは以下の通りである:

- 参加者 N 人は5手の中からランダムに1手を選ぶ.
- (あいこ) 5手全てが選択されるか, 1手のみ選択されたときはあいこである. このとき参加者は再帰的にもう一度5手の中からランダムに1手を選ぶ.
- (分割) ある1手がだれにも選ばれなかったとき, その手は表から削除される. そして残った手の合計を計算する. その中で最大値の手を選んだ参加者は残り, それ以外の参加者は除外される. 残った参加者は再帰的にもう一度5手の中からランダムに1手を選ぶ.
- ある1人の参加者のみが残ったとき, その者がリーダーとなる.

3.3 5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズムの期待時間計算量

H_N^5 を5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズムが終わるまでのじゃんけんの回数とする. 5手じゃんけんモデルのリーダー選出アルゴリズムの期待時間計算量は

$$E[H_N^5] = \frac{1}{5} \frac{5^N}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} + \frac{2 \sum_{m=1}^{N-1} \binom{N}{m} E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} + \frac{2 \sum_{m=1}^{N-2} \binom{N}{m} (2^{N-m} - 2) E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} + \frac{\sum_{m=1}^{N-3} \binom{N}{m} (3^{N-m} - 3 \times 2^{N-m} + 3) E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} \quad (1)$$

となる. ここで, $E[H_0^5] = 0, E[H_1^5] = 0$ である.

(証明)

期待時間計算量は条件付き期待値を用いると

$$\begin{aligned}
 E[H_N^5] &= E[H_N^5|\text{Even}]P(\text{Even}) + \sum_{m=1}^{N-1} E[H_N^5|2 \text{ hand}]P(2 \text{ hand}) \\
 &+ \sum_{m=1}^{N-2} \sum_{k=1}^{N-m-1} E[H_N^5|3 \text{ hand}]P(3 \text{ hand}) + \sum_{m=1}^{N-3} \sum_{k=1}^{N-m-2} \sum_{j=1}^{N-m-k-1} E[H_N^5|4 \text{ hand}]P(4 \text{ hand})
 \end{aligned} \tag{2}$$

となる。ここで、条件付き期待値は

$$E[H_N^5|\text{Even}] = 1 + E[H_N^5], \tag{3}$$

$$E[H_N^5|2 \text{ hand}] = 1 + E[H_m^5], \tag{4}$$

$$E[H_N^5|3 \text{ hand}] = 1 + E[H_m^5], \tag{5}$$

$$E[H_N^5|4 \text{ hand}] = 1 + E[H_m^5] \tag{6}$$

となる。また確率は

$$P(\text{Even}) = \frac{5^N - 5 \times 4^N + 10 \times 3^N - 10 \times 2^N + 10}{5^N}, \tag{7}$$

$$P(2 \text{ hand}) = \binom{5}{2} \binom{N}{m} \frac{1}{5^N}, \tag{8}$$

$$P(3 \text{ hand}) = \binom{5}{3} \binom{N}{m} \binom{N-m}{k} \frac{1}{5^N}, \tag{9}$$

$$P(4 \text{ hand}) = \binom{5}{4} \binom{N}{m} \binom{N-m}{k} \binom{N-m-k}{j} \frac{1}{5^N} \tag{10}$$

となる。

これらの条件付き期待値を元の式に代入すると

$$\begin{aligned}
 E[H_N^5] &= \frac{1}{5} \frac{5^N}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} + \frac{2 \sum_{m=1}^{N-1} \binom{N}{m} E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} \\
 &+ \frac{2 \sum_{m=1}^{N-2} \binom{N}{m} (2^{N-m} - 2) E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2} + \frac{\sum_{m=1}^{N-3} \binom{N}{m} (3^{N-m} - 3 \times 2^{N-m} + 3) E[H_m^5]}{4^N - 2 \times 3^N + 2 \times 2^N - 2}
 \end{aligned} \tag{11}$$

となる。□

3.4 数値計算

前小節で求めた期待時間計算量は漸化式であり、閉じた式の形ではない。そこで数値計算により新しい5手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムの期待時間計算量が伊藤ら [16] や我々 [17] の既存のじゃんけんモデルより減少していること確かめる。

H_N^3 を3手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムが終わるまでのじゃんけんの回数とする。伊藤ら [16] の3手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムの期待時間計算量は

$$E[H_N^3] = \frac{1}{3} \frac{3^N}{2^N - 2} + \frac{1}{2^N - 2} \sum_{m=1}^{N-1} \binom{N}{m} E[H_m^3] \tag{12}$$

である。ここで、 $E[H_0^3] = 0$, $E[H_1^3] = 0$ である。

表6 参加者数 $N = 2, 3, \dots, 20$ の3手じゃんけんモデル, 4手じゃんけんモデルと5手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムの期待時間計算量の数値計算.

N	3手じゃんけんモデル	4手じゃんけんモデル	5手じゃんけんモデル
2	1.5	2.0	1.25
3	2.25	1.83	1.35
4	3.21	2.15	1.46
5	4.49	2.57	1.62
6	6.22	3.06	1.83
7	8.65	3.66	2.09
8	12.10	4.40	2.39
9	17.10	5.35	2.75
10	24.34	6.58	3.18
11	34.98	8.17	3.70
12	50.63	10.27	4.33
13	73.74	13.04	5.11
14	108.0	16.69	6.06
15	158.9	21.52	7.24
16	234.6	27.93	8.71
17	347.4	36.43	10.53
18	515.7	47.71	12.80
19	767.1	62.72	15.62
20	1143	82.67	19.14

H_N^4 を4手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムが終わるまでのじゃんけんの回数とする. 我々 [17] の4手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムの期待時間計算量は

$$E[H_N^4] = \frac{1}{4} \frac{4^N}{3^N - 2 \times 2^N + 1} + \frac{\sum_{m=2}^{N-1} \binom{N}{m} E[H_m^4]}{3^N - 2 \times 2^N + 1} + \frac{\sum_{i=2}^{N-2} \binom{N}{i} (2^{N-i} - 2) E[H_m^4]}{3^N - 2 \times 2^N + 1} \quad (13)$$

である. ここで, $E[H_0^4] = 0, E[H_1^4] = 0$ である.

表3.4は $N = 2, 3, \dots, 20$ の3手じゃんけんモデル, 4手じゃんけんモデルと5手じゃんけんモデルのリーダ選出アルゴリズムの期待時間計算量の数値計算である.

5手じゃんけんモデルが全ての参加者数で最小であることが分かった. 既存のじゃんけんモデルより減少していることが確かめられた.

4 おわりに

本論文では, 最初に新しい表を使ったじゃんけんの解釈方法を考え, そしてその解釈方法を拡張して5手じゃんけんモデルを定義し, そのリーダ選出アルゴリズムを示し, 最後に期待時間計算量の数値計算によりその有用性を確かめた. 本論文では期待時間計算量の漸近解を求めていない. この期待時間計算量の漸近解を求

めることが今後の課題である。

じゃんけんモデルの特徴は、匿名自律分散ネットワークのような条件の厳しいネットワークでもリーダー選出が行えることである。この研究をさらに発展させ、他の既存のモデルと肩を並べられるじゃんけんモデルを提示したい。

参考文献

- [1] N.A. Lynch, *Distributed Algorithms*, The Morgan Kaufmann Series in Data Management Systems, Morgan Kaufmann, San Francisco, 1996.
- [2] J. Gray, “Distributed computing economics,” *Queue*, 6(3), pp. 63-68, 2008.
- [3] K. Nadiminti, M.D. de Assuncao, and R. Buyya, “Distributed systems and recent innovations: challenges and benefits,” *InfoNet Magazine*, 16(3).
- [4] N. Malpani, J. Welch and N. Vaidya, “Leader election algorithms for mobile ad hoc networks,” *Proceedings of the 4th international workshop on Discrete algorithms and methods for mobile computing and communications*, pp. 96–103, 2000.
- [5] V.D. Park and M. Scott Corson, A Highly Adaptive Distributed Routing Algorithm for Mobile Wireless Networks, *Proc. IEEE INFOCOM*, 7-11, 1997.
- [6] B. Kapron, D. Kempe, V. King, J. Saia and V. Sanwalani, “Fast asynchronous byzantine agreement and leader election with full information,” *Proceedings of the nineteenth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 1038–1047, 2008.
- [7] Z. Xu and P.K. Srimani, “Self-stabilizing anonymous leader election in a tree,” *International Journal of Foundations of Computer Science*, 17(2), pp. 323–335, 2006.
- [8] J.A. Fernández-Zepeda and J.P. Alvarado-Magaña, “Analysis of the average execution time for a self-stabilizing leader election algorithm,” *International Journal of Foundations of Computer Science*, 19(6), pp. 1387-1402, 2008.
- [9] S. Tani, H. Kobayashi, and K. Matsumoto, “Exact quantum algorithms for the leader election problem,” *Proceedings of the 22nd Annual Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS 2005)*, *Lecture Notes in Computer Science 3404*, pp.581-592, 2005.
- [10] H. Prodinger, “How to select a loser,” *Discrete Mathematics*, 120(1-3), pp. 149–159, 1993.
- [11] J.A. Fill, H.M. Mahmoud and W. Szpankowski, “On the distribution for the duration of a randomized leader election algorithm,” *The Annals of Applied Probability*, 6(4), pp. 1260–1283, 1996.
- [12] C. Lavault and G. Louchard, “Asymptotic analysis of a leader election algorithm,” *Theoretical Computer Science*, 359(1-3), pp.239–254, 2006.
- [13] S. Janson, C. Lavault and G. Louchard, “Convergence of some leader election algorithms,” *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.*, 10(3), pp. 171–196, 2008.
- [14] G. Louchard and H. Prodinger, “The asymmetric leader election algorithm: another approach,” *Annals of Combinatorics*, 12(4), pp. 449–478, 2009.
- [15] J. Beauquier, M. Gradinariu and C. Johnen, “Randomized self-stabilizing and space optimal leader election under arbitrary scheduler on rings,” *Distributed Computing*, 20(1), pp. 75–93, 2007.
- [16] A. Ito, K. Inoue, Y. Wang and T. Okazaki, “Complexity of Janken,” *IEICE transactions on Infor-*

mation and Systems (Japanese Edition), J86D(7), pp. 452–457, 2003.

- [17] M. Suzaki and S. Osaki, “A leader election algorithm by a 4-hands Rock-Paper-Scissors type model: Probabilistic analysis and asymptotic behavior,” *IEICE Transactions on Fundamentals of Electronics, Communications and Computer Sciences (Japanese Edition)*, J92A(8), pp. 571–575, 2009.