

道路着色問題と整数径数のランダムウォークについて

矢野孝次⁽¹⁾ (神戸大理) 安富健児 (立命館大理工)

道路着色問題とは、有限有向グラフであって出次数一定なものについて、道路をうまく塗り分けることで同期させるようにできるかという問題である。Adler–Goodwyn–Weiss [1] は強連結かつ非周期ならば可能であると予想したが、この予想は 30 年越しに Trahtman [8] により肯定的に解決した。

講演では、道路着色定理を用いて、「有限状態マルコフ連鎖が混合的ならば整数径数のランダムウォークによって実現できる」という結果 [11] を紹介した。整数径数のランダムウォークの問題は、Diaconis–Freedman [3] によるランダム関数列の反復、および高橋 [7] によるノイズに擾動された自己同型の反復に見られる。本稿では、以上の内容について簡単に紹介したい。

なお、[11] の研究は離散時刻 Tsirelson 方程式 (Tsirelson [2], Yor [13]) の類似でもある。このこと背景については [10] および [12] を参照されたい。

1 ランダム関数列の反復

Diaconis–Freedman [3] に基づいてランダム関数列の反復について述べる。

1.1 前進反復

状態空間 S と、 S を S に写す関数族 \mathcal{X} が与えられたとする。但し、族 \mathcal{X} には何らかの可測構造が入っているものとする。 \mathcal{X} 上の確率測度 μ を与え、 μ を共通の分布とする IID (i.e., 独立同分布確率変数列) $(f_n)_{n=1,2,\dots}$ を考える。このとき、初期値 $x \in S$ に対して、確率過程 $(Z_n)_{n=0,1,2,3,\dots}$ を

$$Z_0 = x, \quad Z_1 = f_1(x), \quad Z_2 = f_2 \circ f_1(x), \quad Z_3 = f_3 \circ f_2 \circ f_1(x), \dots \quad (1.1)$$

と定める。あるいは帰納的に

$$Z_0 = x, \quad Z_n = f_n(Z_{n-1}) \text{ for } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.2)$$

と定めると言っても同じである。こうして定まる確率過程 $(Z_n)_{n=0,1,2,3,\dots}$ を前進反復 (forward iteration) と呼ぶ。前進反復は (時間的に一様な) マルコフ連鎖となる。実際、

$$P(Z_n \in A | Z_{n-1} = x_{n-1}, \dots, Z_1 = x_1) = P(Z_n \in A | Z_{n-1} = x_{n-1}) \quad (1.3)$$

$$= \mu(f \in \mathcal{X} : f(x_{n-1}) \in A) \quad (1.4)$$

⁽¹⁾E-mail: kyano@math.kobe-u.ac.jp

URL: <http://www.math.kobe-u.ac.jp/~kyano/>

が成り立ち、未来の動きは現在のみで決まり過去に依存しない。

ここでは、 Z_n の分布が定常分布に収束する場合に興味がある。例えば混合性のような強いエルゴード性があればそうなる。但し、この収束は分布の収束であって、定常分布が一点分布となる特殊な場合を除けば、**概収束** (確率1での収束) していないことに注意しておく。

1.2 後退反復

後退反復 (backward iteration) $(Y_n)_{n=0,1,2,3,\dots}$ を以下のように定義する。固定した $x \in S$ に対し、

$$Y_0 = x, \quad Y_1 = f_1(x), \quad Y_2 = f_1 \circ f_2(x), \quad Y_3 = f_1 \circ f_2 \circ f_3(x), \dots \quad (1.5)$$

で定める。前進反復との違いは関数を合成する向きが逆になっているところであり、後退反復は漸化式によって定義できず、マルコフ連鎖にもならないことに注意する。ところが前進反復が一般に概収束しないのと対照的に、後退反復は概収束することがある。最初に選んだ点 $x \in S$ の依存を明示するために $Y_n = Y_n(x)$ と書こう。Diaconis–Freedman [3, Proposition 5.1] は次の定理を示した。

定理 1.1 ([3]). (S, ρ) を完備可分距離空間とする。関数族 \mathcal{X} の各元 f は S 上 Lipschitz 連続であるとし、その Lipschitz 定数を K_f と書く。次の三条件を仮定する：

- (i) K_f の分布関数は $+\infty$ で冪減衰。
- (ii) ある点 $x_0 \in S$ に対して、 $\rho[f(x_0), x_0]$ の分布関数は $+\infty$ で冪減衰。
- (iii) $\int_x (\log K_f) \mu(df) < 0$.

このとき、確率1で、 $Y_n(x)$ は $n \rightarrow \infty$ として x に依らないある確率変数に指数的な早さで収束する。

定理の仮定 (i), (ii) における冪減衰とは次の意味: $[-\infty, \infty)$ に値を取る確率変数 U が $+\infty$ で冪減衰であるとは、ある正定数 α, β が存在して任意の $u > 0$ に対し $P(U > u) < \alpha u^{-\beta}$ なることを言う。例えば、 U が可積分であれば $\beta = 1$ で満たされる (Chebyshev の不等式)。

定理の仮定 (iii) は**平均的な縮小性 (contracting on average)** を保証する。実際、 $K_f \geq 1$ となる可能性はあるが、その可能性は $K_f < 1$ なる可能性に比べて小さいことを意味している。

1.3 整数径数のランダムウォーク

ランダムウォークと通常呼ばれるものは、 \mathbb{Z}^d 上の確率過程 $(Z_n)_{n=0,1,2,\dots}$ であって

$$Z_0 = x, \quad Z_n = \xi_n + Z_{n-1} \text{ for } n = 1, 2, \dots \quad (1.6)$$

で定義されるものを指す。ここで $x \in \mathbb{Z}^d$ は初期値であり, $(\xi_n)_{n=1,2,\dots}$ は \mathbb{Z}^d に値をとる IID である。§1.1 で述べたランダム関数列の前進反復は, 通常のランダムウォークの拡張と考えることができる。

そこで, 径数を非負整数から整数全体に広げたものを考えよう。状態空間 S は完備可分距離空間とし, S 上の関数族 \mathcal{X} は可測空間とする。

定義 1.2. μ を \mathcal{X} 上の確率分布とする。確率過程の組 $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ が (整数径数の) μ -ランダムウォークであるとは, 以下が成り立つことを言う:

- (i) $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は S 値の確率過程。
- (ii) $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は \mathcal{X} 値の IID で共通の分布 μ を持つ。
- (iii) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し, X_k は過去 $\{X_j, f_j : j \leq k-1\}$ と独立。
- (iv) 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対し, $X_k = f_k(X_{k-1})$ が成り立つ。

定理 1.1 は μ -ランダムウォークの存在を保証する。実際, μ を共通の分布として持つ IID $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を考え, $x \in S$ を一つ固定し, $k \in \mathbb{Z}$ に対し

$$X_k := \lim_{n \rightarrow \infty} f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_{k-n}(x) \quad (1.7)$$

と定めると, 右辺の極限は概収束する。定義により, X_k は共通の分布 λ を持ち, 漸化式

$$X_k = f_k(X_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (1.8)$$

を満たすことがわかる。また, このことから条件 (iii) の成立も明らかである。

次節以降のために, μ -ランダムウォークについての一般的な注意を与えておこう。

(i) 状態空間 S や μ に何の仮定もなければ, 与えられた μ に対する μ -ランダムウォークの存在や一意性は一般に成立しない。実際, 上で述べた通常のランダムウォークの対応物は自明なものを除いて存在しない。特別な場合として, 状態空間 S がコンパクトならば存在が保証される。

(ii) μ -ランダムウォーク $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ が存在したとすれば, $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は (整数径数の) マルコフ連鎖である。実際,

$$P(X_k \in A | X_{k-1} = x_{k-1}, \dots, X_{k-n} = x_{k-n}) = P(X_k \in A | X_{k-1} = x_{k-1}) \quad (1.9)$$

$$= \mu(f \in \mathcal{X} : f(x_{k-1}) \in A) \quad (1.10)$$

が成り立っている。従って特に, μ -ランダムウォークはマルコフ連鎖の特別な場合である。

(iii) μ -ランダムウォーク $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ の定める $S^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{X}^{\mathbb{Z}}$ 上の分布の全体を \mathcal{P}_μ と書くと, それは $S^{\mathbb{Z}} \times \mathcal{X}^{\mathbb{Z}}$ 上の確率測度全体の凸部分集合になっている。

(iv) μ -ランダムウォーク $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ において各 X_k がランダム関数列 $\{f_j : j \leq k\}$ について可測であるとき, **strong** であるという (確率微分方程式論の言葉を流用している; cf. [10])。 μ -ランダムウォークが strong であることは, それを IID $(f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ から構成することができる, ということを意味する。上記の (1.7) の場合はまさに strong な場合である。Strong な μ -ランダムウォークの定める分布は \mathcal{P}_μ の端点になっている (cf. [10])。

2 ノイズに摂動された自己同型の反復

この節では高橋 [7] の結果を紹介しよう。次のような確率方程式を考える。状態空間を局所コンパクトかつ可算基を持つアーベル群 G とし、 ϕ を G の自己同型とする $(\xi_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を共通分布 ν を持つ G 上の IID として、確率過程 $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ の方程式

$$X_k = \xi_k \phi(X_{k-1}), \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

を考える。但し、その解とは各 X_k が過去 $\{X_j, \xi_j : j \leq k-1\}$ と独立なものを意味する。関数族 $\mathcal{X} = \{g\phi(\cdot) : g \in G\}$ 上の確率測度 μ を

$$\mu(A) = \nu(g \in G : g\phi(\cdot) \in A) \quad (2.2)$$

によって定義すれば、この確率方程式の解とは μ -ランダムウォークに他ならない。

G の指標全体のなす群を Γ と書く。次の定理は安定方向と不安定方向の分解を指標の言葉で論じたものと考えられる。

定理 2.1 ([7]). G 上の確率測度 ν に対し、

$$\Gamma_\nu = \left\{ \chi \in \Gamma : \prod_{k=m}^{\infty} |\nu(\chi \circ \phi^k)| > 0 \text{ for some } k \right\} \quad (2.3)$$

および

$$G_\nu = \{g \in G : \chi(g) = 1 \text{ for all } \chi \in \Gamma_\nu\} \quad (2.4)$$

とおく。このとき G_ν は閉部分群であり、商群 G/G_ν に属するある元 $\alpha(\nu)$ が存在して、任意の $a \in \alpha(\nu)$ に対し

$$\nu \left(\bigcap_{\chi \in \Gamma_\nu} W^s(a, \chi, \phi) \right) = 1 \quad (2.5)$$

が成り立つ。但し、 $W^s(a, \chi, \phi)$ は χ 方向の安定集合と呼ばれ次で定義される：

$$W^s(a, \chi, \phi) = \left\{ x \in G : \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\chi(\phi^k x)}{\chi(\phi^k a)} = 1 \right\}. \quad (2.6)$$

次の定理は、 μ -ランダムウォークが G_ν の方向 (それは不安定な方向と考えられるだろう) には一様に広がってしまうことを示す。

定理 2.2 ([7]). 任意の μ -ランダムウォークに対し、各 X_k の分布は G_ν -不変である。

$G = G_\nu \oplus G/G_\nu$ の分解によれば、あとは G/G_ν 方向の挙動が分かればよいことがわかる。ここで、 G がトーラスの場合に限って考える。 G/G_ν もまたトーラスに同型であることが知られているから、初めから $\Gamma_\nu = \Gamma$ の場合、すなわち全ての方向が安定方向になっている場合、にどうなるかを調べれば十分である。

定理 2.3 ([7]). G をトーラスとし, $\Gamma_\nu = \Gamma$ と仮定する. このとき, \mathcal{P}_μ の任意の端点において, ある定数 $a \in \alpha(\nu)$ と $c \in G$ がとれて次が成り立つ:

$$X_k = \phi^k(c) + \lim_{l \rightarrow -\infty} \sum_{j=l}^k \phi^{k-j}(\xi_j + a) + \sum_{j=k+1}^0 \phi^{k-j}(a), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.7)$$

ここで, 右辺第 2 項の極限は概収束している.

関連する最近の研究に Raja [5] がある.

3 道路着色と有限状態のランダムウォーク

3.1 道路着色問題

道路着色問題 (road coloring problem) とは, 位相的エントロピーの等しい 2 つの位相力学系の同値性を示した Adler-Goodwyn-Weiss [1] の論文の中で提示された問題である. 彼らは重複する道路を許していないが, ここでは少し拡張した形で道路着色問題を述べる.

まず, 有向グラフが与えられたとする. 有向辺 (directed edge) あるいは矢 (arrow) と呼ぶのが通常のところを, ここでは (一方通行の) 道路 (road) と呼ぶことにする. 重複する道路があってもよいし, ループ (始点と終点が一致する道路) があってもよい.

有向グラフが出次数一定とは, 各サイトから同じ本数 (d 本とする) の道路が延びていることを言う. そこで, d 色の異なる色を用意して, 各サイトから延びる d 本の道路を異なる色で塗り分ける. これを道路着色と呼ぶ. もちろん, 道路着色の仕方は一通りではない. 例えば, 図 2 と図 3 は同一の有向グラフの道路を異なる仕方で塗り分けたものである.

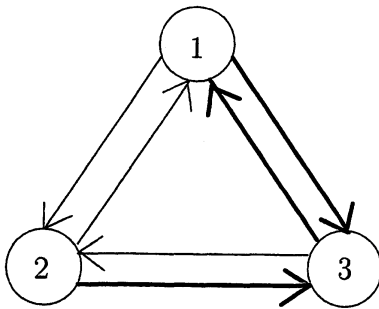


図 2. Synchronizing

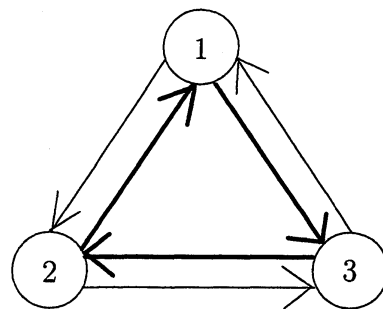


図 3. Non-synchronizing

図 2 と図 3 において, 太い道路を赤, 細い道路を青と呼ぶことにしよう. 図 2 と図 3 では次のような違いがある. 図 2 においては, 「青赤」の順で道路を渡ることによって, どのサイトから出発してもサイト 3 に到達する. このように, うまい色の列で動き方を指定するとどのサイトから出発しても同一のサイトに到達するようになるとき, この道路着色は synchronizing であると言う. 容易にわかるように, 図 3 の道路着色が synchronizing でない.

(未着色の)有向グラフが強連結であるとは、任意に選んだ2つのサイト x, y に対し、 x から出発して y に至る行き方が存在することを言う。非周期であるとは、任意の点 x に対し、サイクル (x から出発して x に戻る行き方) の長さの最大公約数が 1 であることを言う。道路着色問題とは以下の問題で、Trahtman [8] により最終的に解決された。

定理 3.1 ([8]). 出次数一定の有向グラフが強連結かつ非周期ならば、synchronizing な道路着色が存在する。

3.2 写像分布から決まるランダムウォーク

有限集合 V を考え、 V を V に写す関数の全体を Σ と書く。状態空間を $S = V$ 、関数族を $\mathcal{X} = \Sigma$ として、 Σ 上の確率測度 (写像分布) μ に対する μ -ランダムウォークを考えたい。このとき、 μ の support を $\{\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(d)}\}$ と書けば、出次数一定の有向グラフが対応する。また、 $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(d)}$ の一つひとつを道路の色と考える。このことにより、 μ -ランダムウォークとは、ランダムな色に従ってサイト上を動く確率過程であると言える。

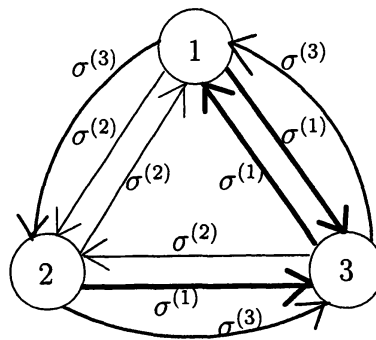


図 1. $\text{Supp}(\mu) = \{\sigma^{(1)}, \sigma^{(2)}, \sigma^{(3)}\}$

写像分布 μ に対応する出次数一定の有向グラフが強連結かつ非周期であると仮定する。このとき、 μ -ランダムウォークは存在して (分布の意味で) 一意である。この事実は、マルコフ連鎖に関する Perron-Frobenius の定理を用いれば容易に示される。

写像分布 μ に対応する道路着色が synchronizing であるとき、単に μ が synchronizing であると言うことにする。このとき、strongness の問題は次のように簡潔に特徴づけられる。

定理 3.2 (Yano [9]). μ -ランダムウォークが strong であるための必要十分条件は、 μ が synchronizing なることである。

注 3.3. 写像分布 μ に対応する有向グラフが強連結だが周期的な場合は、 μ -ランダムウォークは一意でないが、 \mathcal{P}_μ の端点において同様の結果が成り立つ ([9])。

μ が synchronizing のとき、全てのサイトが一点に集まるような色の列がとれる。それを仮に $\{\sigma_1, \dots, \sigma_p\}$ と書こう。このとき、確率 1 で、 $\{(f_{k+1}, \dots, f_{k+p}) : k = 0, -1, -2, \dots\}$

のうちに色の列 $(\sigma_1, \dots, \sigma_p)$ が無限回現れる. 初めて現れるときの時刻を $k = T$ と書くと,

$$f_0 \circ f_{-1} \circ \dots \circ f_T \quad (3.1)$$

は全てのサイトを一点 X に写すランダム写像であり, しかもその像 X の分布はマルコフ連鎖の定常分布に一致する. 言い換えると, 後退反復は必ず有限回で止まり, 止まった点の統計をとることで定常分布の exact sampling が得られる. 巨大な系の定常分布を後退反復を利用して Monte Carlo simulation する方法は **Propp–Wilson algorithm** [4] として知られ, 広く応用されている (例えば [3, Section 3] およびその引用文献を見よ).

3.3 ランダムウォーク実現の問題

μ -ランダムウォーク $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ が与えられたとき, $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ はマルコフ連鎖であって, その推移確率行列 $\Pi = (\Pi_{x,y})_{x,y \in V}$ は次で与えられる:

$$\Pi_{x,y} = \mu(\sigma \in \Sigma : \sigma(x) = y). \quad (3.2)$$

この関係を満たす時, μ は推移確率行列 Π に対する写像分布であると言う.

上の事実の逆の問題を考えよう. すなわち, 推移確率行列 Π を与えてそれに対する写像分布を見つける問題である. 次の定理はよく知られたことのごく特殊な場合である.

定理 3.4. 推移確率行列 $\Pi = (\Pi_{x,y})_{x,y \in V}$ を持つマルコフ連鎖が与えられたとする. このとき, Π に対する写像分布 μ がとれる. 従って特に, μ -ランダムウォークとして実現できる.

Π に対する写像分布は一意的ではないから, 都合のよいものを選ぶことができるかどうかは興味ある問題である.

定理 3.5 (Yano–Yasutomi [11]). マルコフ連鎖が混合的 (\iff 既約かつ非周期) ならば, 写像分布 μ として synchronizing なものがとれる. 従って特に, strong な μ -ランダムウォークとして実現できる.

次ページ図 4 のような推移確率が与えられたとする. 対応するマルコフ連鎖は混合的なので, 定理 3.5 より synchronizing な写像分布がとれるはずである. μ -ランダムウォークとして実現する確率測度 μ はいくつか可能性があるが, そのうちで次の 2 通りの確率測度 $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}$ を考える:

$$\mu^{(1)}(\sigma^{(1)}) = \mu^{(1)}(\sigma^{(2)}) = \mu^{(1)}(\sigma^{(3)}) = 1/3, \quad (3.3)$$

$$\mu^{(2)}(\sigma^{(3)}) = 2/3, \quad \mu^{(2)}(\sigma^{(4)}) = 1/3. \quad (3.4)$$

但し, $\sigma^{(1)}, \dots, \sigma^{(4)}$ は図 5–図 8 で定まるものを指す. $\mu^{(2)}$ は図 3 に対応しており synchronizing でない. 一方, $\mu^{(1)}$ は図 1 に対応しており synchronizing である.

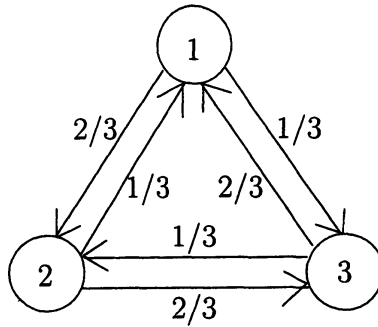


図 4. 推移確率

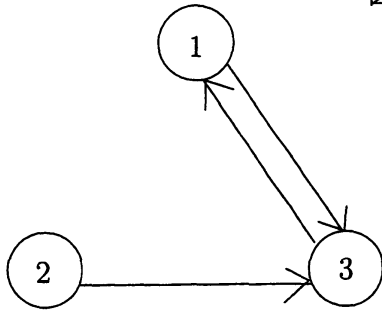


図 5. $\sigma^{(1)}$

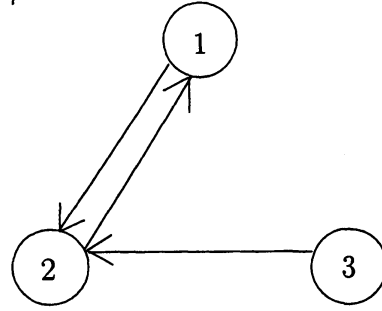


図 6. $\sigma^{(2)}$

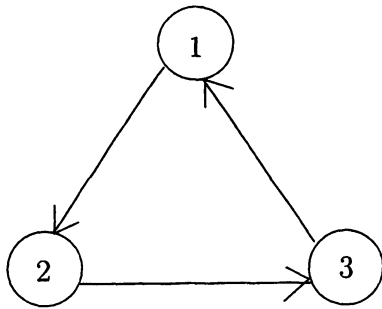


図 7. $\sigma^{(3)}$

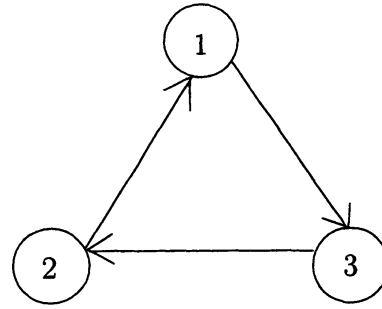


図 8. $\sigma^{(4)}$

マルコフ連鎖 $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ を synchronizing な写像分布 μ を用いて strong な μ -ランダムウォーク $\{(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}, (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}\}$ で実現したとき, §3.2 でも見たように $X = (X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ は IID $N = (f_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ の関数によって表させる. 従って, $\varphi(t) = -t \log t$ とおくと, マルコフ連鎖 X の測度論的エントロピー

$$h(X) = \sum_{x,y \in V} \varphi(\Pi_{x,y}) \tag{3.5}$$

と IID N の測度論的エントロピー

$$h(N) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \varphi(\mu(\{\sigma\})) \tag{3.6}$$

とは $h(X) \leq h(N)$ の関係にある. 上の例では, synchronizing な写像分布 $\mu^{(1)}$ を作るために, Π において正の確率を持つ道路を適当に重複させたが, このとき余分な情報が加わり, $h(N)$ が $h(X)$ よりも真に大きくなることがある.

実際、先の例では、

$$h(X) = \varphi\left(\frac{2}{3}\right) + \varphi\left(\frac{1}{3}\right) \quad (3.7)$$

で与えられる。 $0 < \varepsilon \leq 1$ に対し、

$$\mu = \varepsilon\mu^{(1)} + (1 - \varepsilon)\mu^{(2)} \quad (3.8)$$

で定義される写像分布は Π に対するそれになっていてかつ synchronizing なものであり、

$$h(N) = 2\varphi\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) + \varphi\left(\frac{2 - \varepsilon}{3}\right) + \varphi\left(\frac{1 - \varepsilon}{3}\right) \quad (3.9)$$

で与えられ、 $h(N)$ は $h(X)$ よりも真に大きい。 $\varepsilon \rightarrow 0+$ とすれば $h(N)$ は $h(X)$ に収束するから、余分な情報は限りなく小さくできる。極限にあたる写像分布 $\mu = \mu^{(2)}$ に対しては $h(X) = h(N)$ が成り立つから、Ornstein の同型定理により X と N とは同型であるが、 $\mu^{(2)}$ は synchronizing ではないから、その同型は後退反復によるものではない、ということがわかる。

定義 3.6 ([6]). 推移確率行列 Π が **uniform** であるとは、各 $x \in V$ に対して推移確率を並べた列 $(\Pi_{x,y})_{y \in V}$ が、異なる x に対しては置換の関係にあることを言う。

例えば、図 1 の推移確率は uniform である。次の定理は、余分な情報を限りなく小さくできるための必要十分条件を与える。

定理 3.7 ([11]). Π を混合的マルコフ連鎖の推移確率行列とする。このとき、次は同値:

- (i) Π に対する写像分布の列 $\mu^{(n)}$ が存在して、それらは synchronizing であり、かつ対応する IID $N^{(n)}$ のエントロピー $h(N^{(n)})$ は $h(X)$ に収束する。
- (ii) Π は uniform である。

参考文献

- [1] R. L. Adler, L. W. Goodwyn, and B. Weiss. Equivalence of topological Markov shifts. *Israel J. Math.*, 27(1):48–63, 1977.
- [2] B. S. Cirel'son. An example of a stochastic differential equation that has no strong solution. *Teor. Veroyatnost. i Primenen.*, 20(2):427–430, 1975.
- [3] P. Diaconis and D. Freedman. Iterated random functions. *SIAM Rev.*, 41(1):45–76 (electronic), 1999.
- [4] J. G. Propp and D. B. Wilson. Exact sampling with coupled Markov chains and applications to statistical mechanics. In *Proceedings of the Seventh International Conference on Random Structures and Algorithms (Atlanta, GA, 1995)*, volume 9, pages 223–252, 1996.

- [5] C. R. E. Raja. A stochastic difference equation with stationary noise on groups. Preprint, arXiv:1008.0913.
- [6] M. Rosenblatt. Stationary processes as shifts of functions of independent random variables. *J. Math. Mech.*, 8:665–681, 1959.
- [7] Y. Takahashi. Time evolution with and without remote past. In *Advances in discrete dynamical systems*, volume 53 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 347–361. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009.
- [8] A. N. Trahtman. The road coloring problem. *Israel J. Math.*, 172:51–60, 2009.
- [9] K. Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. Preprint, arXiv:1005.0079, 2010.
- [10] K. Yano and Y. Takahashi. Time evolution with and without remote past. *Sūrikaisekikenkkyūsho Kōkyūroku*, 1552:164–171, 2007. Recent Developments in Dynamical Systems (Kyoto, 2006).
- [11] K. Yano and K. Yasutomi. Realization of finite-state mixing Markov chain as a random walk subject to a synchronizing road coloring. Preprint, arXiv:1006.0534, 2010.
- [12] K. Yano and M. Yor. Around Tsirelson’s equation, or: The evolution process may not explain everything. Preprint, arXiv:0906.3442, submitted, 2009.
- [13] M. Yor. Tsirel’son’s equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields*, 91(2):135–152, 1992.