数理解析研究所講究録
第1742巻2011年82-95

結合力学系の分岐解析
― 不変閉曲線の発生・消滅・分岐メカニズム ―

帝京科学大学　小室元政(Motomasa Komuro)
Teikyo University of Science

２種類の力学系について述べる．１つは離散力学系で，ロジスティック写像を環状に結合させた結合写像格子(Coupled Map Lattice, CML)で，今年１月の東工大での力学系研究集会で講演した内容の発展である．もう１つは連続力学系で，明治大学の遠藤哲郎先生のグループと共同で行っている電気回路の発振器の結合系の話である．２つの系に共通のキーワードが，不変閉曲線(Invariant Closed Curve, ICC)（離散系の場合）および不変トーラス（連続系の場合）である．そこで，ICC の発生・消滅・分岐について最初に述べる．

§1　ICC の発生・消滅・分岐について

図１はフロー(flow)における周期軌道の分岐を説明したものである．平衡点の Hopf 分岐によって周期軌道が発生する．周期軌道は，サドルノード（SN）分岐，周期倍（PD）分岐，ニーマルク・サッカー（NS）分岐によって図のように分岐する．このときの分岐条件はポアンカレ写像の不動点の固有値で判定できる．図２は安定周期軌道が，消滅・不安定化する場合の５つのタイプを示している．①は SN 分岐による消滅である．

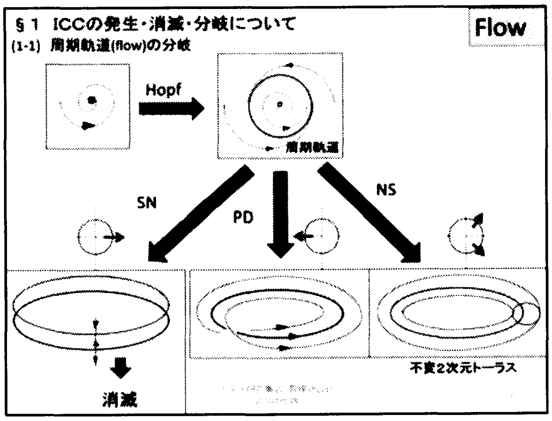


図１

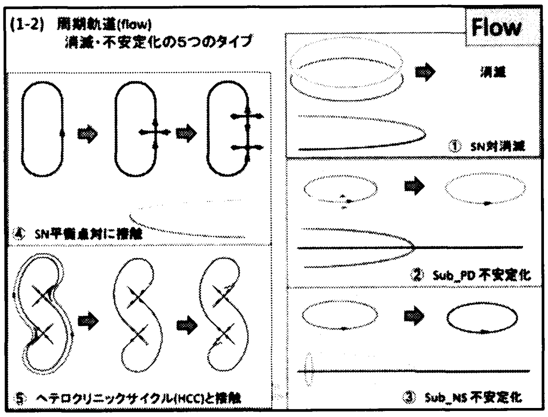


図２

②はサブクリティカル周期倍分岐による不安定化，③はサブクリティカルな NS 分岐による不安定化，④は，周期軌道がサドルノード平衡点対に接触して消滅する場合を示している．この場合は，パラメータを逆（図で右から左へ）に変化させれば，安定平衡点から周期軌道が発生したように数値的には観測される．⑤はサドル型の平衡点が形成するヘテロクリニックサイクルに接触して消滅する場合を示している．（この場合も，パラメータを逆（図で右から左へ）に変化させると，周期軌道が発生したように観測される場合がある．たとえば，いくつかの小さな周期軌道が融合して大きな周期軌道を形成するような場合）

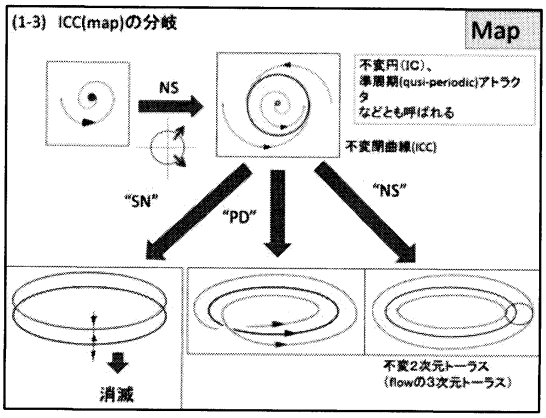


図3

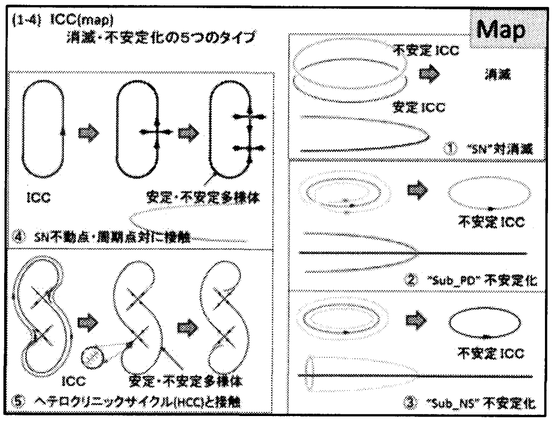


図4

さて，図3は写像（Map）におけるICCの分岐を示したものである．(ICCはフローにおける周期軌道がNS分岐で発生させた2次元不変トーラスのポアンカレ断面での切り口に相当する．）写像の不動点（または周期点）のNS分岐でICCが発生する．数値計算をしていると，ICCは，フローの周期軌道と同様に，“SN”分岐での消滅，“PD”分岐での長さが2倍化したICCの発生，“NS”分岐での2次元不変トーラスの発生などが観測される．また，ICCの消滅・不安定化についても，フローの周期軌道の場合と同様の現象が観測されます．すなわち，①は安定ICCと不安定ICCの“SN”分岐による対消滅を示している．②はサブクリティカル“PD”分岐による不安定化，③はサブクリティカル“NS”分岐による不安定化である．④は，ICCがサドルノード不動点（または周期点）対に接触して消滅する場合を示している．⑤はサドル型の不動点（または周期点）が形成するヘテロクリニックサイクルに接触して消滅する場合を示している．(⑤の図では，曲線は安定・不安定多様体を表している．これらは一般に，横断的に交わるので，実際には1本の曲線ではなく2本の縺れた曲線（ホモ／ヘテロクリニックタングル）になるが，簡単のためこのように表現している.）

このように，写像のICCは，フローの周期軌道とよく似た振る舞いをする．しかし，フローの周期軌道はポアンカレ写像の固有値によって分岐を判定できるが，写像のICCの場合は，分岐を判定する条件がわかっていない．(リアプノフ指数は，分岐点では1になりますが，“SN”分岐，“PD”分岐，“NS”分岐などを判別することはできない．リアプノフ指数は固有値の絶対値に対応するものだからである.）
また，不安定な周期軌道の場合は，ニュートン法，OGY法，ピラガス法など数値的には追跡する手段があるが，不安定（サドル型）ICCの場合に，数値的にも，捕捉・追跡する方法が確立されていない．このことが，ICCの分岐解析を行ううえで大きな障害となっている．このような問題を抱えていることを前提に，§2では結合写像格子の，§3では結合発振器のICCの分岐について述べる．

§2　結合写像格子（CML）におけるICCの発生・消滅・分岐

ロジスティック写像を環状に拡散結合させた離散力学系を結合写像格子（CML）という．(図5）昨年の数理研でもCMLに発生する進行波の分岐について報告した．進行波は，完全同期状態に対応する1次元不変部分空間を周回するICCである．これまでに，（NS分岐以外の）

ICC の発生メカニズムに，サドルノードサイクル(SNC)経由（SN 対がリング状に並ぶことで ICC を発生させるメカニズム　図6）とヘテロクリニックサイクル(HCC)経由（サドルの安定・不安定多様体がリングを形成することで ICC を発生させるメカニズム　図7）があることを明らかにした．また，結合の左右対称性を崩すパラメータ δ の導入によって，従来(a,ε)-パラメータ空間で観測されていた安定周期領域が，(δ,ε)-パラメータ空間での“アーノルドの舌”の断面としてとらえられることを示した．（冬の力学系研究集会（東工大 2010.1）図８－１０）

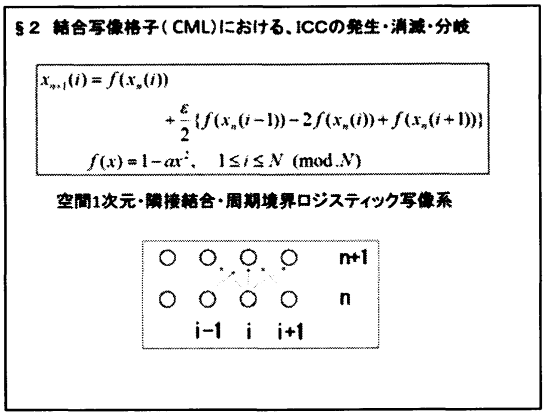


図５

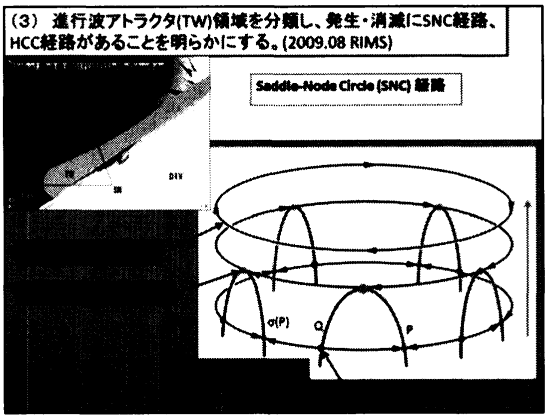


図６

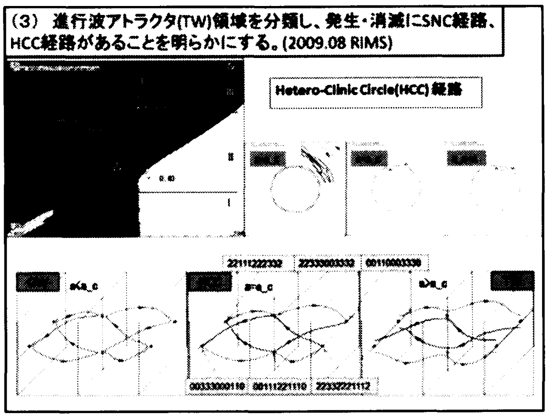


図７

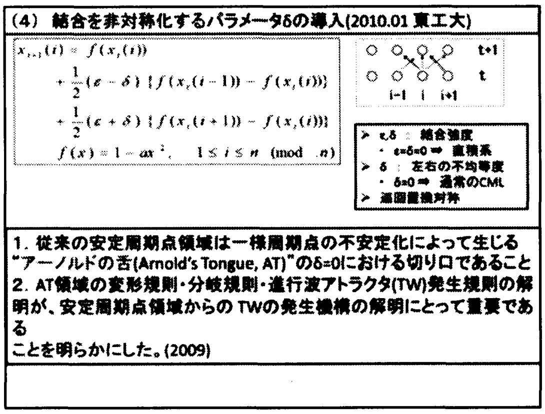


図８

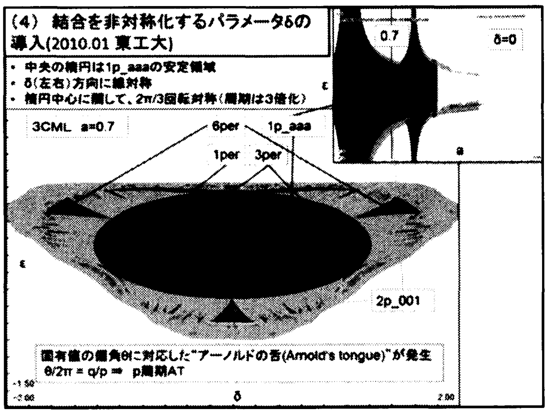


図９

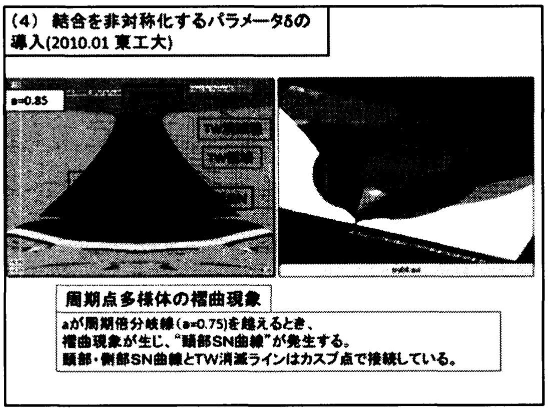


図１０

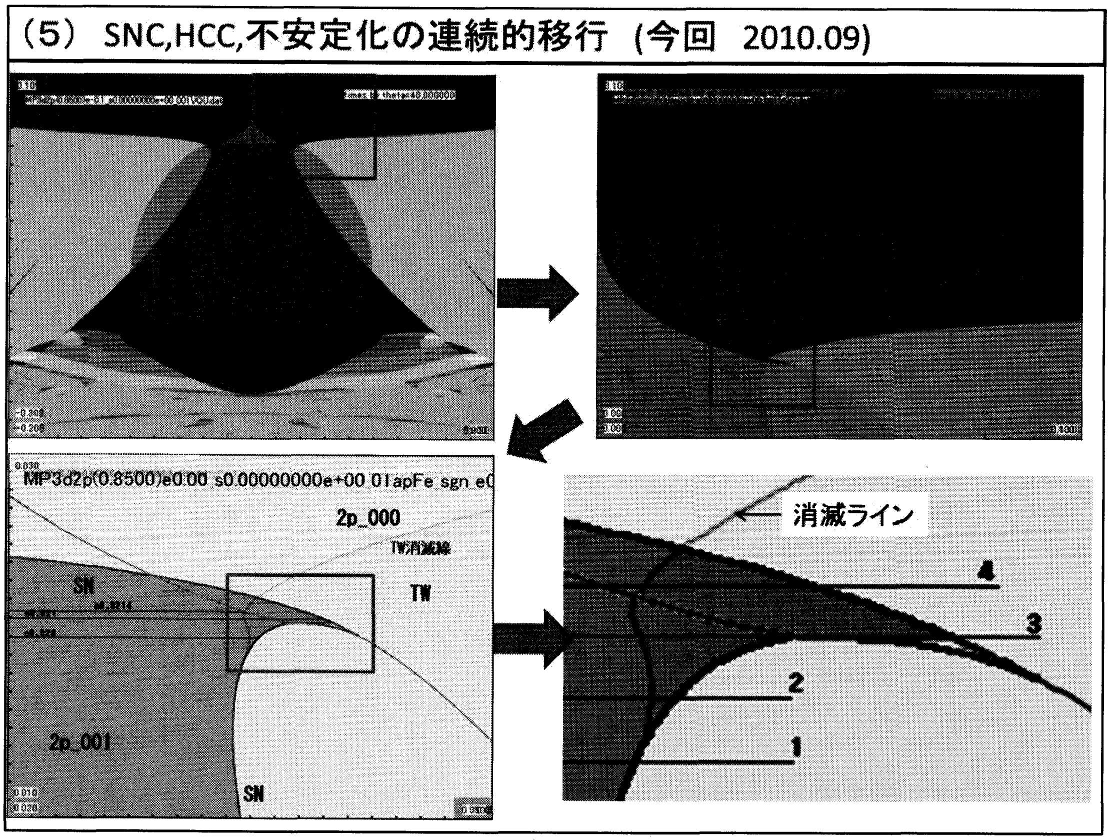

(5) SNC,HCC,不安定化の連続的移行 (今回 2010.09)
MP3d2p(0.8500)e0.00 s0.00000000e+00 01apFe sgn e0
2p_000
TW消滅線
SN
TW
2p_001
SN
消滅ライン
4
3
2
1

図１１

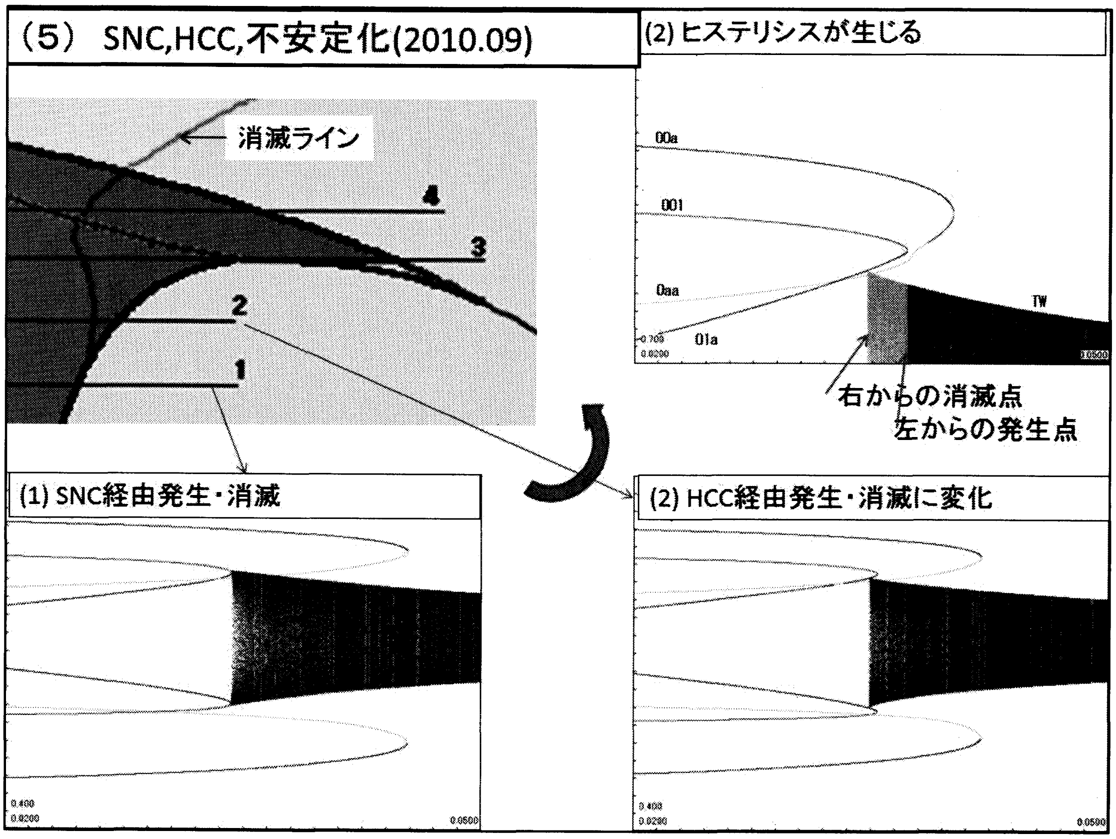

(5) SNC,HCC,不安定化(2010.09)
消滅ライン
4
3
2
1
(2) ヒステリシスが生じる
00a
001
0aa
01a
TW
右からの消滅点
左からの発生点
(1) SNC経由発生・消滅
(2) HCC経由発生・消滅に変化

図１２

今回は，非対称パラメータδを導入した3CMLの(δ，ε)-パラメータ空間において，SNC経由ICC発生領域がHCC経由ICC発生領域に連続的に変化していることを発見し，この現象をサドルの不安定多様体の行先の連続的変化によって説明する．

図１１は非対称パラメータδを持つ3CMLの(δ，ε)-パラメータ空間の図で四角の部分を拡大していったものである．（左下の図は $0.02<\delta<0.05, 0.01<\varepsilon<0.03$）右下図の消滅ラインは，ICCが存在する領域（TW）からパラメータδを左に変化させたとき，ICCが消滅するラインを表している．図１２左上の線分１でパラメータ領域を切るとき，左下の分岐図が得られる．安定２周期点(index0)と不安定２周期点（index1）がSN分岐点で対消滅し，そこからICCが発生している．ICCの消滅点はSN分岐点と一致している．

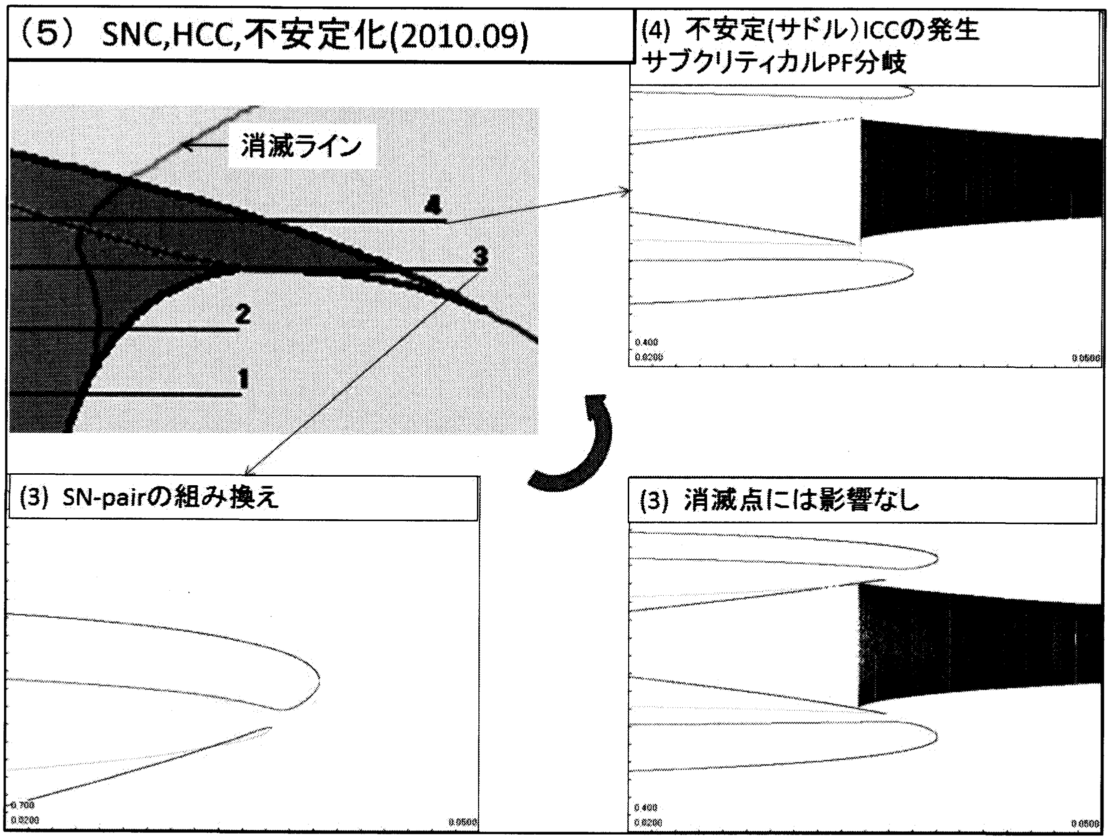
図１２左上の線分２でパラメータ領域を切るとき，右下の分岐図が得られる．ICCが存在する状態からパラメータを左に動かすとき，ICCの消滅点は，SN分岐点よりも左に存在する．ここではHCC経由でICCの消滅が起きている．安定２周期点に沿ってパラメータを右に変化させたとき，ICCが観測され出す点と，パラメータを左に変化させたときにICCが消滅する点との間にヒステリシスが存在している．

図１３左上の線分３でパラメータを切るとき左下の分岐図が得られる．すなわち，SN対の組み換えが起きている．εがこれより小さいときは，001型２周期点と01a型２周期点が対でSN分岐を起こし，0aa型２周期点と00a型２周期点が対でSN分岐を起こしている（型については【補足】参照）．しかしこれ以降は，001型２周期点と00a型２周期点が対になり，また01a型２周期点と0aa型２周期点が対になりSN分岐を起こすことになる．

図１３右下図から，この組み換えはICCの消滅点には影響を与えないことが分かる．ICCの消滅点とSN分岐点は近づき，やがて交差し，左右が入れ替わる．そのとき，SN分岐点からは不安定ICCが発生するものと思われる．不安定ICCを追跡することができれば，パラメータδを右に変化させると安定ICCになるのが，観測されるであろう．（実際には，ICCの存在する領域からパラメータを左に動かすと，SN分岐点に到達する前に消滅する現象として観測される．不安定ICCを数値的に捕捉する手段がまだ確立されていないので，詳しくはわからないが，ICCのサブクリティカルPF分岐によるものと思われる．）

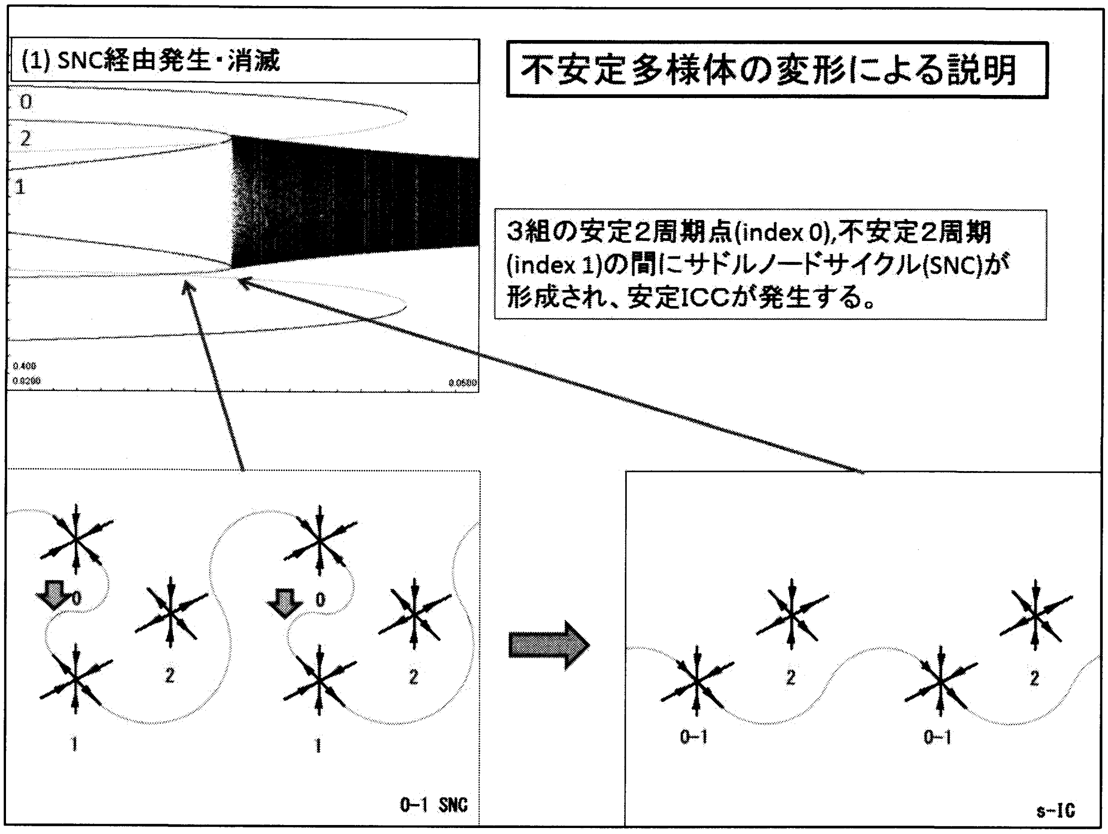
この一連の変化を不安定多様体の変形によって説明する．図１４－１７で数字0,1,2は周期点のindex（不安定多様体の次元）を表している．今考えているのは3CMLなので共役な周期点の組は３組あるのだが，図の下の部分にはそのうちの２組を描いてある．線分１のSNC経由発生の状態（図１４）ではindex1のサドルの不安定多様体（１次元の曲線で２本ある）は，一方は対消滅の相手のノード(index0安定２周期点)に向かい，もう一方は隣のノード(index0)に向かっている．これによって，SN分岐点を超えたとき，ICCが発生する．

パラメータεを増加させ，線分２になる過程で，サドル(index1）の不安定多様体の行先が隣のノード(index0)からサドル(index1)に変化する（図１５）．これによって，HCCが形成され，HCC経由ICC発生となる．SN対の組み換えでは，サドル(index1)からノード(index0)へ向かっていた不安定多様体がindex2のサドルに向かうようになる（図１６）．



（5） SNC,HCC,不安定化(2010.09)
消滅ライン
4
3
2
1
(4) 不安定(サドル)ICCの発生
サブクリティカルPF分岐
(3) SN-pairの組み換え
(3) 消滅点には影響なし

図１３



(1) SNC経由発生・消滅
0
2
1
不安定多様体の変形による説明
3組の安定2周期点(index 0),不安定2周期(index 1)の間にサドルノードサイクル(SNC)が形成され、安定ICCが発生する。
0
2
1
0-1 SNC
2
0-1
s-IC

図１４

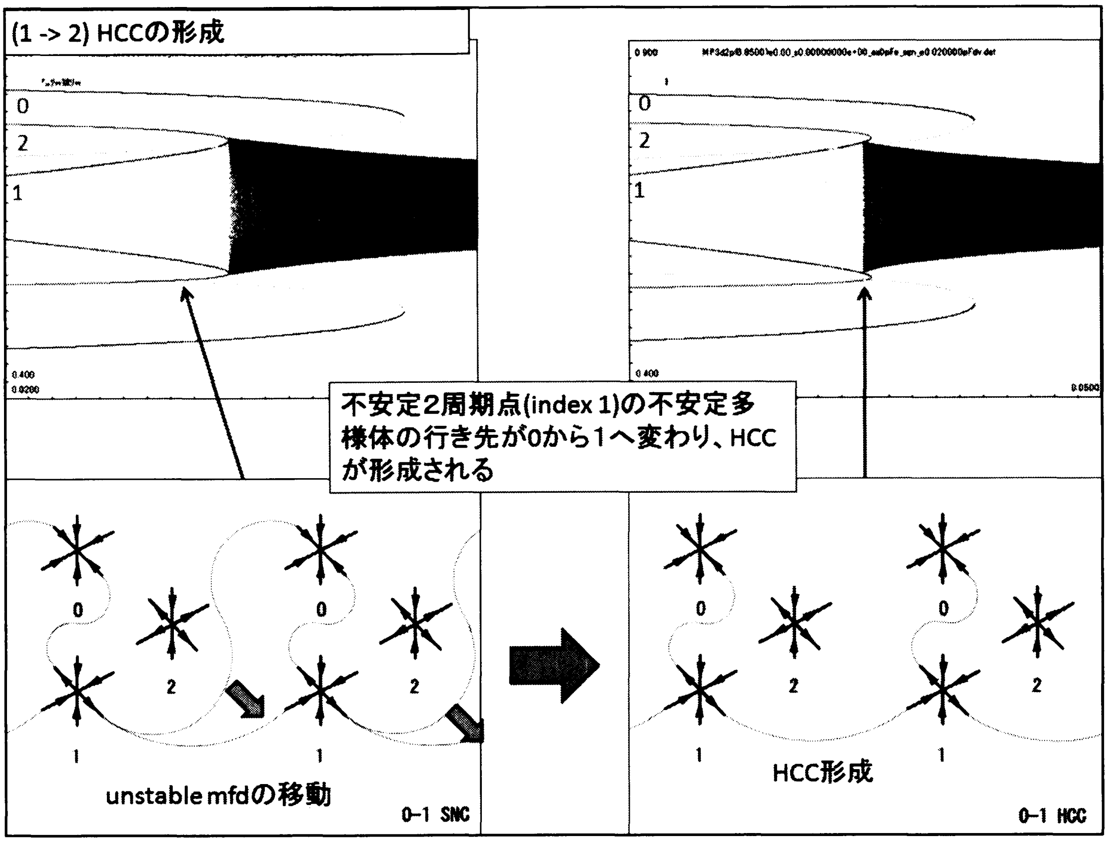

(1 -> 2) HCCの形成
0
2
1
0.400
0.0200
0.400
0.0500
不安定2周期点(index 1)の不安定多様体の行き先が0から1へ変わり、HCCが形成される
0
2
1
unstable mfdの移動
0-1 SNC
HCC形成
0-1 HCC

図１５

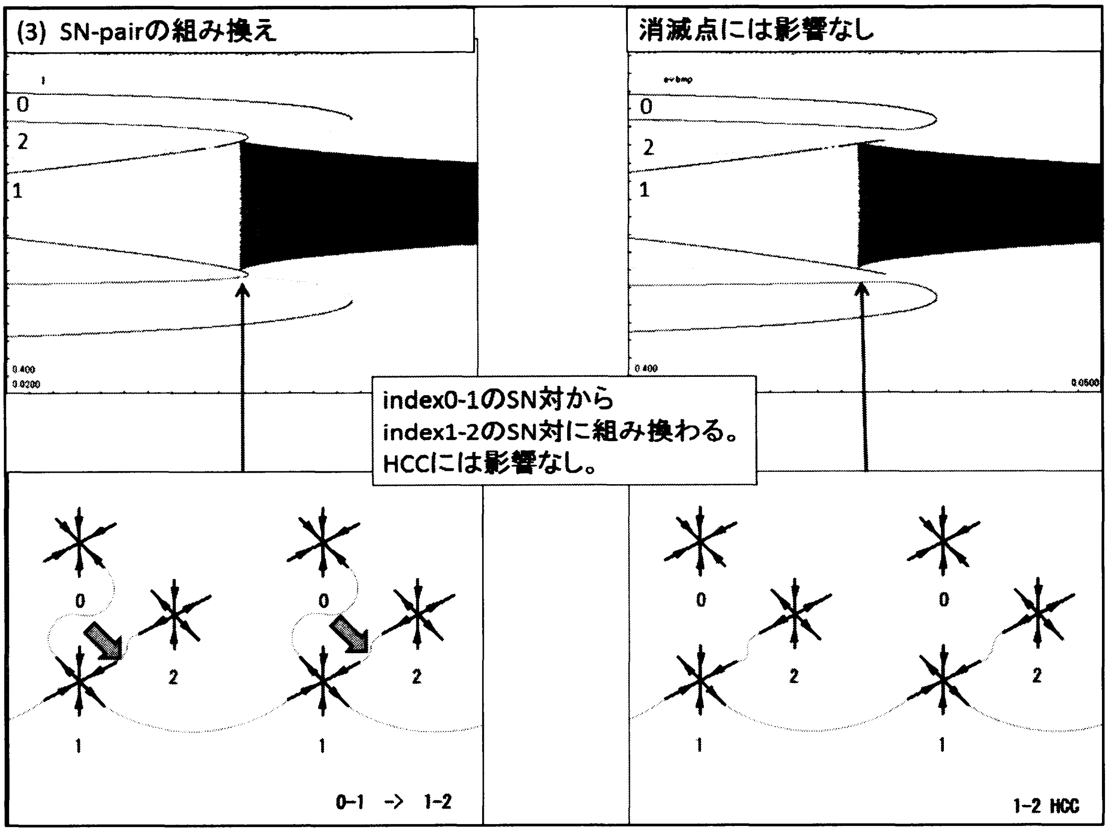

(3) SN-pairの組み換え
消滅点には影響なし
0
2
1
0.400
0.0200
0.400
0.0500
index0-1のSN対から
index1-2のSN対に組み換わる。
HCCには影響なし。
0
2
1
0-1 -> 1-2
1-2 HCC

図１６

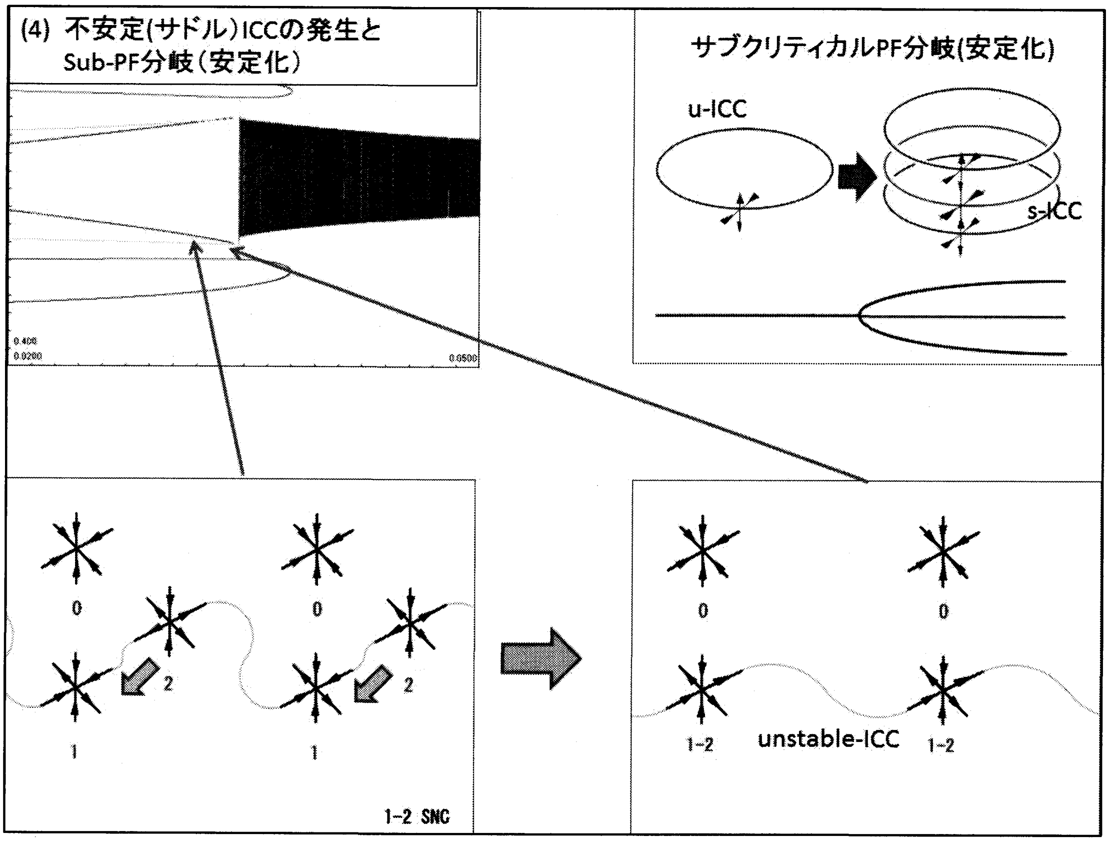
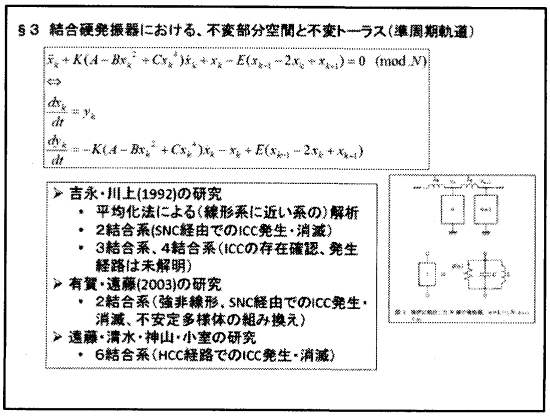


図１７

この状態で，パラメータ ε を増加させ，線分４のようにSNC経由でICCが発生するようになると，図１７のように不安定(index1)ICCが発生すると考えられる．この不安定ICCはパラメータ δ の増加で安定化するのが数値的に確認されているから，図１７右上のようにサブクリティカルＰＦ分岐で安定化していると予想される．

§３　結合発振器における不変部分空間と不変トーラス（準周期軌道）

図１８右のような電気回路（硬発振器）をインダクタ（コイル）で環状に結合したシステムにおける不変トーラス（ポアンカレ断面上のICC）の発生・消滅・分岐について述べる．



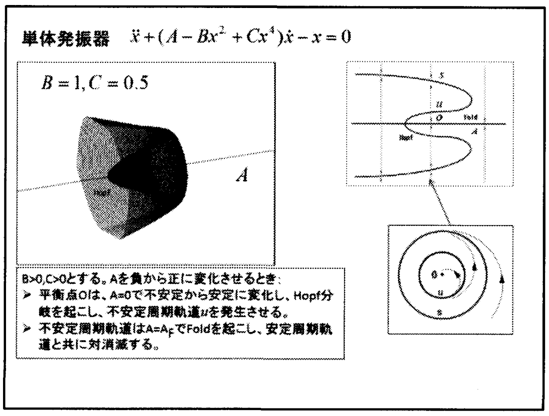


図１８　　図19

この発振器は単体では図１９の方程式で記述される．B>0,C>0 とする．パラメータ A<0 の

とき，原点 O は不安定平衡点で周囲に安定周期軌道が存在する．A を負から正に変化させるとき，平衡点 O は A=0 で不安定から安定に Hopf 分岐し，周囲に不安定周期軌道を発生させる．A をさらに増加させると，不安定周期軌道は安定周期軌道と共に SN 分岐で対消滅する．これ以降は，A>0 で安定平衡点 O，不安定周期軌道，および安定周期軌道が共存している領域を対象とする．

図２０のように$v=(x,y)^T$（T は転置を示す）として結合発振器の方程式を記述する．ここで，f は発振器の主要部分を表し，π は x 座標を y に射影する行列である．結合の形式を表すのがベクトル$(1,-2,1)^T$である．この結合系の分岐を，①不変部分空間上の制限力学系の分岐解析と②直交補空間方向の安定性解析，に分解して理解する．

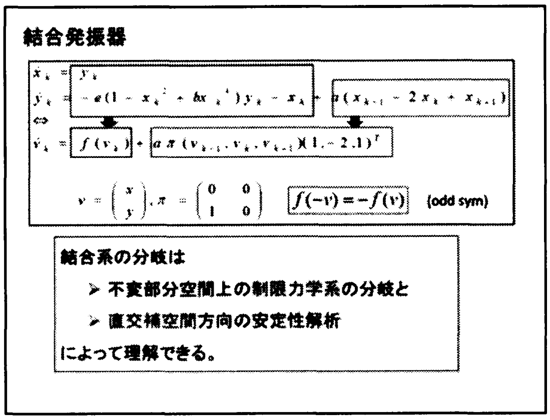


図２０

（例１）もっとも簡単な場合として２結合系を考える（図２１）．同相同期モードは，不変部分空間 $H^1_{s,s}=\{(v_1,v_2)\in(R^2)^2:v_1=v_2\}$ への制限力学系の振る舞いとしてとらえることができる．$v_1=v_2$ を方程式に代入して，制限力学系は $\dot{v}_1=f(v_1)$ で与えられる．これは，単体発振器と同じ方程式である．直交補空間 ${H^1_{s,s}}^\perp=\{(\xi_1,\xi_2)\in(TR^2)^2:\xi_1=-\xi_2\}$ は接流(tangent flow)に関して不変である．逆相同期モードは，不変部分空間 $H^1_{s,-s}=\{(v_1,v_2)\in(R^2)^2:v_1=-v_2\}$ への制限力学系の振る舞いとしてとらえることができる．$v_1=-v_2$ を方程式に代入して，制限力学系は $\dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_1)(-4)^T$ で与えられる．これは単体発振器の場合とは異なり，結合パラメータ a に依存していることがわかる．直交補空間 ${H^1_{s,-s}}^\perp=\{(\xi_1,\xi_2)\in(TR^2)^2:\xi_1=\xi_2\}$ も接流(tangent flow)に関して不変である．

（例２）４結合系の場合：　図２２－２４に示したように少なくとも８種類のモードが存在し，それぞれの不変部分空間上の制限力学系に対応する．例えば，図２３の２番目は不変部分空間

$$H^2_{s,-s,0,0}=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in(R^2)^4:v_1=-v_2,v_3=-v_4\}$$

に対応し，１番目と２番目の素子が逆相同期し，３番目と４番目の素子も逆相同期しているモードである．単体発振器の安定周期軌道上の点を $v_s=(x_s,y_s)$ とし，結合パラメータ $a=0$ のとき，$(v_1,v_2,v_3,v_4)=(v_s,-v_s,0,0)$ を初期値とすると，このモードの発振となる．そのためこのモードを$(s,-s,0,0)$で表した．制限力学系は $v_1=-v_2,v_3=-v_4$ を代入して，

$$\boxed{\dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_3,v_1)(-1,-3)^T\ ,\ \ \dot{v}_3=f(v_3)+a\pi(v_1,v_3)(-1,-3)^T}$$

で与えられる．直交補空間の方程式も直接計算から求められ，接流に関して不変である．

（例1） 2-結合系

$$\dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_2, v_1, v_2)(1,-2,1)^T$$
$$\dot{v}_2 = f(v_2) + a\pi(v_1, v_2, v_1)(1,-2,1)^T$$

$H^2_{s,0}$

$H^1_{s,s}$ $H^1_{s,-s}$

不変部分空間

$H^1_{s,s} = \{(v_1, v_2) \in (R^2)^2 : v_1 = v_2\}$

・制限力学 : $v_1 = f(v_1)$ 単体振動子

・$H^{1\ \perp}_{s,s} = \{(\xi_1, \xi_2) \in (TR^2)^2 : \xi_1 = -\xi_2\}$直交補空間は接流(tangent flow)に関して不変

⇔ ↑↑

同相同期

$H^1_{s,-s} = \{(v_1, v_2) \in (R^2)^2 : v_1 = -v_2\}$

・制限力学系 : $\dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_1)(-4)^T$

・$H^{1\ \perp}_{s,-s} = \{(\xi_1, \xi_2) \in (TR^2)^2 : \xi_1 = \xi_2\}$直交補空間は接流(tangent flow)に関して不変

⇔ ↑↓

逆相同期

図２１

（例2） 4-結合系

$$\dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_4, v_1, v_2)(1,-2,1)^T$$
$$\dot{v}_2 = f(v_2) + a\pi(v_1, v_2, v_3)(1,-2,1)^T$$
$$\dot{v}_3 = f(v_3) + a\pi(v_2, v_3, v_4)(1,-2,1)^T$$
$$\dot{v}_4 = f(v_4) + a\pi(v_3, v_4, v_1)(1,-2,1)^T$$

$1-D_2$ **不変部分空間**

$H^1_{s,s,s,s} = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in (R^2)^4 : v_1 = v_2 = v_3 = v_4\}$ ⇔ ↑↑↑↑

$\Rightarrow \dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_1)(0)^T$

$H^1_{s,-s,s,-s} = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in (R^2)^4 : v_1 = -v_2 = v_3 = -v_4\}$ ⇔ ↑↓↑↓

$\Rightarrow \dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_1)(-4)^T$

$H^1_{s,s,-s,-s} = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in (R^2)^4 : v_1 = v_2 = -v_3 = -v_4\}$ ⇔ ↑↑↓↓

$\Rightarrow \dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_1)(-2)^T$

$H^1_{s,0,-s,0} = \{(v_1, v_2, v_3, v_4) \in (R^2)^4 : v_1 = -v_3, v_2 = v_4 = 0\}$ ⇔ ↑●↓●

$\Rightarrow \dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_1)(-2)^T, \dot{v}_2 = 0$

図２２

$2-D_2$ **不変部分空間**

$$H^2_{s,0,s,0}=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in(R^2)^4 : v_1=v_3, v_2=v_4\}$$
$$\Rightarrow \dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_2,v_1)(2,-2)^T$$
$$\dot{v}_2=f(v_2)+a\pi(v_1,v_2)(2,-2)^T$$

$$H^2_{s,-s,0,0}=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in(R^2)^4 : v_1=-v_2, v_3=-v_4\}$$
$$\Rightarrow \dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_3,v_1)(-1,-3)^T$$
$$\dot{v}_3=f(v_3)+a\pi(v_1,v_3)(-1,-3)^T$$

$$H^2_{s,s,0,0}=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in(R^2)^4 : v_1=v_2, v_3=v_4\}$$
$$\Rightarrow \dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_3,v_1)(-1,-1)^T$$
$$\dot{v}_3=f(v_3)+a\pi(v_1,v_3)(-1,-1)^T$$

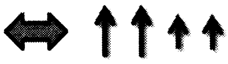
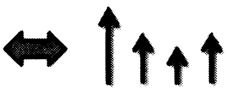


図２３

$3-D_2$ **不変部分空間**

$$H^3_{s,0,0,0}=\{(v_1,v_2,v_3,v_4)\in(R^2)^4 : v_2=v_4\}$$
$$\Rightarrow \dot{v}_1=f(v_1)+a\pi(v_3,v_1,v_2)(0,-2,2)^T$$
$$\dot{v}_2=f(v_2)+a\pi(v_1,v_2,v_3)(1,-2,1)^T$$
$$\dot{v}_3=f(v_3)+a\pi(v_2,v_3,v_1)(2,-2,0)^T$$



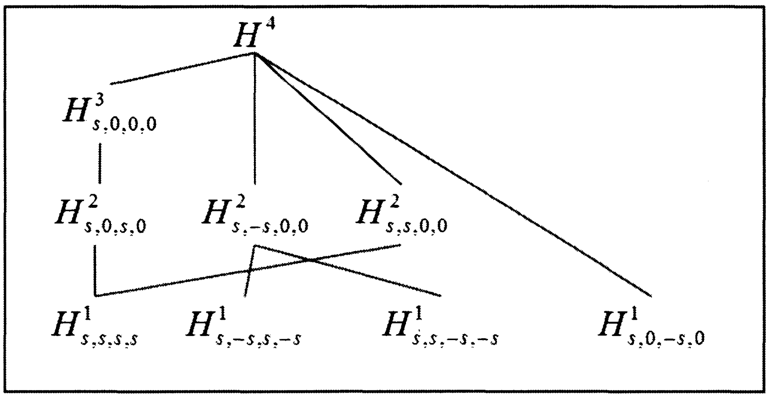


図２４

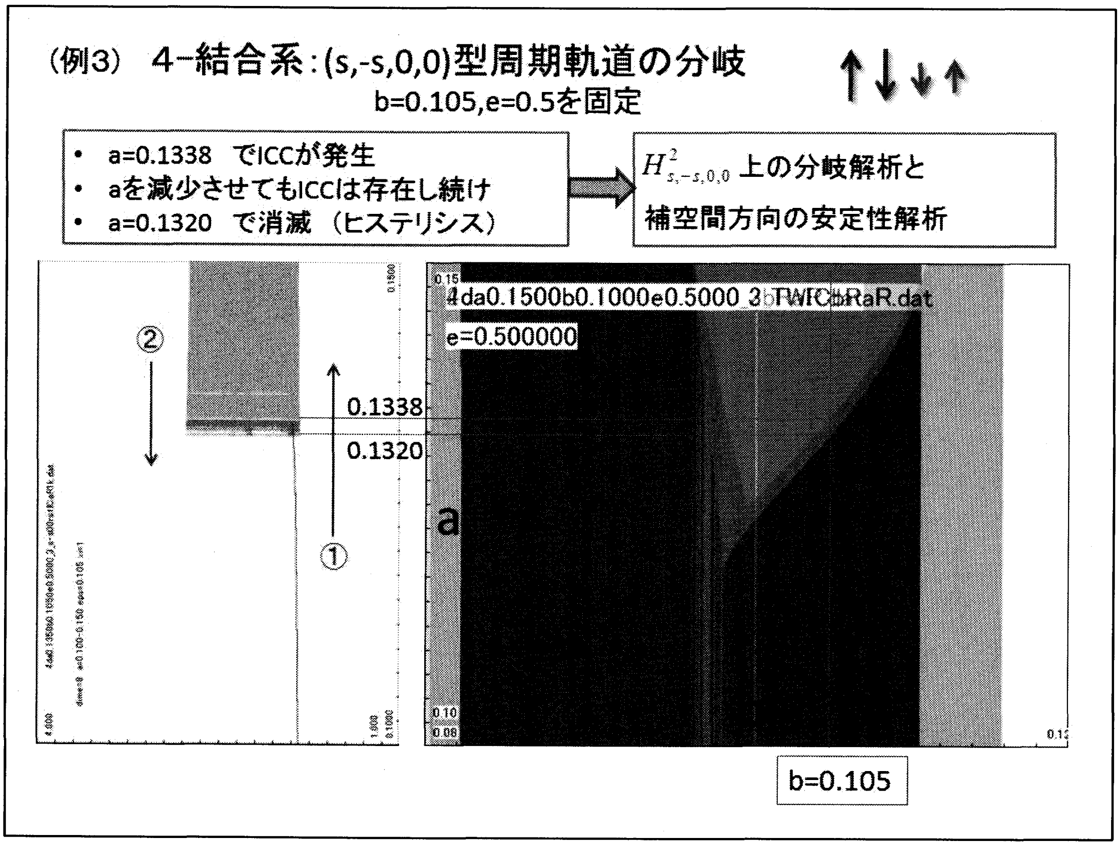


図２５

（例３）：例２の４結合系の$(s,-s,0,0)$型周期軌道の分岐を更に詳しく調べる（図２５）．

パラメータ$b=0.105, e=0.5$を固定して，aを$a=0$から増加させる．$a=0.1338$でICCの発生が観測される(図２５左の①)．ICCはaを減少させてもしばらくは存在し続け，$a=0.132$で消滅する．数値計算で観測されるこの現象を，不変部分空間$H^2_{s,-s,0,0}$上の分岐解析と直交補空間方向の安定性解析によって説明しよう．

制限力学系は（例２）で示した方程式で表される．図２６右下は$e=0.5$を固定したときの(b,a)分岐図（横軸 0.0<b<0.15,縦軸 0.0<a<0.4）で，図中の四角が右上の拡大図（横軸 0.08<b<0.12,縦軸 0.10<a<0.15）の範囲である．

図２６左下は$b=0.105, e=0.5$を固定したときの周期軌道の分岐図である．縦軸はパラメータa（0.0<a<0.4），横軸は周期軌道の L2 ノルムである．$(s,0)$型周期軌道は a の増加によって SN1 で SN 分岐によって対消滅する．この SN１分岐点を(b,a)空間で追跡した軌跡が右上図，左上図の曲線 SN1 である．$(s,-s)$型周期軌道は a が（0.15 より）大きいときは安定であるが，a を減少させると PF 分岐を起こし，分岐点から枝となる周期軌道を発生させる．枝周期軌道は記号 TR4 で NS 分岐を起こす．この TR4 分岐点を(b,a)空間で追跡した軌跡が右上図，左上図の曲線 TR4 である．右上図で$(s,0)$型周期軌道の安定領域（曲線 SN1 の下側）から a を増加させる．

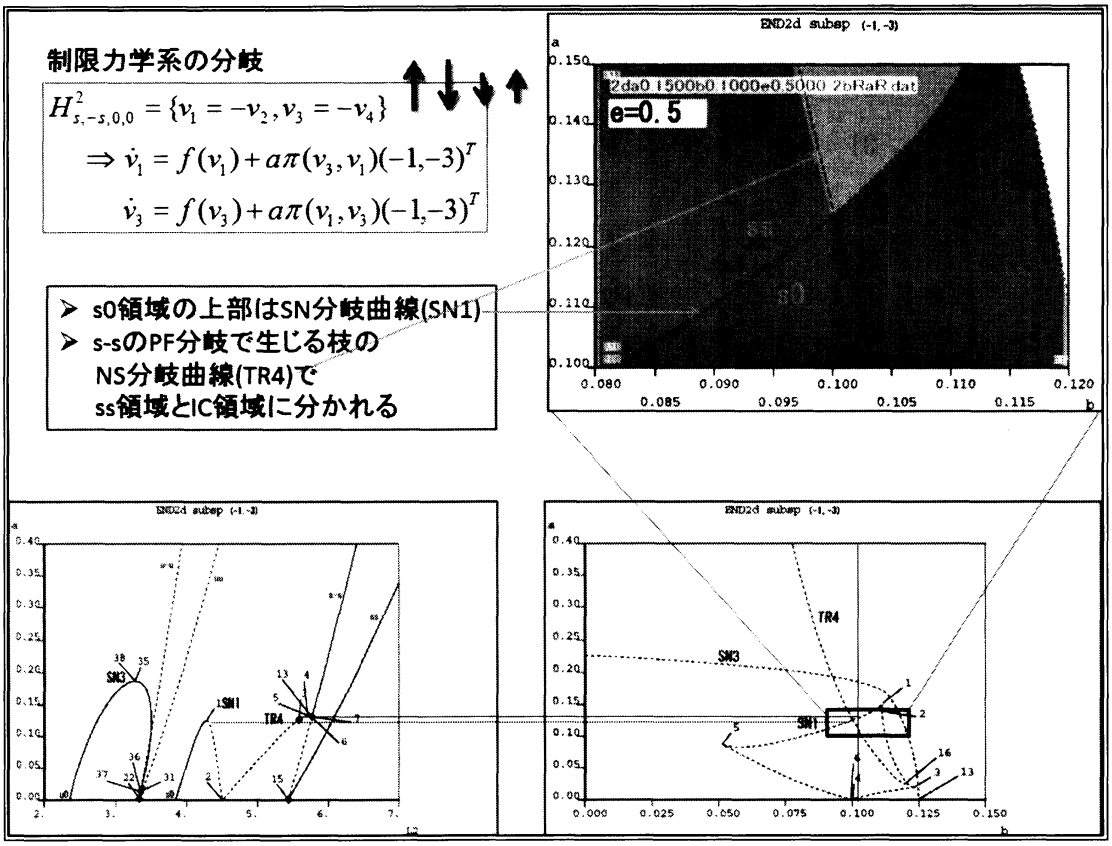

制限力学系の分岐
$H^2_{s,-s,0,0} = \{v_1 = -v_2, v_3 = -v_4\}$
$\Rightarrow \dot{v}_1 = f(v_1) + a\pi(v_3, v_1)(-1,-3)^T$
$\dot{v}_3 = f(v_3) + a\pi(v_1, v_3)(-1,-3)^T$
➢ s0領域の上部はSN分岐曲線(SN1)
➢ s-sのPF分岐で生じる枝のNS分岐曲線(TR4)でss領域とIC領域に分かれる
END2d subsp (-1,-3)
e=0.5
SN3
SN1
TR4

図２６

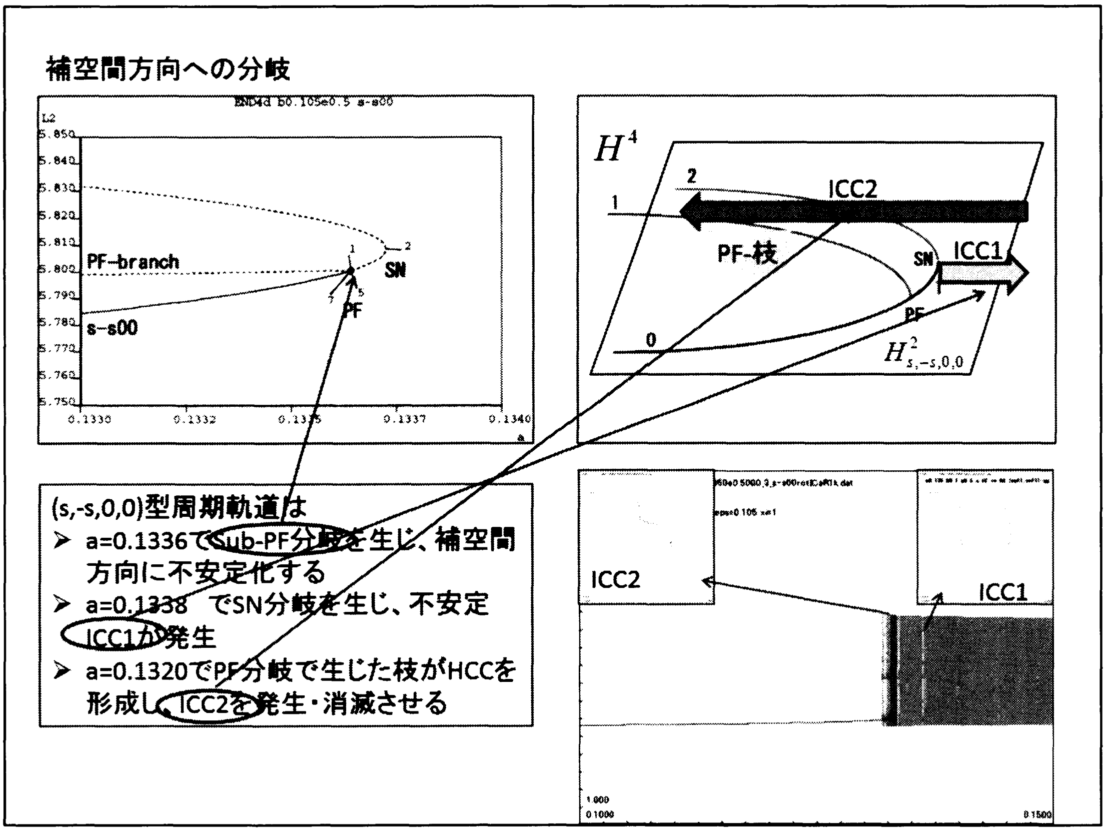

補空間方向への分岐
PF-branch
SN
PF
s-s00
H^4
ICC2
ICC1
PF-枝
$H^2_{s,-s,0,0}$
(s,-s,0,0)型周期軌道は
➢ a=0.1336でSub-PF分岐を生じ、補空間方向に不安定化する
➢ a=0.1338　でSN分岐を生じ、不安定ICC1が発生
➢ a=0.1320でPF分岐で生じた枝がHCCを形成し、ICC2を発生・消滅させる
ICC2
ICC1

図２７

曲線 TR4 よりも左側で SN1 を横切ると(s,s)型（同相同期）周期軌道に落ち込む．この場合，パラメータを戻しても$(s,0)$型周期軌道に戻ることはない．曲線 TR4 よりも右側で SN1 を横切ると ICC を発生させる．A を再び減少させると，ヒステリシスなしに周期軌道に戻る．制限力学系上では，SNC 経由で安定 ICC が発生していることがわかる．

次に制限力学系上の$(s,0)$型周期軌道を，非制限力学系（元の４結合系）上で追跡する．対応する周期軌道は$(s,-s,0,0)$型である．図２７左上は$(s,-s,0,0)$型周期軌道の分岐を表している．（横軸 0.1330<a<0.1334, 縦軸 0.750<L2<0.850） a=0.133 では安定であるが，a の増加によって SN 分岐で対消滅を起こすことは，制限力学系の分岐を反映している．しかし，SN 分岐を起こす前に，サブクリティカル PF 分岐を起こし，不変部分空間$H^2_{s,-s,0,0}$

の補空間方向に不安定化していることがわかる．したがって，ここでの SN 分岐は，index1 のサドルと index2 のサドルの対消滅となり，不安定な ICC1 が SNC 経由で発生していることがわかる．サブクリティカル PF 分岐によって生じた枝周期軌道は HCC を形成し，安定な ICC2 を発生・消滅させている．

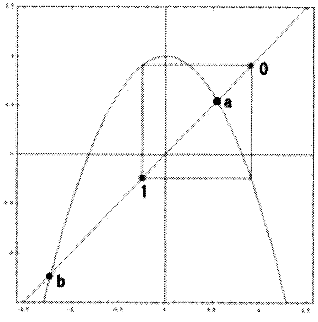
§４　まとめ

§１では，不変閉曲線（Map の場合），不変トーラス（Flow の場合）の発生・消滅・分岐について整理した．その結果，現時点では，①周期軌道とよく似た分岐をするのに，分岐条件が分からないこと，②数値的に捕捉する方法が確立していないこと，が分岐解析上の問題点であることを明らかにした．

§２では，結合写像格子（ Map ）における，不変閉曲線の発生・消滅・分岐について述べた．３結合系で，ＩＣＣの発生・消滅メカニズムがＳＮＣ経由からＨＣＣ経由に連続的に変化する場合があることを示した．また，不安定ＩＣＣが発生し“Sub-PF”-分岐でＩＣＣが安定化していると思われること（予想）を，不安定多様体の変形によって示した．

§３では，結合発振器（Flow）における，不変部分空間と不変トーラスの発生・消滅・分岐について述べた．４結合系において，制限力学系の解析と補空間方向の安定性解析から，不安定ＩＣＣ（ＳＮＣ経由発生，不変部分空間内で安定）と安定ＩＣＣ（ＨＣＣ経由発生）が共存していることを示した．§３の研究は，遠藤哲郎（明治大）・神山恭平（明治大），清水（千葉工大）との共同である．分岐解析プログラム
ＡＵＴＯの指導では矢ヶ崎一幸さん（新潟大）にお世話になったことを，ここに感謝します．

【補足】結合写像格子 CML の２周期点の型



ロジスティック写像の不動点，２周期点を下図のように a,b,0,1 で表す．結合パラメータ$\varepsilon=0$のときは，直積系であるから，２周期点は a,b,0,1 の組み合わせで表すことができる．$\varepsilon\neq 0$のときも，$\varepsilon=0$の周期点を連続的に延長して得られる周期点を同じ記号であらわす．例えば，001 型２周期点は$\varepsilon=0$のとき 0,0,1 の２周期点から得られる安定２周期点であり，00a 型２周期点は$\varepsilon=0$のとき 0,0 の２周期点と a の不動点の直積から得られる不安定(index1)２周期点である．