

1 次元非線形格子における Discrete Breather の安定性

NTT コミュニケーション科学基礎研究所 吉村 和之 (Kazuyuki Yoshimura)
NTT Communication Science Laboratories

概要

Discrete Breather とは、非線形格子系における空間的に局在した周期振動解である。1 次元 2 原子 Fermi-Pasta-Ulam 型格子に関し、anti-continuous limit 近傍において種々の Discrete Breather 解の存在を証明し、それらの線形安定性解析を行った。Discrete Breather 解の線形安定性の波形に対する依存性を明らかにした。

1 はじめに

非線形格子系においては、系の離散性と非線形性に起因して、空間的に局在した振動モードが存在し得ることが知られている。この局在モードは、Discrete Breather (DB), または, Intrinsic Localized Mode (ILM) と呼ばれている。DB の存在は、武野らにより最初に指摘され [1, 2], 以来, DB に関する多数の研究がなされている (例えば, レビュー論文 [3, 4, 5, 6] 参照)。DB の存在は、非線形性と空間的離散性を有する力学系において普遍的な現象と考えられており、実際に種々の系において実験的に観測されている。例えば, ジョセフソン結合素子系 [7, 8], 非線形光導路アレイ [9], マイクロカンチレバーアレイ [10] 等で観測されている。

数理的な観点からは、DB は運動方程式の空間的に局在した周期解として特徴付けられる。これまでに、DB を表す局在周期解の厳密な存在証明が、種々の手法により与えられている。最初の存在証明は、MacKay と Aubry により、各粒子がオンサイトポテンシャルと弱い相互作用ポテンシャルを持つような非線形格子系のクラスに対して与えられた [11]。例えば、非線形 Klein-Gordon 格子モデルなどが、このクラスに含まれる。anti-integrable limit, もしくは、anti-continuous limit と呼ばれる相互作用が無い極限では、系は各粒子がオンサイトポテンシャル中を独立に振動する振動子集団となる。この極限では、1 個の粒子だけが周期振動し他の粒子が静止しているような自明な局在周期解が存在する。MacKay と Aubry は、周期関数の空間で陰関数定理を用いて、自明な局在周期解が弱い相互作用が在る場合に延長可能であることを証明している。anti-continuous limit にて複数個の粒子が振動するような自明な局在周期解の延長に関する証明も与えられている [12]。文献 [13] では、2 原子 Fermi-Pasta-Ulam (FPU) 型格子に関して、上記とは異なるタイプの anti-continuous limit が提案されている。2 原子 FPU 型格子とは、異なる質量を持つ粒子が交互に並び、再隣接粒子が非線形相互作用する格子である。この系において、質量比がゼロとなる極限が anti-continuous limit となり、重い粒子が静止した状態で軽い粒子のみが独立に振動する。この極限では、1 個の軽い粒子のみ振動し他の粒子が静止状態であるような自明な DB 解が存在する。Livi らは、この DB 解が質量比がゼロでない場合に延長可能であることを証明している。上

記以外の anti-continuous limit を持たないような格子系に対しても、異なる手法により、DB 解の存在証明が与えられている [14, 15, 16, 17].

上述のように、DB 解の存在については、種々の格子系において証明がなされている。一方、DB に関する他の重要な問題として、その安定性評価が挙げられる。しかしながら、DB 解の線形安定性に関する厳密な結果はいまだ十分ではない。これまでのところ、オンサイトポテンシャルと弱相互作用ポテンシャルを持つ格子系について、single-site DB (anti-continuous limit で 1 格子点のみ励起している周期解からの延長により得られる DB 解) が線形安定であることが示されている [3]. また、非線形 Klein-Gordon 格子については、multi-site DB (anti-continuous limit で複数の格子点が励起している周期解からの延長により得られる DB 解) について、励起格子点が連続している場合に、線形安定性を判別するための条件が明らかにされている [18, 19, 20]. しかしながら、他の格子系、FPU 型格子などについては、DB 解の安定性は十分には明らかにされていない。本研究では、2 原子 FPU 型格子について、様々な multi-site DB 解の存在証明と線形安定性解析を行う。先行研究 [21, 22] で、2 原子 FPU 型格子の anti-continuous limit での自明な周期解からの延長による multi-site DB 解の存在証明、および、励起格子点が連続している場合の線形安定性評価が与えられている。本研究では、その結果を一般化し、anti-continuous limit での励起格子点の分布が任意の場合について、multi-site DB 解の存在証明と線形安定性解析を行う。以下では、2 節で 2 原子 FPU 型格子モデルを説明し、3 節で主結果を述べる。

2 2 原子 FPU 型格子モデル

本研究では、直線上で交互に並んだ 2 つの異なる質量を持つ粒子が最隣接粒子と非線形相互作用するような 1 次元 2 原子 FPU 型格子系を考える。系のハミルトニアンは次式で与えられる。

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2m_n} P_n^2 + \sum_{n=1}^N V(Q_n - Q_{n-1}) \quad (1)$$

ここで $Q_n \in \mathbb{R}$, $P_n \in \mathbb{R}$ は、それぞれ、粒子の座標と運動量を表す。 m_n は、 n 番目の粒子の質量を表し、 $m_{2j-1} = 1$, $m_{2j} = \bar{m}$, $j = 1, 2, \dots, N/2$, ただし、 $\bar{m} > 1$ とする。境界条件としては、固定端条件 $Q_0 = Q_N = 0$ を仮定する。したがって、系の自由度は $N - 1$ である。 N は偶数と仮定しておく。相互作用ポテンシャル V として、以下の形を仮定する。

$$V(X) = W(X, \mu) + \frac{1}{k} X^k \quad (2)$$

上式で、 $k \geq 4$ は偶数とする。 $\mu \in \mathbb{R}^l$ はパラメータであり、 $O \subseteq \mathbb{R}^l$ を $\mu = 0$ の近傍とする。関数 $W(X, \mu) : \mathbb{R} \times O \rightarrow \mathbb{R}$ は、 X と μ に関して C^2 級で $W(X, 0) = 0$ を満たすと仮定する。

本稿で示す結果は、充分大きな \bar{m} に対して成立するものである。極限 $\bar{m} \rightarrow \infty$ には、特異性があるかのように見えるが、実際には、以下で定義するパラメータ ε を導入すれば、この極限に特異性は無いことが分かる [13].

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\bar{m}}} \quad (3)$$

パラメータ ε を用いて, 新座標変数 q_n を以下のように定義する.

$$q_n = \begin{cases} Q_n & \text{if } n = 2j - 1, \\ \varepsilon^{-1}Q_n & \text{if } n = 2j, \end{cases} \quad j = 1, 2, \dots, N/2 \quad (4)$$

ハミルトニアン (1) は, 新変数では以下のように変換される.

$$H = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{2} p_n^2 + \sum_{j=1}^{N/2} \left[V(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}) + V(q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2}) \right] \quad (5)$$

ただし, p_n は q_n に共役な運動量であり, $p_{2j-1} = P_{2j-1}$, $p_{2j} = \varepsilon P_{2j}$ のように定義される. 境界条件は, $q_0 = q_N = 0$ である. ハミルトニアン (5) より導出される運動方程式は, 次式で与えられる.

$$\ddot{q}_{2j-1} = V'(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}) - V'(q_{2j-1} - \varepsilon q_{2j-2}) \quad (6)$$

$$\ddot{q}_{2j} = \varepsilon V'(q_{2j+1} - \varepsilon q_{2j}) - \varepsilon V'(\varepsilon q_{2j} - q_{2j-1}) \quad (7)$$

これらの運動方程式は, $\varepsilon = 0$ において互いに分離することが分かる. 以下では, 変数 q_n, p_n を用い, ハミルトニアン (5) に対して結果の記述を行うものとする.

3 主結果

同次ポテンシャル系の anti-continuous limit, すなわち, $\varepsilon = 0$ かつ $\mu = 0$ の場合を考える. この場合, 運動方程式 (6), (7) に対し, 以下の形をした周期解が存在する.

$$q_{2j-1} = 2^{-1/(k-2)} \sigma_{2j-1} \varphi(t), \quad q_{2j} = 0, \quad j = 1, \dots, N/2 \quad (8)$$

ここで, $\sigma_{2j-1} \in \{-1, 0, 1\}$ である. $\varphi(t)$ は以下の微分方程式の周期解を表す.

$$\ddot{\varphi} + \varphi^{k-1} = 0 \quad (9)$$

この式は, 同次ポテンシャル中を振動する 1 粒子の運動を記述する方程式と見なすことができ, 明らかに周期解を持つ. 方程式 (9) は, 積分

$$\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{k} \varphi^k = h \quad (10)$$

を持つ. 式中の $h > 0$ は積分定数である. 解 $\varphi(t)$ の周期 T は, 定数 h に依存し, 次式で与えられる.

$$T = 2\sqrt{2} h^{-(1/2-1/k)} \int_0^{k^{1/k}} \frac{1}{\sqrt{1-x^k/k}} dx \quad (11)$$

(11) 式中の積分値は h に依存しないので, h が 0 から $+\infty$ まで変化するとき, 周期 T は $+\infty$ から 0 まで連続的に変化する. このことは, 任意に与えられた $T > 0$ に対し, T を周期に持つような (9) 式の周期解 $\varphi(t)$ が存在することを意味している. したがって, 任意に与えられたコード列

$\sigma = (\sigma_1, \sigma_3, \dots, \sigma_{2j-1}, \dots, \sigma_{N-1}) \in \{-1, 0, 1\}^{N/2}$ と $T > 0$ に対し, (8) 式で与えられる周期 T の運動方程式の解が存在する. この周期解を, $\Gamma(t; \sigma, T)$ と表すことにする. すなわち, (8) 式で与えられる q_n と $p_n = \dot{q}_n$ を用いて, $\Gamma(t; \sigma, T) = (q_1(t), \dots, q_{N-1}(t), p_1(t), \dots, p_{N-1}(t))$ である.

コード列 σ が少数の非ゼロ成分からなる場合, 周期解 (8) は, DB 解, もしくは, いくつかの DB 解の重ね合わせ状態を表すものと解釈できる. 例えば, $\sigma = (\dots, 0, 1, 0, \dots)$ は single-site DB 解を表し, $\sigma = (\dots, 0, 1, 0, 0, -1, 0, \dots)$ は離れて存在する 2 つの single-site DB 解の重ね合わせ状態を表すと解釈できる. 本稿では, より一般に, それらを含む任意のコード列 σ を扱う.

集合 \mathcal{A} を $\mathcal{A} = \{1, 2, \dots, N/2\}$ とする. また, \mathcal{A}_σ を σ の非ゼロ成分の添字の集合, すなわち, $\mathcal{A}_\sigma = \{j; \sigma_{2j-1} \neq 0\} \subseteq \mathcal{A}$ と定義する. コード列 σ が, m 個の励起格子点を含み, $\mathcal{A}_\sigma = \{j_1, j_2, \dots, j_m\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_m$ であるとする. σ の成分 σ_{2j_i-1} と $\sigma_{2j_{i+1}-1}$ に対応する $\Gamma(t; \sigma, T)$ の隣接する 2 つの励起格子点を考える. これら格子点ペアについて, $\sigma_{2j_i-1} = \sigma_{2j_{i+1}-1}$ のとき同位相であると言い, $\sigma_{2j_i-1} = -\sigma_{2j_{i+1}-1}$ のとき反位相であるということにする. σ の関数 $N_{\text{in}}(\sigma)$ を次式で定義する.

$$N_{\text{in}}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{if } m = 1 \\ \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{2} |\sigma_{2j_i-1} + \sigma_{2j_{i+1}-1}| & \text{if } m \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

$N_{\text{in}}(\sigma)$ は, 解 $\Gamma(t; \sigma, T)$ に含まれる同位相の隣接励起格子点ペアの数を与える関数である. したがって, 1 格子点のみ励起される $m = 1$ の場合, もしくは, $m \geq 2$ で全ての隣接格子点ペアが反位相である場合に限り, $N_{\text{in}}(\sigma) = 0$ となる. 以上の準備の下, DB 解の存在と線形安定性に関する主結果は, 以下の如く述べられる. なお, 定理の証明については文献 [23] を参照されたし.

定理 1. 任意の $\sigma \neq 0$, $T > 0$ に対して, 定数 $\varepsilon_c > 0$ が存在し, $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_c$, かつ, $\mu = 0$ のとき, 格子系 (5) の T -周期解の族 $\Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$ で ε と t について解析的, かつ, $\Gamma_0(t; \sigma, T) = \Gamma(t; \sigma, T)$ を満たすものが存在する. 各 $\varepsilon \in (0, \varepsilon_c)$ に対し, $\mu = 0$ の近傍 $U_\varepsilon(0) \subseteq \mathbb{R}^l$ が存在し, $\mu \in U_\varepsilon(0)$ のとき, 格子系 (5) の周期解の族 $\Gamma_{\varepsilon, \mu}(t; \sigma, T)$ で μ と t について C^1 級, $\Gamma_{\varepsilon, 0}(t; \sigma, T) = \Gamma_\varepsilon(t; \sigma, T)$, 周期 $T_\varepsilon(\mu)$ は $T_\varepsilon(0) = T$ を満たす C^1 級関数であるものが存在する. さらに, $\Gamma_{\varepsilon, \mu}(t; \sigma, T)$ は, $N_{\text{in}}(\sigma) = 0$ の場合に限り線形安定であり, $N_{\text{in}}(\sigma) \geq 1$ の場合は線形不安定で $N_{\text{in}}(\sigma)$ 個の不安定特性乗数が存在する.

Remark 1. 非線形格子の代表的な相互作用ポテンシャルの一つとして多項式ポテンシャルがある. (2) 式の関数は, 多項式ポテンシャルの場合も含んでいる: $W(X, \mu) = \sum_{r=2}^{k-1} (\mu_r/r) X^r$.

Remark 2. 本稿では FPU 型格子系のみを議論の対象としたため, ポテンシャルの μ 依存部分 W としては最隣接相互作用を仮定した. しかしながら, この仮定は本質的ではない. 定理 1 の主張は, (1) の代わりにより一般的なハミルトニアン $H = \sum_{n=1}^{N-1} P_n^2/2m_n + \sum_{n=1}^N (Q_n - Q_{n-1})^k/k + W(Q_1, \dots, Q_{N-1}, \mu)$ に対しても成立する. ただし, $W(Q_1, \dots, Q_{N-1}, \mu)$ は C^2 級で, かつ, $\mu = 0$ のとき $W = 0$ を満たすとする.

参考文献

- [1] S. Takeno, K. Kisoda, and A. J. Sievers, "Intrinsic localized vibrational modes in anharmonic crystals: stationary modes," *Prog. Theor. Phys. Suppl.* 94, 242–269 (1988).
- [2] A. J. Sievers and S. Takeno, "Intrinsic localized modes in anharmonic crystals," *Phys. Rev. Lett.* 61, 970–973 (1988).
- [3] S. Aubry, "Breathers in nonlinear lattices: Existence, linear stability and quantization," *Physica D* 103, 201–250 (1997).
- [4] S. Flach and C. Willis, "Discrete breathers," *Phys. Rep.* 295, 181–264 (1998).
- [5] S. Aubry, "Discrete breathers: localization and transfer of energy in discrete Hamiltonian nonlinear systems," *Physica D* 216, 1–30 (2006).
- [6] S. Flach and A. V. Gorbach, "Discrete breathers - Advances in theory and applications," *Phys. Rep.* 467, 1–116 (2008).
- [7] E. Trias, J. J. Mazo, and T. P. Orlando, "Discrete breathers in nonlinear lattices: Experimental detection in a Josephson array," *Phys. Rev. Lett.* 84, 741–744 (2000).
- [8] P. Binder, D. Abraimov, A. V. Ustinov, S. Flach, and Y. Zolotaryuk, "Observation of breathers in Josephson ladders," *Phys. Rev. Lett.* 84, 745–748 (2000).
- [9] H. S. Eisenberg, Y. Silberberg, R. Morandotti, A. R. Boyd, and J. S. Aitchison, "Discrete spatial optical solitons in waveguide arrays," *Phys. Rev. Lett.* 81, 3383–3386 (1998).
- [10] M. Sato, B. E. Hubbard, A. J. Sievers, B. Ilic, D.A. Czaplewski, and H. G. Craighead, "Observation of locked intrinsic localized vibrational modes in a micromechanical oscillator array," *Phys. Rev. Lett.* 90, 044102 (2003).
- [11] R. S. MacKay and S. Aubry, "Proof of existence of breathers for time-reversible or Hamiltonian networks of weakly coupled oscillators," *Nonlinearity* 7, 1623–1643 (1994).
- [12] V. Koukouloyannis and S. Ichtiaroglou, "Existence of multibreathers in chains of coupled one-dimensional Hamiltonian oscillators," *Phys. Rev. E* 66, 066602 (2002).
- [13] R. Livi, M. Spicci, and R. S. MacKay, "Breathers on a diatomic FPU chain," *Nonlinearity* 10, 1421–1434 (1997).
- [14] S. Flach, "Existence of localized excitations in nonlinear Hamiltonian lattices," *Phys. Rev. E* 51, 1503–1507 (1995).
- [15] S. Aubry, G. Kopidakis, and V. Kadelburg, "Variational proof for hard discrete breathers in some classes of Hamiltonian dynamical systems," *Discrete and Continuous Dynamical Systems B* 1, 271–298 (2001).

- [16] G. James, "Centre Manifold reduction for quasilinear discrete systems," *J. Nonlinear Sci.* 13, 27–63 (2003).
- [17] G. James and P. Noble, "Breathers on diatomic Fermi-Pasta-Ulam lattices," *Physica D* 196, 124–171 (2004).
- [18] J. F. R. Archilla, J. Cuevas, B. Sánchez-Rey, and A. Alvarez, "Demonstration of the stability or instability of multibreathers at low coupling," *Physica D* 180, 235–255 (2003).
- [19] J. Cuevas, J. F. R. Archilla, F. R. Romero, "Effect of the introduction of impurities on the stability properties multibreathers at low coupling," *Nonlinearity* 18, 769-790 (2005).
- [20] V. Koukouloyannis and P. G. Kevrekidis, "On the stability of multibreathers in Klein-Gordon chains," *Nonlinearity* 22, 2269-2285 (2009).
- [21] 吉村 和之, "2原子非線形格子における Discrete Breather の存在と安定性," 数理解析研究所講究録 1645 「非線形波動現象の数理と応用」, 72-79 (2009).
- [22] 吉村 和之, "2原子非線形格子における multi-site Discrete Breather の存在と安定性," 数理解析研究所講究録 1701 「非線形波動現象の数理と応用」, 169-179 (2010).
- [23] K. Yoshimura, "Existence and stability of discrete breathers in diatomic Fermi-Pasta-Ulam type lattices," *Nonlinearity* 24, 293-317 (2011).