

関孝和『解隠題之法』について

On "Kai-in-dai-no-hō" by Takakazu Seki

東京女子大学 長田直樹 (Naoki Osada)
Tokyo Woman's Christian University

1 はじめに

『解隠題之法』では、今日の Ruffini-Horner 法、代数方程式に対する Newton 法 (Newton-Raphson 法) とそれぞれ同値な方法が与えられており、数値計算の歴史に於いて画期的な文献である。一方、『解隠題之法』の原書 (原本) がどのようなものであったかはほとんど明らかになっていない。

本論文では、『解隠題之法』の原書はどうであったかを調べる。『解隠題之法』は関流数学では三部抄の一つとして重要な伝書に位置づけられていたが、『解隠題之法』から関孝和の数学を抽出する。併せて『解隠題之法』の原書と密接な関係がある『解見題之法』の原書はどうであったかについても言及する。

さらに、『解隠題之法』が提起した数学を世界数学史の中で位置づける

式と開方式は算木を用いて表されているが、本論文では算木を算用数字に置き換える。たとえば、式あ

るいは開方式

 は、

2
-3
1

 とかく。さらに、現代数学の記法を用いる。たとえば、式

a_0
a_1
a_2

 は整式

$a_0 + a_1x + a_2x^2$ と同一視し、開方式

a_0
a_1
a_2

 は代数方程式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 = 0$ と同一視する。

2 『解隠題之法』の写本

2.1 『解隠題之法』の写本の奥書

『解隠題之法』の原書は見つかっていないが、実物、影印あるいは画像を閲覧できる写本^{*1} は 30~50 程度ある。筆者が年紀の有無あるいは書写者を確認できた写本を表 1 にしめす。表 1 において貞享の欄は「貞享乙丑八月戊申日龔書」の記載の有無、寛保の欄は「寛保癸亥四月丙午再写之連貝軒」の記載の有無を表す。「申」が「甲」、「龔」が「龍共」というような誤記も有に含める。

表 1 の 24 点のうち半数 (12/24) の写本の奥書に「貞享乙丑 [1685 年] 八月戊申日龔書」と記載されている。それらの半数 (6/12) には奥書「寛保癸亥 [1743 年] 四月丙午再写之連貝軒 [山路主住]」がある。さらに、書写した年が判断できるものはすべて寛保癸亥 (1743 年) 以降である。

関算要伝第六十九解隠題には「寛延戊辰 [1748 年] 八月丙子日寫之」の年紀があるが、寛延戊辰 (1748 年) の書写者は不明である。寛保癸亥 (1743 年) (の写本) の写本を写したものと思われる。

2.2 『解隠題之法』山路主住写本

寛保癸亥 (1743 年) に山路主住 (連貝軒) が再写した写本を山路主住写本と呼ぶ。

「再写」とはいかなる意味であろうか。二通りの解釈ができる。

1. 写本を書写した。

^{*1} 補訂版国書総目録には表 1 以外に、日本学士院に 2 冊、国会図書館、東京国立博物館、東京理科大に各 1 冊の所蔵が記載されている。

表1 『解隠題之法』の写本の奥書の日付

所蔵館	請求番号	貞享	寛保	その他	出典
東北大	岡本写 0022	有	有		[T] に画像
東北大	岡本写 0027	有	有	見隠伏の順に合本	[T] に画像
東北大	狩野-7.19941.1	無	無	菅野元健写 (平山諦)	[T] に書誌
東北大	林文庫-2306	有	無		[T] に画像
東北大	林文庫-0826	無	無	明和庚寅 [1770 年] 四月丙卯日又再写	[T] に書誌
東北大	林文庫-2179	有	無	弘化四 [1847] 年丁未六月河村光治郎写	[T] に画像
東北大	林集書-0647	有	無	明和六 [1769] 年己丑年四月廿六日 写之畢 松永氏貞辰	[T] に画像
東北大	林集書-0189	無	無		[T] に画像
東北大	林文庫-0831	無	無	見隠伏の順に合本、 享和壬戌 [1802 年] 十二月廿五日書	[T] に書誌
東北大	林文庫-0832	無	無	見隠伏の順に合本、伏のみ天和癸亥の年紀	[T] に書誌
東北大	林文庫-0833	無	無	隠見の二冊合本、中島尚翼写	[T] に書誌
東北大	旧片平 庚.1.1.12	無	無	見伏隠の順に合本、年紀なし	[T] に書誌
宮城県 図書館	KD090-セ 5 -474.348	有	無	寛延戊辰 [1748 年] 八月丙子日寫之 関算要伝第六十九	[1]
早大	小倉文庫 イ16-218	有	無	寛政十一年己未 [1799 年] 仲秋中邨信成寫之 文化七年庚午 [1810 年] 仲夏下旬武邨好周寫之	[W] に書誌
早大	小倉文庫 イ16-219	無	無	隠見の二冊合本、解見題の奥書に 「寛政五癸丑 [1793] 年齊藤氏写之」	[W] に書誌
早大	小倉文庫 イ16-307-2	有	有		[W] に書誌
早大	ニ 2-00708-0022	有	有	安政元甲寅 [1854] 年極月	[W] に画像
京大	京大附図 6-41 /カ/40 960183	有	有		[Kyo] に書誌
九大	桑本文庫和書 675	無	無	菅野元健写 [14]	[Kyu] に書誌
九大	桑本文庫和書 679	有	有	見隠伏の順に合本	[Kyu] に書誌
九大	桑本文庫和書 687	無	無		[Kyu] に書誌
千葉 中博	房総数学 文庫 4	有	有	見隠伏の順に合本 文化五戊辰 [1808] 年九月吉祥日 高木戊三写之	[Chi] に画像
東京大	T20/598	有	無		
天文台	1569	無	無	文化十三丙子 [1816] 歳六月写之	

[T]: <http://dbr.library.tohoku.ac.jp/>[W]: <http://www.wul.waseda.ac.jp/kotenseki/>[Kyo]: <http://edb.kulib.kyoto-u.ac.jp/tenjikai/2003/zuroku/pdf/3.pdf>[Kyu]: <http://opac.lib.kyushu-u.ac.jp/>[Chi]: <http://ref-ap.library.pref.chiba.lg.jp/>

2. 同一人物が同一の書あるいは写本を再び書写した。

前者の例として『解題之法』林文庫 0824 がある。奥書には「享保丙午 [1726] 歳四月望前五日」「天保二辛卯 [1831] 歳六月中五日再寫」とある。105 年の間隔があるので同一人物ではあり得ない。この場合の「再寫」は 1 の意味であろう。

「再写」の山路による使用例として、関算後伝第九十五病題明致に、「貞享乙丑藥角解日重訂 関子印」「享保丙午 [1726] 四月既望 東岡 [松永良弼] 写」「元文庚申 [1740 年] 正月既望 訂書」「寛保壬戌 [1742 年] 十二月 連貝再写」がある。元文庚申に『病題明致』を訂書したのが連貝軒であれば、「再写」を 2 の意味（同一人が同一の写本を再び書写）で用いていることになる。

さて、主住写本であるが、『解題之法』林文庫 0826 の奥書に「貞享乙丑 [1685 年] 八月戊申日龔書」「寛保癸亥 [1743 年] 四月丙午再写之連貝軒」「明和庚寅 [1770 年] 四月丙卯日又再写」の記載がある。最後の年紀には書作者の名前はない。山路主住は安永元 (1773) 年に没しているので、山路主住が書写した可能性はある。その場合は、寛保癸亥に二度目の書写を行い、明和庚寅に三度目の書写を行ったということになる。

3 『解題之法』執筆の目的

関孝和編と書かれている数学の写本のうち年紀が記されているもの*2 のほとんどは、『解題之法』を含め天和癸亥 (1683 年) と貞享乙丑 (1685 年) である。

この理由の一つに考えられるのは、『大成算経』編纂作業の開始である。建部賢明の『建部氏伝記』[8]によると、1683 年夏、関孝和、建部賢明、賢弘の 3 人により「各新ニ考へ得ル所ノ妙旨悉ク著シ、就テ古今ノ遺法ヲ盡」すプロジェクトが開始された。

1683 年と 1685 年の年紀のある関孝和の著作はすべて上記プロジェクトのために準備されたものと思われる。奥書に貞享乙丑八月戊申日龔書とかかれた『解題之法』の原書もこの目的のために執筆されたことは次節以降で示す。

建部賢弘は『解題之法』が龔書された 1685 年に刊行した『発微算法演段診解』[7] の亨巻において、
ヲヨソ「凡 題ニ見隠伏ノ三品アリ見題ハ全折ノ法ヲ以テ正變ノ二形ニ 随 テ所問ヲ求ム隠題ハ天元ノ一ヲ立テ
センセツ
ハシ虚真ノ二数ヲ得テ所問ヲ求ム此二題ノ術ハ算學啓蒙ニ其法則ヲアラハス然モ天元ノ一ヲ立テ如意求之トイ
センセツ
ハシヘトモ相消数容易見 難 ヲ伏題ト云ナリ」と書いている。『解題之法』は「天元ノ一ヲ立テ虚真ノ二数ヲ
ハシ
センセツ得テ所問ヲ求」める方法を扱っているのである。

4 『解題之法』と『大成算経』

『解題之法』の原書、『解題之法』の写本群、『大成算経』の写本群の関係は図 1 のようになる。『大成算経』の原書と写本群の間には、『解題之法』の場合のようなフィルタは掛かってないと考えられるので、『大成算経』の写本群のうち榊原震洲写本 (変技 T20-67, 求積 T20-69, 全題解 T20-66) と関算後伝大成算経 (巻之三、巻之十三、巻之十七) を照合した内容を『大成算経』の内容と考え議論を進める。

『解題之法』の写本群と『大成算経』の構成に関連があれば、『解題之法』の原書は『大成算経』のために準備されたものであるといえる。さらに『解題之法』の写本群と『大成算経』の写本群に共通の記述や内容があれば、共通部分は『解題之法』の原書に記載されていると考えられる。

『解題之法』の写本と『大成算経』の写本の対応関係、「假如」で始まる例題のうち『解題之法』の写本と『大成算経』の写本に共通する例題、を調べる。共通する例題は『解題之法』の原書に記載されていたと判断できる。

*2 例外は延宝八年 (1680 年) の『立門率解』である。(日本学士院、2808)

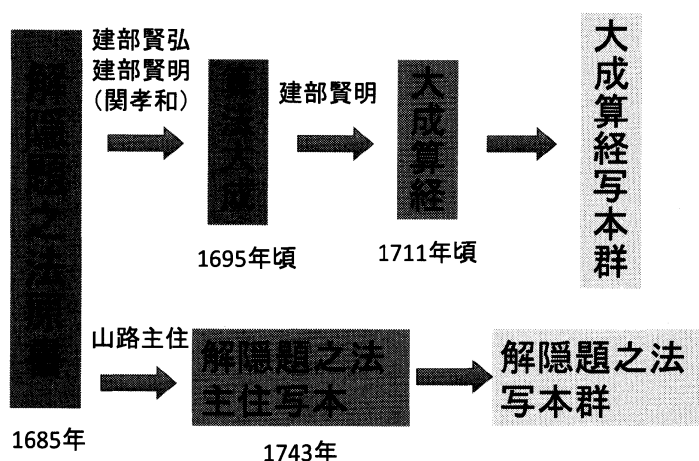


図1 『解隠題之法』の原書

4.1 『解隠題之法』と『大成算経』の対応関係

『解隠題之法』のそれぞれの条が『大成算経』のどこで扱われているかを表2に示す。『解隠題之法』の「立元第一」から「開方第五」までは『大成算経』巻之十七隠題篇に、得商は『大成算経』巻之三に開法第三「課商」「窮商」に対応している。原文の比較対照は7節で行う。

表2 『解隠題之法』は『大成算経』のどこで扱われているか

『解隠題之法』	『大成算経』
立元第一	巻之十七「隠題篇」立元第一
加減第二附併	巻之十七「隠題篇」加減第二(加減の見乗を含む)
相乗第三附見乗	巻之十七「隠題篇」相乗第三(相乗の見乗を含む)
相消第四	巻之十七「隠題篇」相消第四(相消の見乗を含む)
開方第五	巻之三開方第三開出総数
得商	巻之三開方第三課商、窮商

4.2 『解隠題之法』と『大成算経』の例題

『解隠題之法』の例題(「假如」で始まる)は表3に掲げた16あるが、そのうち4問は『大成算経』でも取り上げられている。『大成算経』巻之十七「隠題篇」と巻之三開方第三課商、窮商の例題は表4に示す。式の上に「左」などを書いたものを除き、右の式(あるいは得数)を前、左の式(あるいは寄左数)を後に書く。

内容(表2)および例題(表3,4)から判断すると『解隠題之法』の原本を大幅に補筆したものが『大成算経』の当該箇所であると考えられる。『解隠題之法』の原本は1685年より前に関孝和によって得られていた式(整式)の加減乗算、開方式(代数方程式)の導き方と開方の方法などを、プロジェクトの草稿として関孝和^{*3}が1685年に新たに書き下ろしたものである。

^{*3} まとめるに当たり建部賢弘が協力したことは考えられる。関が検地[18, p.14]に従事していた1684年の奥書のある写本が一つも見つかっていないところを見ると、建部賢弘が単独で執筆したとは考えにくい。

表3 『解隠題之法』の例題で『大成算経』に現われるもの

式または開方式	『解隠題之法』	『大成算経』
$(1+2x) + (1-x)$ 加之	加減第二	
$(2-3x+x^2) + (0+2x-x^2)$ 加之	加減第二	
$(3-4x+7x^2) + (5-x+3x^2) + (1-3x-6x^2)$ 併之	加減第二	
$(1+2x) - (-1+x)$ 以右減左	加減第二	
$(-1+0x+2x^2) - (2-x+4x^2)$ 以左減右	加減第二	
$(0+x)^2$ 自乗之	相乗第三	卷之十七隠題篇相乗第三
$(3-2x+x^2)^2$ 自乗之	相乗第三	
$(2-x)^3$ 再自乗之	相乗第三	
$(-7+4x+2x^2-x^3)(6-3x+2x^2)$ 相乗之	相乗第三	
$8 = 0 + 2x + x^2$ 以得数消寄左	相消第四	卷之十七隠題篇相消第四
$-2 + 3x - x^2 = -7 + 3x + 3x^2 + x^3$ 以寄左消得数	相消第四	卷之十七隠題篇相消第四
$-35 + 2x + x^2 = 0$	開方第五	
$30 + 14x - 5x^2 - x^3 = 0$	開方第五	
$-12 + x + x^2 = 0$	得商	
$-18 + 24x - 11x^2 + 2x^3 = 0$	得商	
$-9 + 3x + 2x^2 + x^3 = 0$	得商	卷之三開方第三窮商

5 『解隠題之法』と『開方翻變之法』などとの構成上の比較

『解隠題之法』の構成は、『解見題之法』『解伏題之法』と多くの共通点を持っている。この三篇は関流数学で三部抄と呼ばれていた。一方、貞享乙丑(1685年)と奥書に書かれている『開方翻變之法』『題術辨議之法』『病題明致之法』の構成も多くの共通点を持っている。三部抄の構成と『開方翻變之法』など三篇の構成を比較する。

5.1 内題

三部抄の内題はそれぞれ「解見題之法凡四篇關孝和編」、「解隠題之法凡五篇關孝和編」、「解伏題之法凡六篇關孝和編」である。一方、『開方翻變之法』など三編の内題は、「開方翻變之法凡五條關孝和編」「題術辨議之法凡五條關孝和編」、「病題明致之法凡三條關孝和編」である。三部抄は「篇」、他は「條」である。

見出しは三部抄および『開方翻變之法』『題術辨議之法』『病題明致之法』すべて〇〇第一、〇〇第二、…、(〇〇には立元などが入る)となっている。『大成算経』卷之十七は、見題篇、隠題篇、伏題篇、潜題篇からなり、隠題篇は立元第一、加減第二、相乗第三、相消第四、求数第五に分けられている。つまり、一つの篇はいくつかの條から成り立っているのである。

5.2 識語

『解隠題之法』には奥書の前に識語

右所録五篇所以解隠題之法也各々深意有之今取捷經誌之矣學者當研究耳

表4 『大成算経』の例題

『大成算経』	式または開方式
卷之十七隠題篇加減第二	$6 + (0 + x)$ $(4 + 2x - 3x^2 + x^3) + (3 - 5x - 6x^2 - x^3)$ $(3 - 4x + 5x^2 + 0x^3 + 2x^4) + (4 - x - 7x^2) + (2 + 0x + 2x^2 - x^3)$ $(1 + 4x - 2x^2) - (-1 + x)$ 以右減左 $(1 + 0x - 2x^2 - x^3) - (-2 + x - 4x^2)$ 以左減右 $(-8 + x - 2x^2 + 0x^3 + x^4)$ $-((-1 + 2x - 9x^2 + 2x^3 + x^4) + (-5 - 7x + 3x^2 + x^3))$ 以左右減中
卷之十七隠題篇相乗第三	$(0 + x)^2$ $(2 - 3x + x^2)(-4 - 6x + 5x^2 + x^3)$ $(1 - 3x + 4x^2 - 2x^3 + x^4)^2$ $(2 - 6x + 5x^2 - 8x^3 + 3x^4 - x^5)(1 - 3x - 7x^2 + 4x^3 + 2x^4 - x^5)$
卷之十七隠題篇相消第四	$8 = 0 + 2x + x^2$ $-7 + 3x + 3x^2 + x^3 = -2 + 3x - x^2$ $94 - 56x + 48x^2 - 12x^3 + x^4 = 18 + 24x + 21x^2 - 9x^3 + x^4$
卷之十七隠題篇求数第五	$65 - 13x = 0$ $98 - 28x + 2x^2 = 0$ $-92 + 72x - 15x^2 + x^3 = 0$
卷之三開方第三課商	$25 - 10x + x^2 = 0$ $578.640625 - 192.1875x + 22.75x^2 - x^3 = 0$
卷之三開方第三窮商	$11 + 8x + x^2 = 0$ $-9 + 3x + 2x^2 + x^3 = 0$

がある。三部抄にもすべて奥書の前に類似の識語がある。一方、『開方翻変之法』などの三編には識語は無い。

6 『解隠題之法』の原書 — 試論

『解隠題之法』の原書は1685年に執筆され、大幅に補充されて『大成算経』に取り入れられている。では、原書はどのようなものであったのだろうか。一つの試論を述べる。

1. 『解見題之法』原書と『解隠題之法』の原書と二篇で一冊であった。『解見題之法』が前篇である
2. いずれかの時点で、合本が分冊され『解見題之法』には年紀がないものとなった。

6.1 合冊であった根拠

『解見題之法』の写本のみ年紀がないが、二篇を分冊にしたと考えたと説明がつく。『算脱之法』と『驗符之法』が二巻で一冊となっていて、『驗符之法』の奥書に「天和癸亥小暑日訂書」と書かれている。外にも表5の例がある。

表5 合冊した草稿の奥書

書名	奥書	写本例
算脱之法	なし	岡本写 0012、小倉文庫イ 16-267
驗符之法	天和癸亥小暑日訂書	
方陣之法	なし	林文庫 0862
円攢之法	天和癸亥大暑日重訂	
拾遺諸約之法	なし	岡本写 0006、関算後伝第九
算管術解	天和癸亥林鐘望日重訂	

6.2 三部抄の文献学的比較

三部抄の写本について、年紀、山路主住の書写日の記載、訓点の有無、朱書きの有無の文献学的比較を表6に示す。関の原書には、訓点があり、一部朱を用いたと考えられるので、『解伏題之法』の写本は他の二篇の写本より原書に近いと考えられる。

表6 三部抄の文献学的比較

	解見題之法	解隠題之法	解伏題之法
年紀	なし	貞享乙丑	天和癸亥
山路書写日	享保丙午	寛保癸亥	なし
訓点	なし	なし	一部あり
朱書き	なし	なし	一部あり

1715年から1720年頃、荒木村英の弟子たちの間で『解伏題之法』が研究されていた。正徳五年[1715年]寺内(松永)良弼が『解伏題交式斜乗之諺解』を重訂している。寺内小伝が『交式』に「享保三年[1718年]春、江府於荒木氏亭、寺内小伝云。解伏題換五式之交式有相違、荒木先生聞之。」[17]と記している。享保五年(1720)年沼田敬忠は『小學九数名義諺解』[3]において「予幸其門人荒木彦四郎村英二聞クコトヲ得テ其術ヲ尽セリ演段ニハ解伏題演段全集演段大成等ノ書アリコレヲ以口授ヲ加ヘサレハ會得ナリ難シ」と書いている。

これらのことから、『解見題之法』は『解伏題之法』よりは『解隠題之法』と合冊であった可能性が高い。

6.3 いつ誰が分冊にし識語を加えたか

二つの可能性が考えられる。

1. 荒木村英が『括要算法』編纂の前後[1709-1712年頃]
2. 山路主住が享保丙午歳[1726年]四月に『解見題之法』を書写したとき

6.3.1 荒木説

荒木村英が『括要算法』を門人の大高由昌の名前で出版した際「原孝和先生之説(孝和先生の説にもとづいて)」と書いたことなどから推察されるように、荒木は関流^{*4}の後継者の地位を確立したいと考えていた。

^{*4} 荒木の弟子の沼田敬忠は『小學九数名義諺解』において、「其後予荒木村英ノ門ニ入リテ関流ノ算術ヲ受シニ」と書いている。

また、6.2 節で述べたように、『解伏題之法』は 1710 年代には荒木の弟子たちの間で議論の対象になっていた。1720 年以降に山路が識語を加えるのは難しい。

6.3.2 山路説

2 節で述べたように、『解隠題之法』の写本はすべて主住写本の系統である。『解見題之法』『解伏題之法』の写本についても同様である。

藤原松三郎が「この制度 [五段階の免許制] はいずれの時代に創まったかは叛然しないが、山路主住の時代に確立したものであることは疑ないやうである。」(『明治前日本数学史』第三巻) と述べているように、山路主住が関流の免許制度を確立した。そのための伝書として三部抄が位置づけられたので、それにふさわしい構成を持たせるため、識語を加えた。

山路が分冊を行ったとするとその時期である。関算前伝第九十三解見題には「享保丙午歳 [1726 年] 四月望前五日写之主住」と奥書が有るので、山路は 1726 年に『解見題之法』の写本を作成している。一方、『解隠題之法』には奥書に「寛保癸亥 [1743 年] 四月丙午再写之連貝軒」とある。「再写」を 2.2 節で述べた 2 の意味 (同一人物が同一の書あるいは写本を再び書写) にとり、『解隠題之法』を 1726 年に書写し、1743 年にもう一度書写したと解釈するとつじつまが合う。

6.3.3 私見

荒木説、山路説の双方とも完全に否定できるだけの根拠はない。荒木が三部抄の写本に手を加えたとなると山路を経由しない写本が有っても良さそうであるが、見つかっていないので、山路説のほうが可能性は高いように思う。

7 『解隠題之法』と『大成算経』の内容の比較

ここまでの考察から、『解隠題之法』写本群の内容は『解隠題之法』原書の内容に一致すると考えられるので、以下では誤記等を補正したものを『解隠題之法』の内容として述べていく。『解隠題之法』の記述と『大成算経』の記述の比較、『解隠題之法』の数学的内容に絞って述べる。

7.1 加減第二

式の加減は同類項をまとめて行うことが述べられている。『解隠題之法』加減第二の原文と『大成算経』卷之十七隠題篇加減第二の原文を表 7 に示す。

表 7 加減第二の比較

『解隠題之法』	『大成算経』卷之十七隠題篇
加者單位者謂加衆位者謂併各其異名相減則同名相加正無人正之負無人負之	皆属于諸級是以各級相對而加減之 其加者同名相加則異名相減正無其減者同名相減則異名相加正無人負之負無人正之
減者其同名相減則異名相加正無人負之負無人正之	每級各列布其數而爲式 常書正数以朱負数以墨是此所以別縱横之同異也
	見乘者以兩式内乘數之高 乃式上定云實方二級而爲乘數之號故歸除空平方一立方二三乘法 即爲其位乘數若依數下級自盡者亦損其乘數也

『解隠題之法』では、加 (加算) と減 (減算) を別々に定義し、乗数 (次数 -1) の異なる式の加減について

は述べていない。したがって、現代数学の記法で表すと

$$\sum_{i=0}^n a_i x^i + \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i + b_i) x^i, \quad \sum_{i=0}^n a_i x^i - \sum_{i=0}^n b_i x^i = \sum_{i=0}^n (a_i - b_i) x^i$$

となる。

例題では、加算三問、減算二問が取り上げられている(表3)が、全て同じ乗数をもつ式同士の加減算である。

『大成算経』巻之十七では、加減をまとめて記述し、見乗(演算結果の乗数を求めること)について述べられている。乗数を『解隠題之法』では、相乗第三において「乃歸除空平方一立方二以上倣之」と定義している。『大成算経』の割注はこの定義を用いている。二式の乗数(次数-1)が異なる場合は「見乗者以兩式内乗数之高」と明示している。すなわち、

$$\sum_{i=0}^m a_i x^i \pm \sum_{i=0}^n b_i x^i = \begin{cases} \sum_{i=0}^n (a_i \pm b_i) x^i & a_{m+1} = \cdots = a_n = 0 \quad \text{if } m \leq n \\ \sum_{i=0}^m (a_i \pm b_i) x^i & b_{n+1} = \cdots = b_m = 0 \quad \text{if } m > n \end{cases}$$

としている。加減算六問が取り上げられているが、五問は次数の異なる式の加減算である。そのため、『解隠題之法』と共通の例題はない。

7.2 相乗第三

二式の相乗(整式の乗算)は、左の式の項と右の式の項を順に掛け最後に同類項をまとめ、自乗はこれに準じることが述べられている。『解隠題之法』相乗第三の原文と『大成算経』巻之十七隠題篇相乗第三の原文を表8に示す。

表8 相乗第三の比較

『解隠題之法』	『大成算経』巻之十七隠題篇
相乗者置其式於左右以左自上級到下級 逐遍乘右 同名相乗爲正異名相乗爲負○乃當空級而乗者爲空 各相併得式 自乗者準之	先置原式於左右以左 或有以右遍乘左者若左右式級數不均則以寡級式數位寡遍乘于高左 級式數位多故 從上至下 或從下至上者亦同 每一級逐遍乘右 同名相乗爲正異名相乗爲負當空級而乗者皆爲空也 同級數各相并 [後略]
見乗者置其式乗數 乃歸除空平方一立方二以上倣之 自乗者倍之加一再乗者三之加二三乗者四之加三 次第倣之 爲乗數相乗者兩式乗數相併加一爲乗數	見乗者置原式乗數自乗者倍之添一再自乗者三之添二三自乗者四之添三 次第如此 相乗者左右式乗數相并添一各爲乗數也

『解隠題之法』と『大成算経』の相乗は同じもので、現代数学の記法では

$$\overbrace{\left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right)}^{\text{右の式}} \overbrace{\left(\sum_{j=0}^m b_j x^j \right)}^{\text{左の式}} = \sum_{j=0}^m b_j \left(\sum_{i=0}^n a_i x^i \right) x^j = \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{i=0}^k a_i b_{k-i} \right) x^k \quad (1)$$

となる。

『解隠題之法』と『大成算経』は例題をそれぞれ四問ずつ取り上げている。双方とも最初の例題は、天元に立てた一の自乗 $(0+x)^2$ である。関も『大成算経』の編者にも立てた一の自乗を相乗の基本と考えているのであろう。残りの三問は異なっているが、『大成算経』の例題がやや複雑になっているだけで、本質的な違いは認められない。

7.3 相消第四

相消第四では、二式を等置し移項して開方式(方程式)を得る方法を説明している。『解隱題之法』相乗第三の原文と『大成算経』巻之十七隱題篇相消第四の原文を表9に示す。

表9 相消第四の比較

『解隱題之法』	『大成算経』巻之十七隱題篇
相消者如意求之得寄左數與相消數兩數之内任意而其同名相減則異名相加正無人負之負無人正之得歸除及開方式	求名曰同數式異者于兩位以左爲寄數以右爲消數 任意減之則 或以左減右或以右減左者皆其同其同名相減異名相異名相加正無人負之負無人正之 [中略] 至是以兩位内級數多者即爲開方之乘數

と述べている。加減第二と同様に、二式の次数が異なる場合の処理について触れていない。しかしながら、例題では次数の異なる二式の相消を扱っている。『大成算経』巻之十七では「至是以兩位内級數多者即爲開方之乘數」と明示しており、『解隱題之法』の例題がそのまま採用されている。

7.4 開方第五

開方とは開方式(方程式)に商を立て開く方法である。開方について、関孝和は『解隱題之法』開方第五および『開方翻變之法』開出商數第一で述べている。『開方翻變之法』では、開出商數之法(全ての商を求めるアルゴリズム)の初商を求めるアルゴリズムが開方である。『大成算経』では巻之三開方第三で扱われており、開出商數之法の初商を求めるアルゴリズムである。

翻法とは開方によって得られる式のいずれかの級(項)で符号が反対になるときである。『大成算経』では、「先立正負初商」の4行(1行20字)手前で述べられている。

開方および翻法について述べている原文を表10に示す。

表10 開方の比較

『解隱題之法』	『開方翻變之法』	『大成算経』巻之三
開方者立商從隅 平方式者從廉命之 乃超位到實咸同加異 減而開盡之	開出商數之法立正負商各 若干從隅命之 平方式者從廉命之 至實而開盡之逐下命之至隅 上級 乃平方式者從方立方 式者從廉三乘方式者 下廉也 餘做之	先立正負初商自隅命之依正負加減于隅上級 命者因也同名相因爲正異名相因爲負加者同加也減者異減也 以商命其數加減于次上級遂上如此至實加減之又以商自隅命之加減于隅上級以商命其數加減于次上級 遂如此至方加減之復以商自隅命之加減于隅上級以商命其數加減于次上級遂上如此至初廉加減之遂下命之至隅上級加減之畢
諸級中正負相反者謂之翻法也		乃於實級開出之時若諸級中正負相反者曰翻法及開佗級雖反無其論也

開方について、『解隱題之法』、『開方翻變之法』、『大成算経』巻之三で述べられているアルゴリズムはすべて同一である。藤原松三郎は「『大成算経』巻之三の先立正負初商以下」を関孝和の開方翻變の叙述に比すれば非常に詳細で且つわかり易い。」([13, p.380])と評している。

開方式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ に対し、実に a_0 、方に a_1 、廉に a_2 、 $\cdots$ 、隅上級^{*5}に a_{n-1} 、隅に a_n とおき、商 α を立て次のような計算を行っている。見やすくするため組み立て除法で表

*5 隅上級は『解隱題之法』では用いてないが、『開方翻變之法』および『大成算経』で用いている。

す。計算は右から左へ、上から下へ進める。 $b_n^{(1)} = b_n^{(2)} = \dots = b_n^{(n+1)} = a_n$ とおく。

商	実	方	隔上級	隔		
α	a_0	a_1	$\dots$	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
	$\alpha b_1^{(1)}$	$\alpha b_2^{(1)}$	$\dots$	$\alpha b_{n-1}^{(1)}$	$\alpha b_n^{(1)}$	
	$b_0^{(1)}$	$b_1^{(1)}$	$\dots$	$b_{n-2}^{(1)}$	$b_{n-1}^{(1)}$	$b_n^{(1)}$
		$\alpha b_2^{(2)}$	$\dots$	$\alpha b_{n-1}^{(2)}$	$\alpha b_n^{(2)}$	
		$b_1^{(2)}$	$\dots$	$b_{n-2}^{(2)}$	$b_{n-1}^{(2)}$	$b_n^{(2)}$
		$\dots$	$\dots$			
		$\dots$	$\dots$			
			$b_{n-2}^{(n-1)}$	$b_{n-1}^{(n-1)}$	$b_n^{(n-1)}$	
			$\alpha b_n^{(n)}$			
			$b_{n-1}^{(n)}$	$b_n^{(n)}$		

$b_j^{(1)} = a_j + \alpha b_{j+1}^{(1)}, \quad j = n-1, \dots, 0$
 $b_j^{(2)} = b_j^{(1)} + \alpha b_{j+1}^{(2)}, \quad j = n-1, \dots, 1$
 $b_j^{(n-1)} = b_j^{(n-2)} + \alpha b_{j+1}^{(n-1)}, \quad j = n-1, n-2$
 $b_{n-1}^{(n)} = b_{n-1}^{(n-1)} + \alpha b_n^{(n)}$

このとき、

$$f(\alpha + x) = b_0^{(1)} + x(b_1^{(2)} + x(\dots(b_{n-2}^{(n-1)} + x(b_{n-1}^{(n)} + x(b_{n-1}^{(n)} + x b_n^{(n+1)}))))))$$

となる。『大成算経』では $f(\alpha + x)$ は変式、開盡 ($b_0^{(1)} = 0$) のとき α は實級商と呼ばれている。

組み立て除法により $f(\alpha + x)$ を求める上記の方法は Ruffini-Horner 法である。しかも、係数や商の符号にかかわらないことを例題の中で示している。

7.5 『解隠題之法』得商と『大成算経』課商

開方式が自然数あるいは簡単な有理数の商を持つ場合であっても、商がすぐには求められない場合、『解隠題之法』得商と『大成算経』課商で商を求めるアルゴリズムが与えられている。

表 11 得商と課商の比較

『解隠題之法』得商	『大成算経』卷之三開方第三課商
先立商一自隅命之到實異減同加而實餘者復立商一如前到實逐如此而實盡則所立商相併爲定商	是考商位也凡量最初之商者難考得適數于一般故或先起於一箇數或屬題數而窺其位皆立商數從下命而除之實餘則商不及故逐增其數
或實竊而不能盡立負商如前到實異減同加而實盡則前商相併内併減負商爲定商	乃多少不定任意而增之開之若誤而商太則過諸級反覆而難得同名之後商故立異名商是又隱時斟酌其數也 [以下略]

先ず商一を立て開方を行い、実が零でないときは再び一を立てる。実が零になれば、立てた商すべてを加えたものを商とする。開方を繰り返し実の符号が異なるときは、負商を立てる。

課商では、もう少し一般的に述べている。

7.6 『解隠題之法』得商と『大成算経』窮商

『解隠題之法』得商と『大成算経』窮商では、商が有限小数で表せない場合の開方を述べている。原文を表 12 に示す。

得商の「以之自隅命之」の「之」は次商であるので、ここからは与えられた開方式 (『大成算経』では「原式」) に対し開方を適用している。説明は明瞭になっているがアルゴリズムは同一である。

$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$ に対し、商 x_0 を立て開方を適用した際、

$$f(x_0 + x) = c_0^{(0)} + x(c_1^{(0)} + x(\dots(c_{n-2}^{(0)} + x(c_{n-1}^{(0)} + x(c_{n-1}^{(0)} + xc_n^{(0)}))))))$$

表 12 得商と窮商の比較

『解隱題之法』得商	『大成算経』卷之三開方第三窮商
或實有不盡者以方随開商位數除實而以所得依正負而加減于開商爲次商以之自隅命之到實而如前以方除實而以所得又加減于次商也次第如此而得定商	是究商數畸零之微位開實數有不盡者随開出位數以方除實 乃同名除者定得負數 異名除者定得正數也 以其數依正負加減于開商爲次商以之自原式隅命之至實加減之亦自隅至方加減之以其方随次商位數除其實以得數加減于次商爲三商 或依數有到尾位而生微差者是故爲定商則畧末一位而用之 次第如此得各級定商也

を計算した際、 $|c_0^{(0)}|$ は小さいが零ではないとき

$$x_1 = x_0 - \frac{c_0^{(0)}}{c_1^{(0)}}$$

を計算する。 x_0 の有効桁数が d 桁のときは、 $c_0^{(0)}/c_1^{(0)}$ の有効桁数も d とる。 続いて $f(x) = 0$ に商 x_1 を立て開方を適用し

$$f(x_1 + x) = c_0^{(1)} + x(c_1^{(1)} + x(\cdots (c_{n-2}^{(1)} + x(c_{n-1}^{(1)} + x(c_{n-1}^{(1)} + xc_n^{(1)}))))))$$

としたとき、

$$x_2 = x_1 - \frac{c_0^{(1)}}{c_1^{(1)}}$$

を求める。 この操作を繰り返している。 これは、Newton 法 (Newton-Raphson 法) である。

関孝和の Newton 法の位置づけについては昨年度の研究集会で報告した。 講究録 [16] には I.Newton、関孝和、J.Raphson の数値例も載せてある。

8 関孝和の Ruffini-Horner 法の位置づけ

Ruffini-Horner 法と同等の算法を運算の方法により 3 つに分ける。

開方式 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ (あるいは $b = a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$) に対し、商が $q_010^m + q_110^{m-1} + \cdots + q_m$ の場合を考える。

桁移動 I 型 a_1 を一桁、 a_2 を二桁、 $\cdots$ 、 a_n を n 桁づつ桁移動し、初商 (一位の得商) q_0 を推し計る。 隅上級 (平方式の場合は方または法) に a_nq_0 を加え、術文 (がある場合) には「 a_nq_0 を加え」と記述する。 賈憲『黄帝九章算法細草』を引用したと考えられている [15, p.156] 楊輝『詳解九章算法纂類』増乗方法 [9, 三十九] がこの型である。(詳細は銭 [15, pp.156-160] を見よ。)

桁移動 II 型 a_1 を一桁、 a_2 を二桁、 $\cdots$ 、 a_n を n 桁づつ桁移動し、初商 (一位の得商) q_010^m を推し計る。 隅上級 (平方式の場合は方または法) に a_nq_0 を加え、術文には「 $a_nq_010^m$ を加え」と記述する。 秦九韶『数書九章』卷五尖田求積 [15]、『楊輝算法』田畝比類乗除捷法下卷減從開方はこの型である。 澤口一之『古今算法記』[4] 第二卷帶縱開平方もこの型である。

桁独立型 初商 α_0 を立てる。 隅上級 (平方式の場合は方または法) に $a_n\alpha_0$ を加え、術文には「 $a_n\alpha_0$ を加え」と記述する。

$b = a_1x + \cdots + a_nx^n$ ($b > 0$) は実 (定数項) のみ減算を行い、 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ は全ての項を加算で行う。 建部賢弘は『算学啓蒙詳解大成』において『算学啓蒙』総括の最後の「置積爲實及方廉隅同加異減開之 [積ヲ置キ實ト爲ス。方廉隅ニ及テ同加異減シテ之ヲ開ク]」に対し、「是古法ナリ商ヲ立テ隅ヨリ

乗シテ方級マテハ同加異減シテ實級ニ至テ減スルナリ」と注を付けている。 $b = a_1x + \cdots + a_nx^n$ ($b > 0$) を建部賢弘に従い古法と呼ぶ。

藤原松三郎は、『楊輝算法』減從術と Ruffini-Horner 法との違いについて「桁ノ上ゲ下ゲト、實ノ符號丈ケガ相違シテキルノデアル」[12] と述べている。本論文では、藤原の「桁ノ上ゲ下ゲ」を伴う方法を I 型と II 型に分け、「實ノ符號ガ相違」する方法を「古法」としている。

表 13 Ruffini-Horner 法の分類

	方程式の形	
	古法 $b = a_1x + \cdots + a_nx^n$ ($b > 0$)	新法 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$
桁移動 I 型	楊輝『詳解九章算法纂類』「増乗方法」	
桁移動 II 型	「楊輝算法」田畝比類乗除捷法「減從開方」	秦九韶『数書九章』卷五尖田求積
	澤口一之『古今算法記』[4] 第二卷「帶縱開平方」	
桁独立型		『解隱題之法』得商 Paolo Ruffini([11] より引用)

東アジアでは関以前は、算盤を用い、商は正の数で、各段階で 10 進数で 1 桁ずつ求めていったのに対し、関は筆算により負の商も扱い、得商の最後の例題では 10 進数で 3 桁求めた。ヨーロッパでは、1669 年に I. Newton[2] が $f(x+c)$ を得る際、(Ruffini-Horner 法のかわりに) 二項定理を繰り返し適用し、負の商を扱い各段階で数桁求めた。

9 結論

『解隱題之法』原書に関する以下の試論を述べた。

1. 『解隱題之法』は 1685 年に、『大成算経』に繋がるプロジェクトのために関孝和によって書き下ろされた。
2. 『解隱題之法』原書は『解見題之法』と二篇で一冊であった。
3. 後世、二冊に分冊され内題と識語が加えられた。
4. 現存する『解隱題之法』および『解見題之法』の写本は内題と識語を除いては、原書と大きな違いはない。

研究集会では、『解見題之法』と『大成算経』の対応関係、『解見題之法』の写本についても発表した。紙数を越えたので割愛し、別の機会の述べることにする。

参考文献

原典

関孝和の写本、『大成算経』の写本は本文に記す。

- [1] 東アジア数学史研究会編、関流和算書大成、関算四伝書第二期、勉誠出版、2010
- [2] I. Newton, De analysi per æquationes numero terminorum infinitas, 257-282, Opera quae exstant omnia, Bd 3, F. Frommann, 1964
- [3] 沼田敬忠、小學九数名義諺解、京都大学、179210
- [4] 澤口一之、古今算法記、京都田中庄兵衛、1669、東北大学、岡本刊 035
- [5] 秦九韶、数書九章、東北大学、藤原集書 814
- [6] 建部賢弘、算学啓蒙諺解大成、雒陽書肆、1690、東北大学、林集書 1165

- [7] 建部賢弘、発微算法演段諺解、京都菱屋書肆、1685、東北大学、狩野 7.20571.4
- [8] 建部賢明、建部氏伝記抄録、東北大学、岡本写 1002
- [9] 楊輝、詳解九章算法纂類、宣稼堂叢書、1842
- [10] 楊輝、楊輝算法、児玉明人編、無有奇庵、1966

解説

- [11] F. Cajori, Horner's Method of approximation anticipated by Ruffini, Bull. Amer. Math. Soc., 17(1911), 409-414.
- [12] 藤原松三郎、支那數學史ノ研究 II、東北數學雜誌 47(1940), 35-48.
- [13] 藤原松三郎、日本学士院編、明治前日本数学史第二卷新訂版、野間科学医学資料館、1979 (初版は岩波書店、1956)
- [14] 小松彦三郎、關孝和著『三部抄』山路主住本の復元、京都大学数理解析研究所講究録 1444(2005), 169-202
- [15] 錢宝琮、川原秀城訳、中国数学史、みすず書房、1990
- [16] 長田直樹、英国と日本における Newton 法、数理解析研究所講究録、1677(2010)、243-252
- [17] 佐藤賢一、近世日本数学史 — 関孝和の実像を求めて、東京大学出版会、2005
- [18] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008