数理解析研究所講究録
第1739巻 2011年 168-179

R. Dedekind の数学の基礎付け と 集合論の公理化 †

神戸大学大学院・システム情報学研究科 渕野 昌 (Sakaé Fuchino) *

Graduate School of System Informatics
Kobe University
Rokko-dai 1-1, Nada, Kobe 657-8501 Japan

fuchino@diamond.kobe-u.ac.jp

1 「数の理論を扱かう論理学」の基礎付け

R. Dedekind は，19世紀的視点からの数学の基礎付けという枠組の中で大きな貢献をはたした．しかも，彼のこの仕事は，19世紀的な数学の1つの頂点を形作っただけでなく，20世紀前半における数学の基礎付けの研究の先駆ともなっ

Date: 11. Dezember 2010 (05:08JST)

2010 Mathematical Subject Classification: 01A55, 01A60, 03-03

Keywords: Richard Dedekind, axiomatization of set theory

† Foundation of mathematics by R. Dedekind and the axiomatization of set theory

* Supported by Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No. 21540150 of the Ministry of Education, Culture, Sports, Science and Technology Japan.

本稿は，2010年8月24日に筆者が行なった，RIMS研究集会「数学史の研究」での講演を敷衍したものである．この講演の後，早稲田大学理工学術院数学科の足立恒雄先生（筆者は通常は「先生」という敬称は，使うことも使われることも嫌悪するものであるが，一世代も前，まだ日本の大学の学部で勉強していたころ，足立先生の講義を聴講したことがあり，ここではその意味で（皮肉ではなく）「先生」という敬称を用いさせていただきたい）とこの講演内容とも関連する討論の機会を持ったが，formulation の舌足らずのせいか，うまくこちらの趣旨が伝わらず，議論の行き違いになってしまっていたところがあった．本稿は，そのような行き違いの原因となりうる論述の稚拙を回避しようと真剣に努力した結果でもある．その意味で，本稿の執筆の強い動機を与えていただいた足立先生に深く感謝するとともに，この文章をお読みになった先生が，私の論旨に納得してくださることを切に願うものでもある．

神戸大学システム情報学研究科の菊池誠氏からは，この文章の原稿に対する幾つかの貴重なコメントをいただいた．このことに対し菊池氏に感謝する．

た，という意味において，彼の時代からの未来に対して開かれたものでもあった，と言える．

Dedekind の同時代の数学者たちは，彼の数学の基礎付けに対する寄与を，主に，彼の2つの著書 ([2](1872), [3](1888)) によって知ることとなったが，彼等の多くが，ただちに Dedekind の視点を受け入れた，というわけではなかったようである．このことは，D. Hilbert の次のような回想によっても窺われる:

> *Im Jahre 1888 machte ich als junger Privatdozent von Königsberg aus eine Rundreise an die deutschen Universitäten. Auf meiner ersten Station, in Berlin, hörte ich in allen mathematischen Kreisen bei jung und alt von der damals eben erschienenen Arbeit Dedekinds „Was sind und was sollen die Zahlen?“ sprechen - meist in gegnerischem Sinne. Die Abhandlung ist neben der Üntersuchung von Frege der wichtigste erste tiefgreifende Versuch einer Begründung der elementaren Zahlenlehre. Etwa zu gleicher Zeit, also schon vor mehr als einem Menschenalter, hat Kronecker eine Auffassung klar ausgesprochen und durch zahlreiche Beispiele erläutert, die heute im wesentlichen mit unserer finiten Einstellung zusammenfällt.* (D. Hilbert[(1)], [11])

この文章の，Kronecker への言及は，これを Hilbert が書いた頃の彼の論敵であった Brouwer を意識したもののように思える．そのことは，ここでは引用しなかった，この文章の次のパラグラフでの言明でより明確になる．そのような政治的寓意の認められる文章の歴史資料としての評価には注意が必要かもしれないが，„Rundreise“ の途上にあった若い Hilbert が，Kronecker の牙城ベルリンでの Dedekind の著作の批判的受容の目撃者となり，その記憶が，„Menschenalter“ 以上を経た後年の Brouwer との論争の際に彼の頭をよぎった，という事実には注目してよいであろう．

実際，Dedekind の上記の2つの著書は，彼の同時代の数学者の多くが，ただちに受け入れることを躊躇したとしてもおかしくないような，当時の時代を越えた，新しい視点からの考察に満ちていた，と言うことができる．しかし，逆に，現代の視点から見ると，これらの仕事の内容のうちには，彼の手の内にあった数学的な道具だけを使っても当然もっと先が見えてもよさそうに思えるにもかかわらず，もう一つ前に進めずにいる，という，もどかしい印象を受ける箇所も少なくない．

とは言っても，これは，あくまで現代の視点から振り反って見たときの「傍目八目」のようなものに過ぎない．また，その指摘によって，Dedekind の業績の偉大さにけちをつけるつもりがあるわけではなく，彼がもう一歩進めずにいた点を明確にすることによって，Dedekind の数学の基礎付けに関した仕事の数学史の中での位置や，その科学哲学的視点からの可能な解釈に，より明確な光をあてることができるはずである，と考えるからである．

もちろん，無い物ねだり的な指摘をすることはたやすい．彼の時代には，現代の我々が識るような形式論理はまだ生れてすらいなかった (彼とほぼ同時代の Frege の研究には形式論理学の萌芽のようなものが見られるが，[3] の第2版の前書き (1893) では，Dedekind は，Frege の仕事を後になってからはじめて知ることになったと書いている)．言わんや，形式的推論の体系や，その体系の完全性，そして不完全性定理に基づく知見は，どう頑張ったとしても Dedekind の行なった考察の背景にはなり得なかったはずのものである(2)．

しかし，それだからこそ，Dedekind の „Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt“ (「もっとも単純な科学分野である，数の理論を扱かう論理学の部分の基礎付け」，[3] の初版の前書き，下線は筆者）という表現は注意をひく．

[3] を読み進むと，彼の言う「論理学」は，現代の言葉で言うところの初等的な集合論を包含する厳密な議論のことだったと理解できる．そして，それを Dedekind が「論理学」と理解した，まさにそのために，有理数の全体や実数の全体などの canonical な構造に対してとり得た自由な態度が，集合論の基礎的な部分に関する考察では，十分にはとり得なかったのではないか，とも考えられる．

とはいえ，[3] での集合（彼の用語では „Systeme“）の扱いは，[3] の初版の発行からほとんど二十年以上たってから行なわれることになる Zermelo や Fraenkel による集合論の公理的な再構成を既に予感させるようなものでもある．1930 年代に出版された Dedekind の全集 ([4]) の編集者の一人だった Emmy Noether は，公理的集合論の先駆としての Dedekind の役割について，次のように記している．少し長くなるが，ここには後で論じることになるいくつかの点に関する議論も含まれているし，Dedekind に関する以下のような認識が 1930 年代初頭にすでになされていたことを確認することが必要であるとも思われるので，あえて全文を引用しておくことにする:

> *„Was sind und was sollen die Zahlen?“ ist in zwei Richtungen bahnbrechend geworden, für die Grundlagenforschung und für die axiomatische Mengenlehre. Auf die Bedeutung für die Grundlagenforschung hat*

---

(2)数の概念を集合の概念の上に基礎付けるためには，「集合とは何か何であるべきか」を明確にする必要があり，それを現在知られているような方法で完徹させるには，数理論理学の知識，特に形式的体系の知識が不可欠となる．一般には，この意味での公理的な集合論が確立されたのは，ツェルメロの 1908 年の論文 [18] であるように誤解されていることも多いように思うが，実は，[18] での「公理的集合論」は Halmos [10] が素朴集合論と呼ぶところの（「前期量子論」の名称に習って言えば）前期公理的集合論とでも言えるものであり，分離公理の導入では，Zermelo が “definite Eigenschaften” と呼ぶ，定義の確定されていない概念が用いられているものであった．1 階の論理の上に構築された現代の意味での公理的集合論が導入されたのは，それよりずっと後の，ツェルメロの [19] (1930(昭和 5 年)) においてであった．

erst neuerdings Hilbert wieder hingewiesen (Math. Ann. l04); eine eingehende von E. Zermelo stammende Analyse der Schrift findet sich in dem Nachruf von Landau (Gött. Nachr. 1917). Wie stark die axiomatische Mengenlehre durch Dedekind beeinflußt ist, zeigt ein Vergleich mit den Zermeloschen Axiomen (Math. Ann. 60), die teilweise direkt aus den „Erklärungen“ Dedekinds (§1 der Schrift) übernommen sind. Daß dabei das „Axiom des Unendlichen“ postuliert werden mußte, da der Beweisversuch Dedekinds (66) auf dem widerspruchsvollen Begriff der „Menge alles Denkbaren“ beruht, ist bekaunt; ebenso, daß in die Dedekindschen Überlegungen das Auswahlpostulat hineinspielt (159). Auch der zweite Zermelosche Beweis des Wohlordnungssatzes kann als eine Übertragung des hier gegebenen Beweises für die Möglichkeit der vollständigen Indnktion auf die transfinite Indnktion angesehen werden; dabei mußte allerdings im Transfiniten schon hier das Auswahlaxiom den übrigen, von Dedekind implizit benutzten Axiomen zugefügt werden. Dedekind konnte es für die gewöhnliche vollständige Induktion umgehen, dadurch, daß er die in die Definition des Unendlichen eingehende Abbildung zur Verfügung hatte. Der über den „Beweis“ durch vollständige Induktion hinausgehende Satz von der „Definition“ durch vollständige Induktion (126) ist für das Transfinite scharf herausgearbeitet bei J. v. Neumann (Math. Ann. 99). Der Satz findet insbesondere Verwendung in der Algebra unendlicher Bereiche, entsprechend wie Dedekind die Rechnungsregeln der ganzen Zahlen vermöge Definition durch vollständige Induktion erhält.

Noether(3). ([4])

ここでは，Noether や彼女の学派に受けつがれた Dedekind の抽象代数の定式化や基礎付けの仕事については，触れるだけの余裕はないが，Noether は彼女の代数的研究について，„Es steht alles schon bei Dedekind“ （全部デデキントが書いたものに既に出ている）と口癖のように言っていたということである ([12]).

2 集合 (Systeme) と写像 (Abbildungen)

[3] においては，写像の概念は，現代の日本の高校の数学の教科書で見られるような “定義” によって導入されている:

21. Erklärung). Unter einer Abbildung φ eines Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heißt und mit $\varphi(s)$ bezeichnet wird;* $\cdots$ (Dedekind(4), [3]).

現代の記法を用いると，自然数の全体は，[3] では，(a) 無限集合 X を1つとり，(b) それが Dedekind の意味で無限集合となっていることの witness となっている上射でないが単射となっているような写像 $f: X \to X$ と，$x \in X \setminus f[X]$ を固定して，$\{x\}$ の f に関する closure N — 単純無限的体系 („einfach unendliches System“) をとり，(c) これを $\mathbb{N}$ （の1つの表現）として定義するという手順で導入される．ここで，(d) $1 = x$ ($0 = x$ ではない！)，$n = \underbrace{f(f(\cdots(f(}_{n-1 \text{ times}}x\underbrace{)\cdots)}_{n-1 \text{ times}}$ として，数表記と N の要素が対応づけられ，したがって f は N 上の successor operation を体現することになり，(e) このベースの上で，現在では，デデキント=ペアノの公理系と呼ばれている自然数の体系[5]の満たすべき基本性質が成り立つことを示し（特に完全帰納法や再帰法が成り立つことを厳密に示している），(f) このような，体系の範疇性を示している．

単純無限的体系 N が導入された後，[3] での (d), (e), (f) に関する議論は，今日の数学のスタンダードから見ても十分に厳密なものといえる．だが，その前に，ここでまず問題とすべきなのは，そもそも，なぜこのような定義による単純無限的体系を，Dedekind が，自然数の全体の集合の基礎付けとなると考えたのか，ということであろう．しかし，これは，[2] でもスケッチされているような，Dedekind の Habilitationsschrift [1] で最初に表明された，彼の数の体系の構成に対する考察を参照することで説明ができるように思われる．ここでは，数の体系の拡張は，既に構成された数の体系上の加法や乗法などの自然な演算の逆演算などとして導入される新しい演算に関する，体系の外に向っての closure として導入されることで得られている．しかもそこでは，拡張がこのような操作によって得られているというまさにその事実が，その拡張が自然な正当なものであることの保証とみなされている．

単純無限的体系 N の導入でも，X の “次の要素” をとる，という，無限集合 X に内在する（ものと Dedekind が考えていると解釈のできる）X の無限性を体現するところの写像 φ を用いて，それに関する closure として，自然数の全体を定義している，と考えると，[3] でのような N の定義が，演算操作に関する closure による数の体系の拡張，という路線の始点に座りよく置かれることになることが確認することができるのである．

更に，関数や写像を，体系 („Systeme“) に内在する代数的な操作や演算と考える，という Dedekind がとっていたであろう視点のあり方を意識することで，一方で，19 世紀的な意味では完全に一般的な写像の定義を与えながら，その定義の問題点であるところの，そこで言われている “Gesetz” とはそもそも

---

[5]範疇性が示されていることからも分るように，この「自然数の体系」は，現在 first-order Peano arithmetic と呼ばれている公理系ではなく，(集合論の中で考えて) 自然数の集合すべてに対する形での帰納法が仮定されているものである．

何なのか，という問題には全く触れず，集合と写像の二元論的な議論となっていることに問題を感じず，しかも，無限集合の存在には気を配りながら，写像の存在の問題には全く言及しない，というような，現代の我々が Dedekind の議論の欠陥やバランスの悪さと感じる点に対する説明ないし釈明も与えられるのではないだろうか．

このことはまた，Dedekind が写像の集合（写像を集めてできる集合）という考え方を避けているように思えることとも符合するし，Cantor による実数の導入と自分の導入を比較して，

> *Welchen Nutzen aber die wenn auch nur begriffliche Unterscheidung von reellen Zahlgrößen noch höherer Art gewähren wird, vermag ich gerade nach meiner Auffassung des in sich vollkommenen reellen Zahlgebietes noch nicht zu erkennen.* (Dedekind(6), [2]).

といって，それらの同等性を認めながら，なぜ，実質的に $\mathbb{N}$ 上の関数の集合を考察する必要の出てくる Cantor の構成法ではなく，自分の構成法の方をより良いものと考えたのか，ということの説明にもなりそうである．

写像をグラフとして見ることで，写像の存在を集合のそれに帰着させ，集合のみを用いた一元論的な集合論が展開できる，というアイデアは，遅くとも Zermelo [18] (1908) で明確に表明されている．順序対に関する厳密な議論は，[2] にも見られるので，この集合と写像の二元論を回避するトリックに Dedekind が気付いてもおかしくなかったという気もするのであるが，上で述べたような意味で，Dedekind にとってこの二重性の回避は全く必要のないものとして認識されていた，ないしは彼が思い描いていた「システム」と写像との関係のために認識すらされていなかった可能性があり，しかも，解析学から幾何学的直観を分離する，ということが [2] での数学の厳密化の1つの目標であった Dedekind にとっては，幾何学由来ともとることのできるグラフのアイデアを採用することはあり得なかった，という事情もあったのではないかと考えられる．

3　無限の存在証明

単純無限的体系によって自然数の全体の体系の基礎付けがなされうるためには，そもそも無限集合の存在が大前提となる．しかも，これが，「数の理論を扱かう論理学の部分の基礎付け」としてなされるためには，無限集合の存在が無条件に証明できなくてはならない．

この事情が，[3] の第3版 (1911) の前書きで

> *Als ich vor etwa acht Jahren aufgefordert wurde, die damals schon vergriffene zweite Auflage dieser Schrift durch eine dritte zu ersetzen, trug ich Bedenken, darauf einzugehen, weil inzwischen sich Zweifel an*

der Sicherheit wichtiger Grundlagen meiner Anffassung geltend gemacht hatten. (Dedekind[7], [3])

と書きながらも，晩年の Dedekind が，無限の存在証明 ([3] の 66.) の残ったままのテキストをこの再版に回してしまったことの背景だったのではないだろうか．

ただし，Dedekind の名誉のために付け加えておくと，1911 年の時点では，無限の存在が集合論の他の公理から独立であることは，当時の若い集合論の研究者たちすら，まだ完全には把握しきれていなかった可能性がある．たとえば，Zermelo の公理系とよばれることになる体系の原形は Zermelo の 1908 年の論文 [18] で発表されているが，その初めで，Zermelo は，

In der hier vorliegenden Arbeit gedenke ich nun zu zeigen, wie sich die gesamte von G. Cantor und R. Dedekind geschaffene Theorie auf einige wenige Definitionen und auf sieben anscheinend voneinander unabhängige „Prinzipien" oder „Axiome" zurückführen läßt. (Zermelo[8] [18], 下線は筆者による)

と書いているし，Zermelo の公理の命題の間の独立性についての，より踏み込んだ議論は，Fraenkel の 1922 年の論文 [7] までなされていないように思えるからである．

無限公理（無限集合の存在を主張する公理）の集合論の他の公理からの独立性は（集合論のすべての公理を含む体系の中で），

$\mathcal{H}(\omega)$ (hereditarily finite な集合の全体) と，この上に $\in$ 関係を制限したものの組からなる構造を作ると，そこでは，無限公理以外の集合論のすべてが成り立つことが確かめられ，そのことから「集合論の公理系が無矛盾なら，集合論の公理系から無限公理を除いた体系から無限公理は導かれない」ことが導かれる

として示すことができる．もちろん,「集合論の公理系が無矛盾なら」は，不完全性定理以降の時代に生きる我々の後知恵であるが[9]，Fraenkel が [7] で行なっているような直観的な証明は，Dedekind の時代でも可能であったように思える．しかも，モデルを作ることで公理の間の分離を示す，というまさにそのような議論は，Dedekind の [3] の第 1 版の序文の中で，初等幾何学の公理から空間の連続性が導きだされるわけではないことを注意している次のような個所で，用いられているものである:

---

[9] 実は，$\mathcal{H}(\omega)$ は $\mathbb{N}$ にコードすることができるので，この主張の前提としては，PA (1 階のペアノの公理系) か，それよりさらに弱い公理系の無矛盾性の仮定で十分である．

> ··· *vielmehr habe ich in § 3 meiner Schrift verschiedene Gründe angeführt, weshalb ich die Einmischung der meßbaren Größen gänzlich verwerfe, und namentlich am Schlusse hinsichtlich deren Existenz bemerkt, daß für einen großen Teil der Wissenschaft vom Raume die Stetigkeit seiner Gebilde gar nicht einmal eine notwendige Voraussetzung ist, ganz abgesehen davon, daß sie in den Werken über Geometrie zwar wohl dem Namen nach beiläufig erwähnt, aber niemals deutlich erklärt, also auch nicht für Beweise zugänglich gemacht wird. Um dies noch näher zu erläutern, bemerke ich beispielsweise folgendes. Wählt man drei nicht in einer Geraden liegende Punkte A, B, C nach Belieben, nur mit der Beschränkung, daß die Verhältnisse ihrer Entfernungen AB, AC, BC algebraische *) Zahlen sind, und sieht man im Raume nur diejenigen Punkte M als vorhanden an, für welche die Verhältnisse von AM, BM, CM zu AB ebenfalls algebraische Zahlen sind, so ist der aus diesen Punkten M bestehende Raum, wie leicht zu sehen, überall unstetig; aber trotz der Unstetigkeit, Lückenhaftigkeit dieses Raumes sind in ihm, so viel ich sehe, alle Konstruktionen, welche in Euklids Elementen auftreten, genau ebenso ausführbar wie in dem vollkommen stetigen Raume; die Unstetigkeit dieses Raumes würde daher in Euklids Wissenschaft gar nicht bemerkt, gar nicht empfunden werden.* (Dedekind[(10)], [3]).

その意味でも，Dedekind が無限公理を要請として付け加えることの必要性が見えなかったことの理由は，彼の手のうちにあった数学技法がそれに必要となる成熟に達していなかった，ということであるより,「論理」としての集合（論），あるいは Dedekind の言うところの Systeme の理論に彼が想定した，あるべき状況と，数学的 “真実” とのずれによるものであった，と解釈すべきことであるように思える．

4　蛇足としての結語

前節で引用した Zermelo の文章にもあるように，Cantor と Dedekind は集合論の創立者として並び称されることが多いが，Cantor が晩年，次第に「純粋集合論」とでも呼ぶべき，いわば集合論のための集合論を黙考していったのに対し，Dedekind の集合論は，あくまで「普通の」数学の基礎付け，あるいは「普通の」数学そのものとしての集合論であった．このことは，第 1 節で引用した Noether の文章の後半でのリマークにもかかわらず，Dedekind が transfinite induction に関する議論に全く興味を示していないようにみえることにも窺われる．

しかし，これは，transfinite induction が当時の「普通の」数学ではほとんど使われることがなかった，という状況を反映しているだけであり，transfinite induction を用いる議論が「普通の」数学で活躍する余地を持たない，ということでは全くない．実際，代数的な議論に限ってみても，たとえば「ooo という性質を持つ群はすべて xxx を満たす」というタイプの主張の証明のために，群の濃度に関する帰納法 (もちろんこれも transfinite induction の一種である) が，強力な手段となることは，20 世紀後半の数学，特に Saharon Shelah による多くの目をみはるような成果により立証されたと言ってよいように思える (たとえば，Shelah に捧げられた [6] や， Shelah 自身による [15] や [16] などを参照).

いささか我田引水のきらいもあるが，より身近な例としては，私自身，最近になって，10 数年来部分解から先に進めず未解決になっていた問題に，[8] で完全な答を与えることに成功したが，この仕事でも，証明の大筋は,「ooo という性質を持つ無限ブール代数はすべて xxx を満たす」という形の命題を，ブール代数の濃度に関する transfinite induction を用いて（拡張された集合論の公理系のもとで）示す，というものであった．

集合論の基礎に関して Dedekind の越えられなかった壁は，Zermelo や Fraenkel が易々と越えることができたが，この Zermelo も後に Gödel の不完全性定理を全く理解できず，不完全性定理以降の数学の発展に取り残されることになった ([5])．1960 年代に強制法の理論が確立されたときにも，この手法を理解できなかったことで，多くの集合論の研究者が脱落していった．

集合論の研究の内部でも，Cantor と Dedekind の集合論について述べたような,「純粋集合論」と「数学としての集合論」の間の大きな分離は早い時期から見られたが，20 世紀の終りごろから，この 2 つの集合論の潮流が合流し，新しいパラダイムが生れつつあるように見える．その流れの中で，決定性公理の consistency strength の決定など，いくつかの重大な未解決問題が解かれてきている．

このような新しい大きな動きのなかで，流れに取り残されず，次のステップに進んで大きな仕事ができるかどうかは，既に半世紀以上を生きた（老）数学者にとっては実に切実な難問である．私自身，そのような数学者，集合論の研究者の一人として，この危機を乗り越えようとするにあたって，過去の数学者の置かれていた状況やそれに対する彼等の対応の歴史的，精神史的な分析が,（多少なりとも）何らかの教訓というような形での moral support を得与えてくれることは有り得るのではないか，と期待するものである．

5 引用した独文の日本語訳

以下に，参考のため本文で引用したドイツ語の文章の（筆者による）日本語訳を挙げておくことにする．以下の訳文のうち [2] と [3] に関するものについては，出版の予定されている [9] に収録予定の訳文を用いている．

(1) 1888年に，ケーニヒスベルク出の若き私講師として私はドイツの大学を巡る旅に出た．最初の訪問地ベルリンでは，どの世代の数学者の集まりでも，ちょうどそのころに出版されたデデキントの「数は何か何であるべきか」が（多くの場合批判的な意味で）話題にのぼっていた．この論著はフレーゲの研究と並んで，初等数論の基礎付けの最初の本格的な試みとして最も重要なものである．ほぼ同じころ，つまり，もう一世代以上も前に，クローネカは，多くの例も挙げて，今日では，我々の有限の立場と本質的には同等な見解を高らかに宣言した．

(3) 「数とは何か何であるべきか?」は，2つの発展の方向，数学の基礎付けの研究と公理的集合論にとって，先駆的なものであった．基礎付けの研究に対する，この著書の意味については，最近になってヒルベルトが再び指摘している (Math. Ann. 104 [訳注: 文献表の [11]]) E. Zermelo による著書の分析は，ランダウによる追悼文 (Gött. Nachr. 1917) に見出すことができる．公理的集合論が，いかに強くデデキントの影響を受けたかは，ツェルメロの公理系 (Math. Ann. 60 [訳注これは 65, つまり文献表の [18] の誤りであろう]) と比較して，これが部分的にはデデキントの「解説」(著書の §1) から直接とってきたものになっていることなどを見れば明らかである．ただし，デデキントの無限の存在証明 (66) が「考えられるものすべてからなる集合」という矛盾を含んだ概念に基いているため,「無限公理」を要請する必要があることは，よく知られており，また，デデキントの考察では，選択公理が紛れ込んでしまっているところがある (159). ツェルメロの整列可能性定理の証明は，そこで与えられている，完全帰納法が可能であることの証明の，超限帰納法への転用と見られる．この際には，もちろん，超限の側では選択公理が，他のデデキントが隠伏的に用いた公理に加えて用いられなければならないわであるが．デデキントは，通常の完全帰納法では，無限の定義で本質的なものとして与えられている写像を用いることができたことで，この公理を避けて通ることができたのである．完全帰納法の「証明」をさらに進めた完全帰納法による定義の定理 (126) は，J. v. Neumann (Math. Ann. 99) によって，超限向って緻密な一般化がなされている．この定理は，特に，デデキントが整数の計算則を完全帰納法によって得ることができたことのような形で，無限領域の代数での応用を持つ．ネーター．[訳注，ネーターの文中，括弧内の数字は，„Was sind und was sollen die Zahlen“ の段落に振られた通し番号である．]

(4) 21. 解説*)．システム上の写像 φ とは，S からとった各要素 s に対し，特定の物が対応するような法則のことを言う．このような物は s の像と呼ばれ，$\varphi(s)$ によって表わされるものとする; $\cdots$

(6) しかし，それ自身の中で完全であるところの実数の領域に対する私の理解からは，より高次の概念での相違にすぎないものが何らかの影響を及ぼすとは思えないのである．

(7) 8年前に，当時すでに売り切れになっていた第2版を第3版で置き換えることを要請されたときに，それを躊躇したのは，この間に私の見解の重要な基礎の確実性に疑念が生じたからであった．

(8) 私はここに上梓した論文で，G. Cantor と R. Dedekind によって創造された理論が，ほんの数個の定義と，7つの，互いに独立であると思われる「原理」あるいは「公理」に帰着されることを示そうと思う．[訳注: 下線は筆者（訳者）による]

(10) $\cdots$ さらに言えば，私の著書の §3 で，私がなぜ測定値の概念が紛れ込むのを阻止しようとしているのかを，複数の理由をあげて説明したが，その最後のところで，その存在に関して，幾何学に関する文献では，連続性については，話の序でにその言葉が出てはくるが，それについて明確に説明されることはなく，証明で用いられることもない，と注意した．このことをさらに詳しく説明するために，次のような例をあげてみたい．一直線上にない3点 A, B, C を，それらの距離 AB, AC, BC の比が代数的数 *) になるように，しかしそれ以外は全く任意

に選び，空間の点 M として AM, BM, CM の比がやはり代数的数になるようなものだけを見ることにする．これらの M からなる空間は，容易に分るように，いたるところで不連続である．しかし，この空間のこのような不連続性，不完全さにもかかわらず，私の理解する限りにおいて，ユークリッド原論に現れるすべての構成が完全に連続な空間でと同じように遂行できる．つまりこの空間のこのような不連続性については，ユークリッドの幾何学は全く気がつかないし，認識することもできないわけである．

参照文献

[1] R. Dedekind, Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik, (1854): reprinted in [4].

[2] R. Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahalen, Vieweg, Braunschweig (1872).

[3] R. Dedekind, Was sind, und was sollen die Zahlen?, Vieweg, Braunschweig (1888).

[4] R. Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, R. Fricke, E. Noether, and O. Ore, eds., 3 Vols., Brunswick, (1930-1932).

[5] J.W. Dawson,Jr., Logical Dillemmas, the life and work of Kurt Gödel, A K Peters (1997).

[6] P. Eklof and A. Mekler, *Almost Free Modules: Set-theoretic methods*, North-Holland Publishing Company (1990).

[7] A. Fraenkel, Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre, Mathematische Annalen Vol. 86, 230–237 (1922).

[8] S. Fuchino and A. Rinot, Openly generated Boolean algebras and the Fodor-type Reflection Principle, to appear in Fundamenta Mathematicae.

[9] 渕野昌，[2], [3] の日本語訳（新訳），in preparation.

[10] P. Halmos, Naive set theory, Princeton, NJ, D.Van Nostrand Company (1960).

[11] D. Hilbert, Die Grundlegung der elementaren Zahlenlehre, Mathematische Annalen Vol. 104, No. 1 (1931), (1927 年 7 月にハンブルクの数学セミナーで Hilbert の行なった招待講演に基づく論文).

[12] C. McLarty, Emmy Noether's 'Set Theoretic' Topology: From Dedekind to theRise of Functors, in: J. Gray and José Ferreirós (ed.s), *The Architecture of Modern Mathematics: Essays in history and philosophy*, Oxford, 2006, 211–35.

[13] 野本和幸，R. デデキントの数論 (1)「無理数論」— 論理主義の一出発点，創価大学人文論集，(2010).

[14] E. Reck, Dedekind's Contributions to the Foundations of Mathematics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, (2008).
`http://plato.stanford.edu/entries/dedekind-foundations/`

[15] S. Shelah, Classification theory and the number of nonisomorphic models, 2nd ed., North Holland (1990).

[16] S. Shelah, Non structure theory, in preparation (several chapters are now available in pdf form).

[17] W. Sieg and D. Schlimm, Dedekind's analysis of number: systems and axioms, Synthese 147(1), 121-170 (2005).

[18] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre, Mathematishce Annalen Vol. 65, 261–281 (1908).

[19] E. Zermelo, Über Grenzzahlen und Mengenbereiche, Fundamenta Mathematicae, Vol. 16, 29–47 (1930).