

マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた稀少事象の評価に関する一考察

広島大学大学院工学研究科 山名 健太, 岡村 寛之, 土肥 正
Kenta Yamana, Hiroyuki Okamura and Tadashi Dohi
Graduate School of Engineering
Hiroshima University, Japan

1 はじめに

多くの要因が確率的に関係する現象を表現するため, マルコフ連鎖を用いた数多くのモデル化 [1] が行われており, それによって対象とするモデルの性能評価指標の算出が可能となる. 倒産のリスク管理やシステムの信頼性の分野において非常に稀にしか起こらない事象 (稀少事象) に起因した性能・評価値をいかにして求めるかが重要な問題となっている.

中小規模のマルコフ連鎖の評価値は行列演算による解析を通じて体系的に行うことが可能である. しかし, 現実的なシステムをモデル化した大規模・多状態のマルコフ連鎖は解析的に扱うことが困難である. その場合は, モンテカルロシミュレーション (Monte Carlo simulation: MC) [3] による評価値の算出が有効となる.

MC は, 擬似乱数列を用いて対象とするシステムを記述した確率モデルから標本を生成し, 所望の評価値を推定する方法である. MC の利点としては, 複雑な確率モデルに対しても容易に適用可能であることが挙げられる. しかし, そのような利点を持つ一方で, 高い精度で評価値の算出をするために多くの標本と計算時間が必要であるという欠点を持つ. 特に, 生起確率が 10^{-10} 程度の稀少事象に起因した評価値を MC により算出するためには多くの標本と計算時間が必要となる.

稀少事象を効率的に推定する方法として重点サンプリング (Importance Sampling: IS) [5] が広く知られている. IS は, 対象とするモデルの確率分布を測度変換することで本来稀にしか発生しない事象が頻繁に起こるような確率分布 (シミュレーション分布) を用いてシミュレーションを実行し, 得られた結果を測度変換前後の分布間の重みを用い補正することで推定値を求める手法である. IS を実行する際, いかにして効率的なシミュレーション分布を生成するかが問題であり, 現在までに, スケーリング法, 平行移動法, 動的測度変換法 [8] といった様々な方法が開発されている. マルコフ連鎖における IS では, 元のマルコフ連鎖に指数測度変換を適用することで生成される Twisted Markov Chain [6] と呼ばれるものがある. 重点サンプリングは稀少確率を推定する手法として有効であるが, 対象とするモデルに応じて効率的なシミュレーション分布を解析的に導出する必要がある. この際, モデルによっては, 解析的に効率的なシミュレーション分布を導出できない場合がある.

本稿ではマルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte-Carlo: MCMC) [2] に着目した稀少事象の評価方法について議論する. MCMC はギブスサンプリング, メトロポリス-ヘイスティングス法 (Metropolis-Hastings: M-H) などの多変量かつ正規化定数が不明な確率分布から標本抽出する手法の総称である. MCMC は稀少事象の評価方法としても利用されており [7], 本稿では, IS と異なり, 解析的な取り扱いを必要とせず IS が適用できないようなモデルに対しても適用可能な, MCMC による稀少事象評価シミュレーション技法を提案する. また, 提案手法の性能を測るため, 単純な離散時間離散状態マルコフ連鎖に提案手法を適用し, MC との比較を行う.

2 報酬を伴うマルコフ連鎖

マルコフ連鎖は時間および状態空間で定義される確率過程であり, 将来の振る舞いが現在のみに依存する性質 (マルコフ性) をもつ.

状態空間 S 上で離散時刻列 $\{j = 0, 1, \dots, \tau\}$ に対するマルコフ過程 X_0, \dots, X_τ について考える. いま, $X_j, j = 0, 1, \dots, \tau$ の標本路を $x_j, j = 0, 1, \dots, \tau$ とし, 確率過程における状態 x_j から状態 x_{j+1} へ推移した時の推移確率 (密度) 関数を $p(x_j, x_{j+1})$ と定義する. このとき, 標本経路 $x = \{x_0, x_1, \dots, x_\tau\}$ に対する尤度は

$$p(x) = \pi(x_0)p(x_0, x_1)p(x_1, x_2) \cdots p(x_{\tau-1}, x_\tau) \quad (1)$$

として表現する. ここで, $\pi(x_0)$ は初期状態を決定する確率 (密度) 関数である.

次に、マルコフ連鎖で定義される報酬過程について考える。状態 x_j に滞在することで得られる報酬関数を $\xi(x_j)$ とするとき、標本経路 $\mathbf{x} = \{x_0, x_1, \dots, x_\tau\}$ に対する累積報酬は

$$\Xi(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{\tau} \xi(x_j) \quad (2)$$

と表現することができる。本稿では期待累積報酬

$$E[\Xi(\mathbf{x})] = \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \quad (3)$$

をシミュレーションによって推定することを考える。

MCにより $E[\Xi(\mathbf{x})]$ を推定する場合、擬似乱数により生成された N 個の標本経路 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N$ を用いて、累積報酬の標本平均

$$E_{MC}[\Xi(\mathbf{x})] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \Xi(\mathbf{x}^n) \quad (4)$$

を計算すればよい。

MCで稀少事象に起因する評価値を求める場合、所望の標本経路の生起確率が 10^{-10} 程度であるためほとんど標本抽出されない。このため、実際のシミュレーションではそれらの標本を得るために多くの標本と計算時間が必要となる。

3 マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた離散時間マルコフ連鎖シミュレーション

マルコフ連鎖モンテカルロ法 (Markov Chain Monte-Carlo: MCMC) とは多変量かつ正規化定数が不明な確率分布から標本抽出する手法である。MCMCは、マルコフ連鎖のある状態から状態遷移を十分繰り返した後の状態が定常分布に従う性質を利用し、定常分布を標本を生成したい確率分布と見立てることで標本抽出を可能としている。具体的な標本の生成手法にはギブスサンプリング、メトロポリス-ヘイスティングス法 (Metropolis-Hastings, M-H) がある。本稿では M-H 法を利用する。M-H 法は確率的な手順で「候補」を作り、「候補」を採用するか否かを確率的に決定する 2 段階の手続きで標本抽出を行う。

正規化定数 Z が不明な確率分布

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{Z} = \frac{\Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})}{\sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})} \quad (5)$$

からの標本抽出を考える。いま、 $p(\mathbf{x})$ からの一つの標本 \mathbf{x} が与えられたとき (ただし、 $\Xi(\mathbf{x}) \neq 0$ を満たす)、提案分布と呼ばれる確率分布 $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ を用いて候補 \mathbf{x}' を生成する。ここで、 $g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ は、状態 \mathbf{x} である時に状態 \mathbf{x}' が候補として選ばれる確率を意味している。次に、候補 \mathbf{x} を以下の確率で採択するかを決定する。

$$\alpha = \min\left\{\frac{\Xi(\mathbf{x}')p(\mathbf{x}')g(\mathbf{x}', \mathbf{x})}{\Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})g(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}, 1\right\}. \quad (6)$$

採択ならば \mathbf{x} を候補 \mathbf{x}' に置き換え、そうでなければ候補 \mathbf{x}' を棄却し、標本 \mathbf{x} を変化させない。このような手続きを I 回繰り返し得られた標本 \mathbf{x} を確率分布 $P(\mathbf{x})$ からの標本とみなす。

4 MCMC を用いたマルコフ連鎖シミュレーション

4.1 MC と MCMC における評価値の計算方法の違い

MCMC を用いた期待累積報酬 $E[\Xi(\mathbf{x})]$ の算出について考える。いま、式 (3) の期待累積報酬 $E[\Xi(\mathbf{x})]$ と式 (5) の正規化定数 $Z = \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ は同じであることが分かる。このことから、期待累積報酬を求めることは正規化定数 Z を求めることと同義であるといえる。

ここで、MCMC を用いて正規化定数 (つまり、期待累積報酬) を計算する際の注意点について指摘する。MCMC は、式 (6) から分かるように、確率関数 $\Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ の値が大きくなるような標本 \mathbf{x} が多く生成

されるという特徴がある。このため、MCMC で生成される標本を用いて式 (3) を計算した場合、標本数を増やしても期待累積報酬の推定値が理論値に対して収束しない。したがって、MCMC で生成された標本を用いて期待累積報酬を計算するには、特別な計算手順が必要であるが、本稿では参考文献 [2] で紹介されている計算手法を参考に期待累積報酬を求める。

適当なパラメータ θ ($\theta_0 \leq \theta \leq \theta_*$) を持つ確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)$ を用意する。ただし、 $\Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)$ は θ_* のとき、 $\Xi(\mathbf{x}|\theta_*)p(\mathbf{x}|\theta_*) = \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ を満たすことに注意する。 $\sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)$ の対数をとったものを

$$\Phi(\theta) = \log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta) \quad (7)$$

とおき、 $\Phi(\theta)$ を微分したものを

$$\phi(\theta) = \frac{d}{d\theta} \Phi(\theta) \quad (8)$$

とする。このとき、式 (8) を θ で積分したものは以下のように表現できる。

$$\begin{aligned} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \phi(\theta) d\theta &= \Phi(\theta_*) - \Phi(\theta_0) \\ &= \log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta_*)p(\mathbf{x}|\theta_*) \\ &\quad - \log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta_0)p(\mathbf{x}|\theta_0). \end{aligned} \quad (9)$$

これより、式 (9) から、シミュレーションで求めるべき期待累積報酬は

$$\begin{aligned} &\log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x}) \\ &= \log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta_*)p(\mathbf{x}|\theta_*) \\ &= \log \sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta_0)p(\mathbf{x}|\theta_0) + \int_{\theta_0}^{\theta_*} \phi(\theta) d\theta \end{aligned} \quad (10)$$

と表現できることが分かる。

式 (10) の計算について考える。式 (10) の右辺第一項は $p(\mathbf{x}|\theta_0)$ から得られた標本 \mathbf{x} を用いて MC を実行し、期待値 $E[\Xi(\mathbf{x}|\theta_0)]$ の対数を計算すればよい。次に、式 (10) の右辺第二項について考える。参考文献 [2] を元に、 $\phi(\theta)$ は

$$\begin{aligned} w_{\theta}(\mathbf{x}) &= \frac{d \log \Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)}{d\theta} \\ &= \frac{1}{p(\mathbf{x}|\theta)} \frac{d}{d\theta} p(\mathbf{x}|\theta) + \frac{1}{\Xi(\mathbf{x}|\theta)} \frac{d}{d\theta} \Xi(\mathbf{x}|\theta), \end{aligned} \quad (11)$$

$$Q(\mathbf{x}|\theta) = \frac{\Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)}{\sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)} \quad (12)$$

とおくとき、以下のように表現できる。

$$\phi(\theta) = \sum_{\mathbf{x}} w_{\theta}(\mathbf{x}) Q(\mathbf{x}|\theta). \quad (13)$$

式 (13) から、 $\phi(\theta)$ を求めるためには確率分布 $Q(\mathbf{x}|\theta)$ から得られた N 個の標本 $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$ を用いて以下を計算すればよい。

$$E[\phi(\theta)] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_{\theta}(\mathbf{x}^n). \quad (14)$$

先ほど、式 (14) の計算で用いる標本 \mathbf{x} は確率分布 $Q(\mathbf{x}|\theta)$ から生成すると述べたが、確率分布 $Q(\mathbf{x}|\theta)$ の正規化定数 (式 (12) の右辺の分母 $\sum_{\mathbf{x}} \Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)$) は未知であることから、2 節で説明した MCMC を用いて標本を生成すればよい。

以上で、式 (10) の期待累積報酬の計算方法について説明した。実際のシミュレーションにおいて、式 (10) の右辺第二項の積分計算を、無限個の θ の値で計算するわけにはいかない。そのため、台形公式などで離散化し、必要な分点により積分計算をする。なお、本稿では、ルジャンドル数値積分を用いて分点を決定し、積分計算している。一般に、分点の数が多いほど積分計算の精度は高くなるが、多くの計算時間が必要になる。そのため、実際のシミュレーションでは、積分点の数は計算時間を考慮し決定する必要がある。次節の数値例では、積分点の数を変化させた時の推定値の精度と計算時間について示し、積分点と計算時間の関係について考察する。

4.2 MCMC を用いた DTMC における稀少事象の評価

稀少事象に起因する評価値を求める場合、前節で述べた MCMC の手続きでは標本を生成することが困難である。その理由としては、報酬が得られる標本経路の生成確率が極めて小さいため、(生成される候補の累積報酬のほとんどが $\Xi(\mathbf{x}) = 0$ となることから) 確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta) = 0$ となる場合が多く、標本 \mathbf{x} がほとんど変化しないからである。

上記の問題を解決するために、本稿では確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta)p(\mathbf{x}|\theta)$ に、最初は報酬が得えられる標本経路が生成しやすく、徐々に本来の確率関数に近づくような確率関数を導入する。つまり、確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta_0)p(\mathbf{x}|\theta_0)$ のときは報酬が得やすく、 $k = 1, 2, \dots$ と K に近づくにつれて徐々に本来の確率関数に近づき、 $k = K$ のときに確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta_k)p(\mathbf{x}|\theta_k) = \Xi(\mathbf{x})p(\mathbf{x})$ となるような関数である。

具体的に説明すると、 \tilde{P} を DTMC の元の推移確率行列とし、 P' を推移確率行列が 0 でない要素に任意の確率を割り当てた行列とする。また、 $\tilde{\Xi}$ を DTMC の本来の報酬行列、 Ξ' をすべての状態に任意に報酬を与えた行列とする。ここで、 P' と Ξ' の例として、 P' は推移確率行列の 0 でない要素に均等に確率を与えたもの、 Ξ' はどんな状態に滞在しても報酬が得られるものにとすると報酬が得られる標本経路が生成されやすくなる。これらの行列から新たな推移確率行列として

$$P(\theta_k) = \theta_k \tilde{P} + (1 - \theta_k) P', \quad 0 \leq \theta_k \leq 1 \quad (15)$$

を作る。ただし、 $\theta_0 = 0, \theta_K = 1$ とし、 $P(\theta_0) = P', P(\theta_K) = \tilde{P}$ であることに注意する。いま、推移確率行列が $P(\theta_k)$ であるとき、時刻 j から $j+1$ において状態 x_j から状態 x_{j+1} へ推移した時の推移確率を $p(x_j, x_{j+1}|\theta_k)$ とする。このとき、標本経路 \mathbf{x} に対する尤度は以下である。

$$p(\mathbf{x}|\theta) = \pi(x_0|\theta_k)p(x_0, x_1|\theta_k) \cdots p(x_{\tau-1}, x_\tau|\theta_k). \quad (16)$$

ここで、 $\pi(x_0|\theta_k)$ は、初期状態を決定する確率 (初期確率) であり、推移確率行列 $P(\theta_k)$ と同様に、元の初期確率 $\pi(x_0)$ と新たな初期確率 $\pi'(x_0)$ により作られる。報酬関数 についても新たな報酬行列

$$\Xi(\theta_k) = \theta_k \tilde{\Xi} + (1 - \theta_k) \Xi' \quad (17)$$

を作る。ただし、 $\theta_0 = 0, \theta_K = 1$ とし $\Xi(\theta_0) = \Xi', \Xi(\theta_K) = \tilde{\Xi}$ であることに注意する。報酬行列が $\Xi(\theta_k)$ であるとき、状態 x に滞在することで得られる報酬を $\xi(x|\theta_k)$ とする。このとき、標本経路 \mathbf{x} に対する累積報酬は

$$\Xi(\mathbf{x}|\theta_k) = \xi(x_1|\theta_k) + \xi(x_2|\theta_k) + \cdots + \xi(x_\tau|\theta_k) \quad (18)$$

となる。上記で得られた新たな推移確率行列と報酬行列により確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta_k)p(\mathbf{x}|\theta_k)$ を生成し、MCMC を実行する。期待累積報酬 $E[\Xi(\mathbf{x})]$ を求めるシミュレーションでは、式 (14) の計算で用いる標本経路 \mathbf{x} を生成する際に、上記で提案した確率関数 $\Xi(\mathbf{x}|\theta_k)p(\mathbf{x}|\theta_k)$ により MCMC を実行する。MCMC により得られた N 本の標本経路 $\mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^N$ を用いて

$$\begin{aligned} E[\phi(\theta_k)] &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N w_{\theta_k}(\mathbf{x}^n) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left\{ \frac{\tilde{\pi}(x_0) - \pi'(x_0)}{\pi(x_0)} \sum_{j=0}^{\tau-1} \frac{p(x_j^n, x_{j+1}^n) - p'(x_j^n, x_{j+1}^n)}{p(x_j^n, x_{j+1}^n|\theta_k)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sum_{j=1}^{\tau} \xi(x_j^n) - \xi'(x_j^n)}{\Xi(\mathbf{x}^n|\theta_k)} \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

を計算すればよい。

5 数値例

簡単な DTMC に対して提案手法と MC でシミュレーションを実行し、それぞれの推定値の理論値に対する相対誤差、分散、計算時間を比較することで提案手法の有効性について検証する。今回対象とする DTMC は、状態 $S = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ 、報酬行列を

$$\bar{\mathbf{R}} = \{0, 0, \dots, 1\} \quad (20)$$

とし、推移確率行列を

$$\tilde{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 & 0.0 & \dots & \dots & \dots & 0.0 \\ 0.9 & 0.0 & 0.1 & \ddots & & & \vdots \\ 0.0 & 0.9 & 0.0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0.9 & 0.1 & 0.0 \\ \vdots & & & \ddots & 0.9 & 0.0 & 0.1 \\ 0.0 & \dots & \dots & \dots & 0.0 & 0.9 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (21)$$

とする。初期確率 $\pi(0) = 1.0$ 、ステップ $j \in [0, 15]$ において状態推移を繰り返し得られる期待累積報酬 $E[R]$ を算出する。ここで、式 (10) の右辺の第二項は数値積分により算出する必要がある。本稿では、一般的に高速かつ高精度で数値積分の計算が可能なガウス-ルジャンドル数値積分を用いて計算する。シミュレーションで使用する擬似乱数は、Matsumoto and Nishimura [4] が開発したメルセンヌ・ツイスター (Mersenne twister) を用いる。また、1 回のシミュレーションでは、 N 本の標本経路 $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2, \dots, \mathbf{x}^N$ を生成し、累積報酬の算術平均を計算する。それを M セット繰り返して得られた M 個の累積報酬をもとに期待累積報酬を計算する。

提案手法を用いたシミュレーションの設定は、セット数 $M = 10$ とし、積分点の個数 $D = 30$ 点、300 点、M-H 法の反復回数 $I = 100, 1000, 10000$ 、標本数 $N = 100, 500, 1000$ と様々な値を試すことで、推定値の精度がどのように変化するかを考察する。また、 \mathbf{P}' は推移確率が 0 でない要素にそれぞれ均等に確率を割り当てたものとし、 $\bar{\mathbf{R}}'$ に関しては $\bar{\mathbf{R}}$ と同様の行列を用いた。MC については、セット数 $M = 1.0E+7$ 、標本数 $N = 1000$ として推定値を算出した。また、今回の期待累積報酬 $E[R]$ の理論値は $1.18E-8$ であり、この値に近いほど精度の高い推定値であることを示している。

MC と提案手法の推定値の精度について考察する。MC の推定値の相対誤差と、提案手法の $N=1000$ の場合の推定値の相対誤差を比較すると、表 2 の場合を除いて、MC よりも相対誤差が小さいことが分かる。更に、表 3 から表 7 のうち MC よりも分散の値が小さく、計算時間が短いものは表 3, 5, 6 である。このことから、全体的に提案手法は MC よりも理論値に対する収束が速く、高い精度の推定値が得られるといえるが、シミュレーションの設定によっては計算時間で MC より劣る場合があるといえる。提案手法で、積分点の個数 D を変化した場合の推定値の精度と計算時間の変化について考察する。積分点の個数を $D=30$ から $D=300$ に変化した場合、全体的に相対誤差が小さくなっていることがわかる。また、計算時間は D の変化に比例して大体 10 倍程度多く必要になっている。次に、M-H 法の反復回数 I を変化した場合について考察すると、 $I=100, 1000, 10000$ と変化させると全体的に相対誤差が小さくなっており、計算時間も大体 I の変化に比例している。最後に、標本数 N については、 $N = 100, 500, 1000$ と変化させると相対誤差が小さくなり、標本数が 10 倍で精度が一桁上がっていることが分かる。計算時間は、積分点、M-H の反復回数と同様に、標本数の変化に大まかに比例している。以上のことから、積分点、M-H の反復回数、標本数を増加させると全体的に相対誤差が小さくなるが、計算時間が増加率に比例して大きくなってしまふといえる。

6 まとめと今後の課題

本稿では、マルコフ連鎖モンテカルロ法を用いた稀少事象の評価手法について提案した。数値例では、簡単な DTMC に対して適用し、MC と推定値の理論値に対する相対誤差、分散、計算時間を算出し、提案手法の有効性を示した。今回は比較対象として MC のみであったが、今後は重点サンプリングとの比較を通じて提案手法の有効性を検証していく。また、評価値が解析的に求まらないモデルに対して提案手法を適用し性能を検証していく。

参考文献

- [1] 尾崎 俊治, 「確率モデル入門」, 朝倉書店 (1996).
- [2] 伊庭 幸人, 種村 正美, 大森 裕浩, 和合 肇, 佐藤 整尚, 高橋 明彦, 「計算機統計 2 マルコフ連鎖モンテカルロ法とその周辺」, 岩波書店 (2005).
- [3] P. L'Ecuyer and A.B. Owen, Monte Carlo and Quasi Method 2008, Springer(2009.)
- [4] M. Matsumoto and T. Nishimura, "Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator," *ACM Transactions on Mathematical Software*, **8**, 3-30(1998).
- [5] R.Y. Rubinstein, Simulation and the Monte Carlo method, John Wiley and Sons(1981).
- [6] J.A. Bucklew, Large Deviation Techniques in Decision, Simulation, and Estimation, John Wiley and Sons(1990).
- [7] J.A. Bucklew, Introduction to Rare Event Simulation, Springer(2004).
- [8] P. Heidelberger, "Fast simulation of rare events in queueing and reliability models," *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol.5, pp.43-85(1995).

表 1: MC により算出した推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
1000	1.03E-08	-0.127	1.25E-11	3937

表 2: 提案手法の $D=30, I=100$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	1.06E-08	-0.101	1.65E-16	4
500	7.66E-09	-0.351	5.74E-17	19
1000	7.42E-09	-0.371	5.20E-17	39

表 3: 提案手法の $D=30, I=1000$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	9.79E-09	-0.170	1.34E-16	37
500	1.12E-08	-0.049	1.24E-16	185
1000	1.10E-08	-0.072	1.14E-16	377

表 4: 提案手法の $D=30, I=10000$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	3.10E-08	1.630	3.96E-15	465
500	1.16E-08	-0.015	1.26E-16	3031
1000	1.20E-08	0.019	1.31E-16	5845

表 5: 提案手法の $D=300, I=100$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	3.04E-08	1.580	3.80E-15	38
500	1.14E-08	-0.032	1.26E-16	190
1000	1.13E-08	-0.042	1.18E-16	377

表 6: 提案手法の $D=300, I=1000$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	1.35E-08	0.142	2.99E-16	370
500	1.03E-08	-0.125	1.06E-16	2126
1000	1.12E-08	-0.052	1.17E-16	3700

表 7: 提案手法の $D=300, I=10000$ における推定量の平均, 相対誤差, 分散, 計算時間.

標本	平均	相対誤差	分散	計算時間
100	1.41E-08	0.194	3.08E-16	3850
500	1.17E-08	-0.008	1.50E-16	19388
1000	1.19E-08	0.011	1.34E-16	39559