

長寿リスクと個人終身年金

法政大学・理工学部 浦谷 規 (Tadashi Uratani)

Faculty of Science and Engineering

Hosei University

1 長寿リスク

我が国の平均寿命は医療と健康管理の充実によって世界最長となっている。そのため老後に蓄えを使い果たした後も生きることになるいわゆる「長寿リスク」は大きくなっている。同様な状況にある米国では、人々は「63/36」ルールとしてその深刻さを認識している。「65歳のカップルが二人とも90歳まで生きる確率は63%であり、その一方が95歳まで生きる確率は36%である」。さらに、カップルの最低生活資金は「219」ルールとして長寿リスクの厳しさを表している。「20年間の二人の食料費は219,000ドルにもなる」という計算である。1食5ドルとして2人で一日3回、365日を20年間の総額がキリのよい219,000になるのである。我が国のカップルの平均寿命は82.3歳であり、米国の77.9歳より長く、その長寿リスクはさらに大きい。

この問題に対する最初のポートフォリオアプローチはYoung [11] である。最低消費額を利息収入で賄えない資産を保有していない個人が、生存中に保有資産がゼロなる確率を最小にするために、危険資産と安全資産の最適な組み合わせを解析解として求めた。ところがその最適投資政策は資産額が減少していくと、安全資産の借入で危険投資をするという現実には合わない投資戦略になる。この問題点を借入制約付きの最適ポートフォリオとしてBayraktar et al [3] が解決した。さらに、彼らは安全資産の預金金利と借入金利を分けたモデル化を行い、最適投資戦略を求めている。

ところで、長寿リスクに対して年金は有効であるはずであるが、Bayraktar et al [2] は年金をポートフォリオ資産に組み入れることは資産額が少ない個人にとっては最適でないという結論を出している。

本論文では年金資産を借入のための担保価値とし、その資産額までは年金の収益率と同じ借入金利で借入可能としたモデル化を行う。担保価値と借入総額が等しくなくなった後は、無担保の借入金利で借り入れるものとする。我々の担保価値をいれた年金購入があるときの個人の倒産確率をBayraktar et al [3] の年金を含まない借入金利モデルにおける倒産確率と比較し、年金の意義を明らかにすることが本論文の目的である。

そのために、第2節ではポートフォリオに組み込まれる資産プロセスの定義を行う。さらに、個人終身年金における2種類を金融商品としての収益率と担保価値を明らかにする。年金価格はYaari [10] によるハザード率を用いた生存確率モデルによる。

第3節では基本的セットアップとしてYoungの定式化に習って安全資産と危険資産だけからなるポートフォリオに対する長寿リスク最小化モデルとその解析解を述べる。その最適資産プロセスが幾何ブラウン運動に従うことを示し、借入することになるまで資産額が減少する初到達時間とそのラプラス変換を求める。

つぎに、年金を初期に購入し、それを担保価値として利用するときのポートフォリオ問題を解く。担保価値による借入の限度額を全資産と危険資産だけからなるポートフォリオの借入限度額

と等しくしたときの、その限度額に到達する時刻のラプラス変換を求める。この同一の限度額に到達する時刻の分布比較をラプラス変換により行う。

最後に終身年金の長寿リスク管理の意義をまとめる。

2 個人年金と資産ポートフォリオ

個人が保有資産を金融商品に投資し、長寿リスクを最小にする問題を考えよう。第1の資産は安全資産であり、預金金利は r であり、借入れ金利を b とする。第2の資産は危険資産であり、価格 S_t は次の幾何ブラウン運動に従うものとする。

$$dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dB_t, S_0 = S$$

ただし、 $\mu > r, \sigma > 0$ とする。第3に資産は個人終身年金であり、その中の2つのタイプを考える。その1つは”Immediate Annuity”と呼ばれるものであり、個人が時点 t に総額を支払い、その時点以降に年金額を受給できる契約である。もう1つは”Deferred Annuity”とよばれ、個人が t に総額を支払うが受給は退職時 T 以降とする契約である。Deferred annuity の価格を $a(t, T)$ とすると

$$a(t, T) = \int_T^\infty e^{-r(s-t)} e^{-\lambda(T)(s-t)} ds = \frac{1}{\rho(T)} e^{-\rho(T)(T-t)}, \quad (2.1)$$

ただし $\lambda(T)$ は T におけるハザード率である。また $\rho(t) = r + \lambda(t)$ とおく。

Immediate annuity の t における価格は (2.1) から

$$a(t, t) = \frac{1}{\rho(t)}. \quad (2.2)$$

となる。ハザード率は死亡確率の増加に比例するから $d\lambda(t)/dt > 0$ であるから

$$\frac{da(t, t)}{dt} = -\rho(t)^{-2} d\lambda(t) < 0, \quad (2.3)$$

となり、時間の減少関数となる。後で買えば安くなるという特徴があり、負の収益率でもある。

一方、Deferred Annuity の収益率は

$$\frac{\partial a(t, T)}{\partial t} = \rho(T) a(t, T),$$

から $\rho(T)$ であり、安全資産より大きい。年金を担保に借入れは可能であり、その借入金利は $\rho(T)$ 未満ではあり得ない。以下では年金担保の借入金利を $\rho(T)$ とする。無担保の安全資産の借入金利は $b > \rho(T)$ とする。

3 ポートフォリオ最適化モデル

長寿リスクを最小にする問題は、目的関数を

$$h(w) = \min_{\{0 \leq \alpha_s, \beta \leq W_s\}} Pr[\tau_0 < \tau_d | W_t = w] \quad (3.1)$$

とするポートフォリオ戦略 α, β を求めることである。 α_s は時点 s における危険資産保有額であり、 β は初期時点 t における年金購入単位とする。ただし、破産時刻を $\tau_0 = \inf\{t : W_t = 0\}$ とし死亡時刻を τ_d とする。

さらに、個人は c を連続的に消費するものとする。
明らかに初期資産が 0 であれば倒産であるから

$$h(0) = 1.$$

年金を購入せず初期資産が

$$w > c/r$$

あれば、安全資産の利息が消費をカバーするから倒産はない。Immediate Annuity を消費カバーできるように購入できれば、つまり

$$w > ca(t, t) = c/\rho(t)$$

であれば倒産はない。ところが、Deferred annuity では年金受給の開始が T 以降であるために、そのときまでに破産が起きないためには年金購入額 $ca(t, T)$ および t から T までの消費の現在価値の和が必要になる。この年金が購入可能なときの割引率は $\rho(T)$ 以上でなければならない。もし担保付き借入金利が r であれば、もし T 以降に生存できれば、借入をして年金の購入は $\lambda(T)$ 利益を確実にうむことになるからである。したがって、割引率を $\rho(T)$ とすると、破産しない初期資産額は (2.1) より

$$w > c \left(a(t, T) + \int_t^T \exp(-\rho(T)s) ds \right) = c/\rho(T) \quad (3.2)$$

となる。

以上のことから、年金のないときには倒産のリスクのない安全限界額は c/r であったものが、Immediate annuity が存在すればそれは $c/\rho(t)$ に、Deferred Annuity の存在はさらに下げて $c/\rho(T)$ になる。年金商品の存在意義は安全限界額を低化させることによって、より多くの人々の長寿リスクが減少させるところにある。

以下では初期資産が $w < c/\rho(T)$ の個人のポートフォリオ戦略 (α_s, β) を考えてみよう。

3.1 年金がないときの最適戦略

年金が存在しないときの長寿リスク最小化問題 Young [11] を紹介し、年金を含むモデルに発展させよう。単純化のためにハザード率を $\lambda := \lambda(t)$ と固定する。ここでは (3.1) において $\beta = 0$ とするから 目的関数を

$$\phi(w) = \inf_{\alpha_s} P(\tau_0 < \tau_d) = \inf_{\alpha_s} E[\exp(-\lambda\tau_0) | W_t = w] \quad (3.3)$$

とおく。ポートフォリオのプロセスは

$$dW_s = \{rW_s + (\mu - r)\alpha_s - c\}dt + \sigma\alpha_s dB_s, \quad (3.4)$$

であり、最適化のための HJB 方程式は

$$\lambda\phi(w) = \phi_w(rw - c) + \inf_{\alpha} [(\mu - r)\alpha\phi_w + \frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2\phi_{ww}] \quad (3.5)$$

であり、その境界条件は年金が存在しないときであるから

$$\begin{cases} \phi(0) = 1, \\ \phi(c/r) = 0. \end{cases} \quad (3.6)$$

である。関数 ϕ が凸関数であると仮定すると最適が存在し

$$\alpha^* = -\frac{\mu - r}{\sigma^2} \frac{\phi_w}{\phi_{ww}} \quad (3.7)$$

である。これを (3.5) に代入すると

$$\lambda\phi(w) = \phi_w(rw - c) - m \frac{\phi_w^2}{\phi_{ww}}, \quad (3.8)$$

となる。ただし $\lambda = \lambda(t)$, $m = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma}\right)^2$ とおいた。定微分方程式 (3.8) の一般解は

$$\phi(w) = (a_1 + a_2 w)^d.$$

であるから、境界条件 $\phi(0) = 1$ から $a_1 = 1$ となり $\phi(c/r) = 0$ から $a_2 = -r/c$ となる。したがって、長寿リスクの確率は

$$\phi(w) = \left(1 - \frac{rw}{c}\right)^d, \quad w < c/r, \quad (3.9)$$

である。この確率を (3.8) に代入すると、 d は

$$\lambda\phi = dr\phi - m \frac{d}{d-1} \phi$$

満たさなければならない。したがって、

$$d = \frac{1}{2r} \left(r + m + \lambda + \sqrt{(r + m + \lambda)^2 - 4r\lambda} \right) \quad (3.10)$$

である。また r の関数であるから以降は $d(r) := d$ とおく。最適危険資産投資額は (3.7) から、

$$\alpha_s^* = \frac{\mu - r}{\sigma^2(d(r) - 1)} (c/r - W_s), \quad (3.11)$$

と求まる。ただし明らかに $d(r) > 1$ である。この戦略は総資産額が消費の累積効果によって減少したときに、リスク回避のために借入によって危険資産投資を行うこととなる。総資産額が最適危険資産額を超えると、 $W_s \leq \alpha_s^*$ の総資産額は

$$w_l = \frac{c}{r(1 + (\mu - r)(d(r) - 1)/2m)}$$

である。この額以上に危険資産投資を行うためには借入が必要になる。

最適戦略 (3.11) において $\kappa(r) = \frac{\mu - r}{\sigma^2(d(r) - 1)}$ として表した $\alpha_s^* = \kappa(r)(c/r - W_s)$ を資産プロセス (3.4) に代入すると、

$$dW_s = (c/r - W_s)((\mu - r)\kappa(r) - r)dt + \sigma\kappa(r)(c/r - W_s)dB_s$$

これは次のように変形できるから

$$\frac{d(c/r - W_s)}{c/r - W_s} = (r - (\mu - r)\kappa(r))dt - \sigma\kappa(r)dB_s \quad (3.12)$$

以下のような対数正規分布となる次の解が得られる。

$$c/r - W_s = (c/r - w) \exp\left((r - (\mu - r)\kappa(r) + \frac{1}{2}(\sigma\kappa(r))^2)(s - t) - \sigma\kappa(r)B_s\right)$$

ただし $w = W_t$ の初期資産額である。 $Y_s = c/r - W_s$ とおくと、破産時刻 τ_0 は $W_s = 0$ の条件から $\tau_0 = \inf\{Y_s = c/r\}$ であり、

$$Y_s = (c/r - w) \exp((r - (\mu - r)\kappa(r) + \frac{1}{2}(\sigma\kappa(r))^2)(s - t) - \sigma\kappa(r)B_s) \quad (3.13)$$

である。 $c/r - w$ から c/r へ Y_s の初到達時刻 τ_0 のラプラス変換は

$$\theta(\gamma, r, 0) = E(\exp(-\gamma\tau_0)) = \left(\frac{c - wr}{c}\right)^{\sqrt{n^2 + 2\gamma/q^2} - n} \quad (3.14)$$

ただし $n = (r - (\mu - r)\kappa(r))/q^2 + \frac{1}{2}$ 、 $q^2 = (\sigma\kappa(r))^2$ とする。

さらに、借入を開始する資産額 w_i への初到達時刻 τ_i は Y_s が $c/r - w$ から $c/r - w_i$ へであるから

$$\theta(\gamma, r, w_i) = E(\exp(-\gamma\tau_i)) = \left(\frac{c - wr}{c - w_i r}\right)^{\sqrt{n^2 + 2\gamma/q^2} - n} \quad (3.15)$$

である。

*

3.2 Deferred Annuity を含むポートフォリオ

Deferred Annuity の価格 (2.1) は受給開始時点のハザード率だけに依存するからこの節では $\rho = \rho(T)$ と略記する。 β 単位の Deferred annuity を時点 t で購入したときも前節同様にポートフォリオ資産は 年金担保も含めて、 $W_t = w$ となる。

年金を担保に金利 ρ で借入可能となるときの資産過程は年金受給開始前は

$$dW_s = \{\rho(W_s - \alpha_s) + \mu\alpha_s - c\}dt + \sigma\alpha_s dB_s, t < s < T \quad (3.16)$$

である。借入額は年金の価値 β/ρ に等しいから (3.16) を満たす資産プロセスは

$$\beta/\rho < W_s < c/\rho \quad t \leq s$$

*Immediate annuity を含むポートフォリオ については一定ハザード率を仮定すれば以下の結論がある。

初期資産額が $w > a(t, t)c$ のとき長寿リスクは Immediate annuity を c 単位購入すると長寿リスクはなくなる。初期資産額で購入可能でない個人が β 単位購入したときの破産確率を考えてみよう。購入の結果、初期キャッシュは $w - \beta a(t, t)$ と減少するが借入のための担保価値は $\beta a(t, t)$ あるから総資産額は w である。一方消費額は $c - \beta$ に減少する。年金の価値は $\beta da(t, t)dt$ で減少するが、 $\lambda = \lambda(t)$ とハザード率を一定とする前節と同様の仮定のもとでは $da(t, t) = 0$ である。 $\rho(t)$ も定数とする。このときの資産額のプロセスは (2.3) から

$$dW_s = \{\rho(t)(W_s - \alpha_s) + \mu\alpha_s - (c - \beta)\}dt + \sigma\alpha_s dB_s, s \geq T$$

境界条件は $\phi(c/\rho(t)) = 0$ と $\phi(0) = 0$ になる。したがって、時点 t における 倒産確率は (3.9) と同様にして

$$\phi(w) = \left(1 - \frac{\rho(t)w}{c - \beta}\right)^d, \quad w < c/\rho(t)$$

となる。年金購入額 β の変化による倒産確率の変化は

$$\frac{\partial \phi}{\partial \beta} = d \left(1 - \frac{\rho(t)w}{c - \beta}\right)^{d-1} \frac{\rho(t)w}{(c - \beta)^2} > 0$$

である。従って、Immediate annuity の購入は倒産確率を増加することになり、この年金の購入はありえない。以上の設定から Bayraktar et al [2] の Immediate Annuity を購入しないという結論が導かれる

を満たすときに有担保の借入である。長寿リスクを最小化の最適を

$$\psi(w) := \inf_{\alpha, \beta} P[\tau_0 < \tau_d | W_t = w]$$

とおくと、明らかな境界条件は $\psi(0) = 1$ である。安全な資産の下限は c/ρ であるから、境界条件は $\psi(c/\rho)$ となる。したがって年金のない場合の金利を r か ρ に替えた場合となる。

(??) の最適危険投資は

$$\alpha_s^+ = \kappa(\rho)(c/\rho - W_s)$$

と求められる。資産プロセス (3.16) に代入すると、

$$dW_s = (c/\rho - W_s)((\mu - \rho)\kappa(\rho) - \rho)dt + \sigma\kappa(\rho)(c/\rho - W_s)dB_s$$

となるから、その解は次の (3.13) と同様な解である。

$$c/\rho - W_s = (c/\rho - w) \exp((\rho - (\mu - \rho)\kappa(\rho) + \frac{1}{2}(\sigma\kappa(\rho))^2)(s - t) - \sigma\kappa(\rho)B_s)$$

ただし $w = W_t$ の初期資産額である。

年金の担保価値に総資産額が到達時刻は $W_s = w - b/\rho$ となるときであり、 $Z_s = c/\rho - W_s$ の到達時刻では

$$\tau_b = \inf\{Z_s = (c + b)/\rho - w\}$$

である。これは Z_s が $c/\rho - w$ から $(c + b)/\rho - w$ へはじめて到着する時刻である。 τ_b のラプラス変換は

$$\theta_2(\gamma) = E[\exp(-\gamma\tau_b)] = \left(\frac{c - \rho w}{(c + b) - \rho w} \right)^{\sqrt{n(\rho)^2 + 2\gamma/q(\rho)^2} - n(\rho)} \quad (3.17)$$

ただし $n(\rho) = (\rho - (\mu - \rho)\kappa(\rho))/q^2 + \frac{1}{2}$ 、 $q(\rho)^2 = (\sigma\kappa(\rho))^2$ とする。

年金の担保価値消失後は、借入の意義を調べるために年金の購入ができないものとする。借入の担保にならない。しかし、 T 以降では倒産の限界額がゼロから $-\beta$ に下がる。さらに T 以降では年金の購入もないとする。

3.3 Deferred Annuity の購入可能性

借入をしない最適投資戦略は年金の存在しないとき $\alpha^* = \kappa(r)(c/r - w)$ であり、Deferred Annuity が存在するときは $\alpha^+ = \kappa(\rho)(c/\rho - w)$ であつた。しかもこの期間はいずれの場合も幾何ブラウン運動に従う。

いま借入をしない限界額が等しくなるように b を設定し、年金購入したケースの初到達時刻のラプラス変換が年金のないケースのラプラス変換小さくしなければ購入の有効性が示せる。限界額を $w - b/\rho = w_l$ 、すなわち

$$b = \rho(w - w_l)$$

と設定する。(3.17) にこれを代入すると、

$$\theta_2(\gamma) = \left(\frac{c - \rho w}{c - \rho w_l} \right)^{\sqrt{n(\rho)^2 + 2\gamma/q(\rho)^2} - n(\rho)} \quad (3.18)$$

ラプラス変換 (3.15) と (3.18) の差は、 $\rho = r + \lambda$ に注意すると r に関する微分になっている。

$$\frac{\partial \theta(\gamma, r, w_l)}{\partial r} = \frac{1}{\rho - r} \left(\left(\frac{c - \rho w}{c - \rho w_l} \right)^{\sqrt{n(\rho)^2 + 2\gamma/q(\rho)^2 - n(\rho)}} - \left(\frac{c - r w}{c - r w_l} \right)^{\sqrt{n(r)^2 + 2\gamma/q(r)^2 - n(r)}} \right)$$

その微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta(\gamma, r, w_l)}{\partial r} &= \partial \exp \left((\sqrt{n^2 + 2\gamma/q^2} - n) \log \left(\frac{c - w r}{c - w_l r} \right) \right) / \partial r \\ &= \theta_2(\gamma, r, w_l) \partial (\sqrt{n^2 + 2\gamma/q^2} - n) \log \left(\frac{c - w r}{c - w_l r} \right) / \partial r \end{aligned} \tag{3.19}$$

従って、

$$\partial (\sqrt{n^2 + 2\gamma/q^2} - n) \log \left(\frac{c - w r}{c - w_l r} \right) / \partial r \geq 0$$

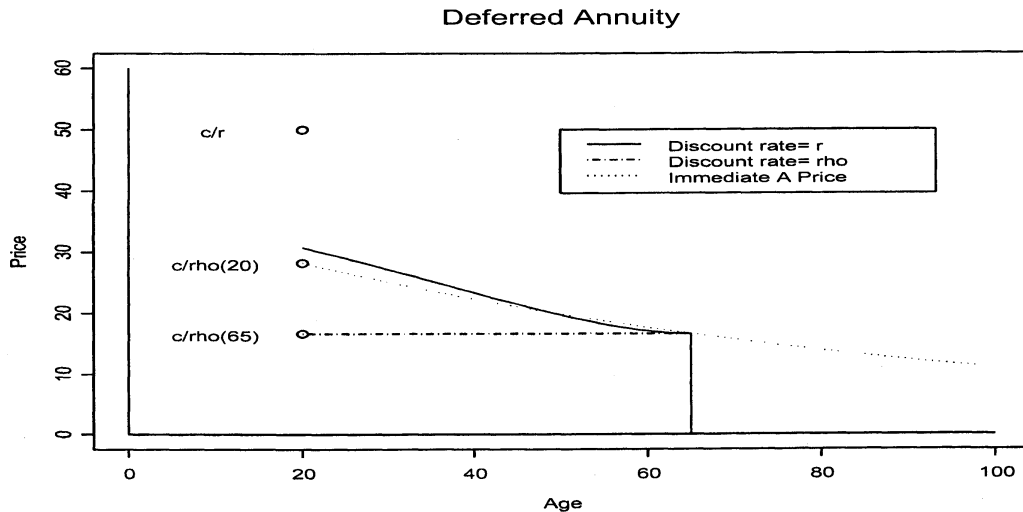
であれば、Deferred Annuity の保有は借入開始時刻を遅らせ、倒産の確率を減少する。その条件がたとえ等式であっても、年金の購入は受給開始時点後の倒産の境界条件を $\psi(-b) = 1$ とするから年金購入の合理性が保証される。

4 まとめ

Figure 1 が年金の価格と長寿リスクとの関係を表している。 c/r が年金がないときの長寿リスクのない資産額である。その下の $c/\rho(20)$ は 20 歳で個人年金を購入するときの Immediate Annuity 価格である。その上の右下がりの実線は、Deferred Annuity において将来の年金受給開始までの消費を安全利子率 r で割り引いた額と 65 歳受給時の年金との和のグラフである。しかし Deferred Annuity の割引率を ρ とすると、 $c/\rho(65)$ から引かれている破線が消費の割引率を ρ にした境界値になる。以上のように年金の導入はリスのない領域を c/r から $c/\rho(65)$ 間で引き下げることに大きな意義がある。

さらに、これらの安全資産額以下しか資産のない個人も Deferred Annuity の存在は倒産の確率を減少する。

Figure 1: Optimal portfolio with annuity purchase



References

- [1] Bayraktar, E.M., Moore, K., Young, V, Minimizing the probability of lifetime ruin under borrowing constraints Insurance: Mathematics and Economics 41(2007),196-221.
- [2] Bayraktar, E.M., Young, V, Minimizing the probability of lifetime ruin under borrowing constraints, Insurance: Mathematics and Economics 41(2007),196-221.
- [3] Bayraktar, E.M., Young, V, Correspondence between Lifetime Minimum Wealth and Utility of Consumption, Finance and Stochastics , 2007
- [4] Bayraktar, E.M., Young, V, Optimal Deferred Life Annuities to Minimize the Probability of Lifetime Ruin, North American Actuarial Journal,2009
- [5] Borodin, A. N., Salminen, P., Handbook of Brownian Motion-Facts and Formulae, Second Edition Birkhauser, Basel, 2002
- [6] Browne, S., 'Survival and Growth with Liabilities: Optimal Portfolio Strategies in Continuous Time,'
Mathematics of Operations Research, 22, 2, pp.468-493, 1997.
- [7] Hardy,M. , Investment guarantees, Wiley finance series, 2003
- [8] Milevsky, M., Moore, K., Young, V, Asset Allocation and Annuity-Purchase Strategies to minimize the Probability of Financial Ruin,
mathematical finance,vol.16 pp647-671, 2006
- [9] Moore, K., Young, V, Optimal and simple, nearly optimal rules for minimizing the Probability of Financial Ruin in retirement,
working paper of University of Michigan, 2006
- [10] Yaari, M., Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer,
Review of Economic Studies, 1965
- [11] Young, V, Optimal investment strategy to minimize the probability of lifetime ruin,
North American actuarial Journal, 2004