

非対称コマにおける馬蹄力学の存在

新潟大学自然科学系 矢ヶ崎 一幸 (Kazuyuki Yagasaki)

Institute of Science and Technology
Niigata University

1. はじめに

コマ (heavy top) は重力下における固定点をもつ剛体で、古典力学における基礎的かつ重要な問題である。その運動方程式は、Euler, Lagrange, Kovalevski, Goryachev-Chaplygin の名前が付けられた、4つの場合のみ可積分であることが知られている [1-3]。特に、Euler のコマは重心が固定点、あるいは等価的に重力の影響がない場合であり、Lagrange のコマは剛体が対称で固定点に対称軸上に存在する場合である。

Holmes と Marsden [4] は、それまでの彼らの結果 [5, 6] に基づき、Melnikov [7] の方法を拡張し、Lagrange のコマに摂動が加わった、非対称コマのモデルである 2 自由度ハミルトン系において、周期軌道の横断的ホモクリニック軌道が存在し、そのダイナミクスに馬蹄写像が埋め込まれていることを主張した。しかしながら、彼らの取扱いは不適切で、運動方程式の特異性が十分に考慮されていない。さらに、彼らの理論はその後修正され、拡張されているが [8, 9]、このような特異性の適切な取扱いは不可能であり、非対称コマにおける馬蹄力学 (カオス) の存在証明は未解決の問題となっている。

本報告では、非対称コマにおける馬蹄力学の存在証明を与える。まず、運動方程式の特異性を除去するため、固定点に傾いた平面を導入する。そのため、解析モデルは 1 つの付加的な第 1 積分を有する 3 自由度ハミルトン系となり、鉛直軸まわりの自転に対応した周期軌道の 3 次元安定/不安定多様体を解析する必要がある。新たに開発された Melnikov 型の手法の概略を与えた後、その手法を用いて、4 次元レベル集合上でその周期軌道に対する横断的ホモクリニック軌道の存在を証明する。このとき、Smale-Birkhoff のホモクリニック定理 [8, 10] により、そのダイナミクスに馬蹄写像が埋め込まれていることになる。さらに、計算機ツール AUTO97 [11] を用いた安定/不安定多様体の数値計算結果を与え、周期軌道の横断的ホモクリニック軌道が存在することを数値的に確認する。なお、詳細については文献 [12] を参照されたい。

2. 数学モデル

図 1 に示されるような、角度 $\delta (< \frac{1}{4}\pi)$ だけ傾いた平面上に固定点をもつコマを考える。平面の傾き δ はコマのダイナミクスに影響しないことを注意する。図 1(a) において xy 平面は水平面を表し、重力は z 軸の負の方向に作用するものとする。 $x'y'$ 平面は水平面から角度 δ だけ傾き、 z' 軸はその面に垂直である。図 1(b) に示すように、オイラー角 (θ, ϕ, ψ) を $x'y'z'$ 座標系に導入する。また、 ξ, η および ζ 軸はコマの主軸方向を表し、固定点と重心は ζ 軸上と仮定する。このとき、コマ

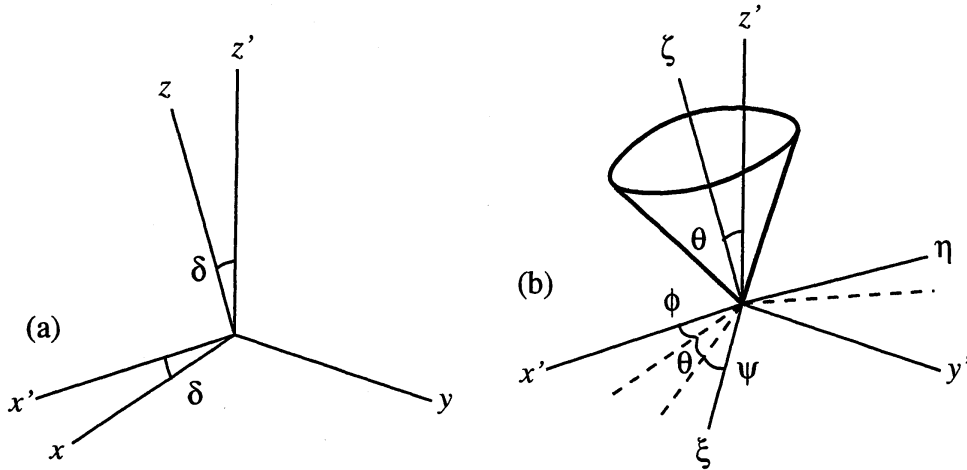


図 1. コマ: (a) 角度 δ だけ傾いた平面; (b) オイラー角 (θ, ϕ, ψ)

のハミルトン関数は次式で与えられる.

$$H = \frac{1}{2} \left\{ \frac{[(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \sin \psi + p_\theta \sin \theta \cos \psi]^2}{I_1 \sin^2 \theta} + \frac{[(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \cos \psi]^2}{I_2 \sin^2 \theta} + \frac{p_\psi^2}{I_3} \right\} + mgl(\cos \delta \cos \theta + \sin \delta \sin \theta \cos \phi) \quad (1)$$

ここで, p_θ, p_ϕ および p_ψ は, それぞれ, θ, ϕ および ψ に対する共役な角運動量を表し, $I_j, j = 1, 2, 3$, は主軸まわりの慣性モーメントである.

以下では, $I_1 \approx I_2$ の場合を考え, $0 < \varepsilon \ll 1$ として $I_1 = (1 + \varepsilon)I_2$ とおき, 時間と角運動量を $t \rightarrow I_1 t$, $p_{\theta, \phi, \psi} \rightarrow p_{\theta, \phi, \psi} / I_1$ と変換すると, コマの運動方程式はハミルトン関数が $H = H_0 + \varepsilon H_1$ で与えられるハミルトン系となる. ここで, $\beta_1 = I_1 / I_3$, $\beta_2 = 2mgl / I_1$ として

$$H_0 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin \theta} \right)^2 + p_\theta^2 + \beta_1 p_\psi^2 \right\} + \frac{1}{2} \beta_2 (\cos \delta \cos \theta + \sin \delta \sin \theta \cos \phi), \quad (2)$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \psi - p_\theta \sin \theta \cos \psi}{\sin \theta} \right)^2$$

である. $\delta = 0$ の場合が文献 [4] で取り扱われた.

3. 対称コマ

$\varepsilon = 0$ の対称コマの場合を考える. ハミルトン方程式が次式で与えられる.

$$\dot{\theta} = p_\theta, \quad \dot{\phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \beta_1 p_\psi - \frac{(p_\phi - p_\psi \cos \theta) \cos \theta}{\sin^2 \theta},$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{(p_\phi \cos \theta - p_\psi)(p_\phi - p_\psi \cos \theta)}{\sin^3 \theta} + \frac{1}{2} \beta_2 (\cos \delta \sin \theta - \sin \delta \cos \theta \cos \phi), \quad (3)$$

$$\dot{p}_\phi = \frac{1}{2} \beta_2 \sin \delta \sin \theta \sin \phi, \quad \dot{p}_\psi = 0.$$

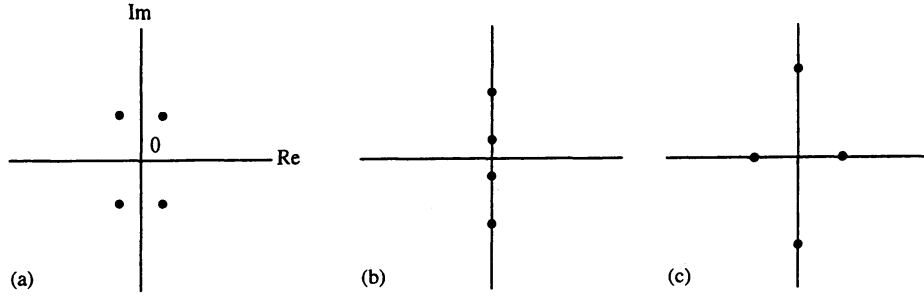


図 2. 固有値: (a) $\beta_2 > \frac{1}{2}p_\psi^2 / \cos^2 \delta$; (b) $2p_\psi^2(1 - \cos^2 \delta) < \beta_2 < \frac{1}{2}p_\psi^2 / \cos^2 \delta$; (c) $0 < \beta_2 < 2p_\psi^2(1 - \cos^2 \delta)$

ψ は循環座標であるから, p_ψ は定数となり, 相空間は 4 次元 $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ -空間に縮約できる.

さらに, $\delta = 0$ の場合, ϕ も循環座標となり p_ϕ は定数となる. $p_\phi = p_\psi \in (0, \sqrt{2\beta_2})$ のとき, (θ, p_θ) 平面上で原点は双曲型鞍点で, 4 次元相空間には周期軌道 $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = (0, \frac{1}{2}p_\psi t \bmod 2\pi, 0, p_\psi)$ が存在する. Holmes と Marsden [4] のアプローチに従うと, $\delta \neq 0$ が微小な場合, 非摂動周期軌道の近傍に周期軌道が存在し, 横断的ホモクリニック軌道が存在するという結果が得られる. しかしながら, 対称コマは可積分であるから, この結果は明らかに誤りである. これは, $p_\phi \neq p_\psi$ のとき非摂動ハミルトン・ベクトル場が $(\theta, p_\theta) = (0, 0)$ で特異となることによる.

実際, $\delta \neq 0$ の場合には, 鉛直軸まわりの自転に対応した平衡点

$$(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = (\delta, 0, 0, p_\psi \cos \delta) \quad (4)$$

が存在し, ヤコビ行列の固有値は

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{1}{2} \left(\beta_2 - p_\psi^2 \pm \sqrt{p_\psi^2(p_\psi^2 - 2\beta_2 \cos^2 \delta)} \right)}$$

と求められる. これらの固有値の配置を図 2 に示す. 特に, $\beta_2 > \frac{1}{2}p_\psi^2 / \cos^2 \delta$ のとき, この平衡点は双曲的鞍点となる. また, 第 1 積分

$$F(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi, p_\psi) = p_\phi - \tan \delta \left(p_\theta \sin \phi + \frac{p_\phi \cos \theta - p_\psi \cos \phi}{\sin \theta} \right) \quad (5)$$

が存在する.

$\delta = 0$ のときのオイラー角と共役な運動量を $(\bar{\theta}, \bar{\phi}, \bar{p}_\theta, \bar{p}_\phi, \bar{p}_\psi)$ によって表す. 容易に次の関係が存在することがわかる.

$$\theta = \arccos(\cos \delta \cos \bar{\theta} - \sin \delta \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi}), \quad \phi = \arccos\left(\frac{\sin \delta \cos \bar{\theta} + \cos \delta \sin \bar{\theta} \cos \bar{\phi}}{\sin \theta}\right) \quad (6)$$

文献 [4] の 3 節で与えられているように, $\gamma = 2\beta_2 - \bar{p}_\psi^2 > 0$ のとき, $(\bar{\theta}, \bar{p}_\theta)$ -平面上にホモクリニック軌道

$$\bar{\theta}^h(t) = \arccos\left(1 - \frac{\gamma}{\beta_2} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{\gamma}}{2} t\right), \quad \bar{p}_\theta^h(t) = \frac{d}{dt} \bar{\theta}^h(t)$$

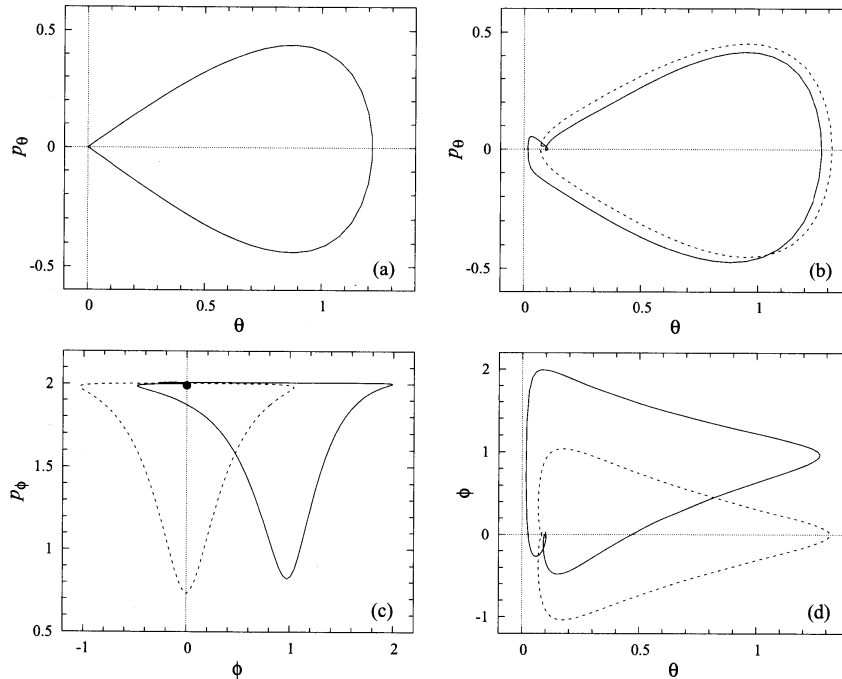


図 3. $\beta_2 = 3, p_\psi = \bar{p}_\psi \cos \delta = 2$ のときの非摂動ホモクリニック軌道: (a) $\delta = 0$; (b)-(d) $\delta = 0.1$

が存在する. このホモクリニック軌道に沿った, $t = 0$ からの $(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ の変化量は

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^h(t) &= \frac{1}{2}t - \frac{1}{\bar{p}_\psi} \arctan \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\bar{p}_\psi} \tanh \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}t \right) \right), \\ \bar{\psi}^h(t) &= \bar{p}_\psi \left[\left(\beta_1 - \frac{1}{2} \right) t - \frac{1}{\bar{p}_\psi} \arctan \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{\bar{p}_\psi} \tanh \left(\frac{\sqrt{\gamma}}{2}t \right) \right) \right] \end{aligned} \quad (7)$$

と求められる. 式 (3) の第 1 式と第 2 式および (6) を用いると, $\delta \neq 0$ の場合の平衡点 (4) に対するホモクリニック軌道が次のように得られる.

$$\begin{aligned} \theta_\pm^h(t) &= \arccos \left(\cos \delta \cos \bar{\theta}^h(t) \mp \sin \delta \sin \bar{\theta}^h(t) \cos(\bar{\phi}^h(t) + \phi_0) \right), \\ \phi_\pm^h(t) &= \pm \arccos \left(\frac{\sin \delta \cos \bar{\theta}_\pm^h(t) + \cos \delta \sin \bar{\theta}_\pm^h(t) \cos \bar{\phi}_\pm^h(t)}{\sin \theta_\pm^h(t)} \right), \\ p_{\theta,\pm}^h(t) &= \dot{\theta}_\pm^h(t), \quad p_{\phi,\pm}^h(t) = \dot{\phi}_\pm^h(t) \sin^2 \theta_\pm^h(t) + p_\psi \cos \theta_\pm^h(t) \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, $\phi_0 \in [0, 2\pi)$ は任意定数である. $\delta = 0$ および $\delta \neq 0$ の場合の非摂動ホモクリニック軌道の例を図 3 に示す. 図 3(b)-(d) において実線と破線は, それぞれ, $\phi_0 = 1$ と 0 に対するホモクリニック軌道であり, 図 3(c) において記号 “•” は平衡点 (4) の位置を表す.

4. Melnikov 理論

本節では, 付加的な第 1 積分を有する, 一般的な 3 自由度ハミルトン系に対する Melnikov 理論を与える. 類似の場合が文献 [8] で取り扱われているが, 付加的な第 1 積分が存在する点が異なっている. 前節での表記を違う意味で用いることにする.

次の一般的な形の 3 自由度ハミルトン系を考える.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= JD_x H_0(x, I) + \varepsilon JD_x H_1(x, I, \psi), \\ \dot{I} &= -\varepsilon D_\psi H_1(x, I, \psi), \\ \dot{\psi} &= D_I H_0(x, I) + \varepsilon D_I H_1(x, I, \psi) \end{aligned} \quad (x, I, \psi) \in \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \quad (9)$$

ここで, J は 4 次のシンプレティック行列

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

であり, $H_0, H_1 : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ は C^{r+1} 級 ($r \geq 2$), \mathbb{S}^1 は長さ 2π の円周を表す. $I_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2$, を $I_1 < I_2$ を満たすある定数として, 以下のことを仮定する: まず, $\varepsilon = 0$ のとき, 任意の $I \in \mathcal{I} = [I_1, I_2]$ に対して

(H1) 式 (9) の x 成分は独立な第 1 積分 $F_1(x, I) = H_0(x, I)$ と $F_2(x, I)$ を有する, すなわち, $D_x F_1(x, I), D_x F_2(x, I)$ は線形独立で, $D_x F_1(x, I) \cdot JD_x F_2(x, I) = 0$ を満たす. ここで, “ \cdot ” は内積を表す.

(H2) 式 (9) の x 成分において双曲型鞍点 $x = x_0(I)$ が存在し, ホモクリニック軌道の 1 パラメータ族 $x^h(t; I, \alpha)$, $\alpha \in \mathcal{A} = (\alpha_1, \alpha_2)$, を有する.

(H3) $D_I H_0(x_0(I), I) \neq 0$

さらに, $\varepsilon \neq 0$ のとき,

(H4) 式 (9) は独立な第 1 積分 $G_1(x, I, \psi; \varepsilon) = H_0(x, I) + \varepsilon H_1(x, I, \psi)$, $G_2(x, I, \psi; \varepsilon)$ を有し, $G_2(x, I, \psi; 0) = F_2(x, I)$ を満たす.

(x, I, ψ) -相空間において, 鞍点 $x_0(I)$ は双曲型周期軌道 $\gamma_0(I)$ に対応し, 3 次元安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\gamma_0(I))$ が存在する. さらに, 2 次元不変多様体 $\mathcal{M}_0 = \{\gamma_0(I), I \in \mathcal{I}\}$ が存在し, 4 次元安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\mathcal{M}_0) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} W^{s,u}(\gamma_0(I))$ を有する. $I_1 < I'_1 < I'_2 < I_2$, $\mathcal{I}' = [I'_1, I'_2]$ とし,

$$U_\delta = \{(x, I, \psi) \mid |x - x_0(I)| < \delta, I \in \mathcal{I}'\}, \quad W_{\text{loc}}^{s,u}(\mathcal{M}_0) = W^{s,u}(\mathcal{M}_0) \cap U_\delta$$

と定める. 次の命題が成立する (normally hyperbolic 不変多様体については, 例えば文献 [13] を参照せよ).

命題 1 $0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$ となる十分小さな ε, δ に対して, 次の性質を満たすような, 2 次元 normally hyperbolic 不変多様体 \mathcal{M}_ε と 4 次元局所安定/不安定多様体 $W_{\text{loc}}^{s,u}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ が存在する.

- (i) \mathcal{M}_ε は \mathcal{M}_0 の $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -近傍に存在する;
- (ii) \mathcal{M}_ε は周期軌道からなる;

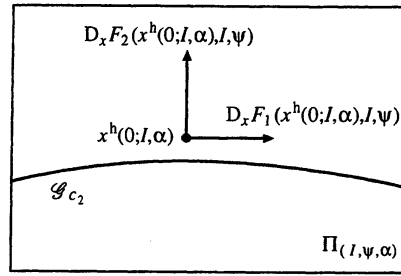


図 4. 2次元平面 $\Pi_{(I, \psi, \alpha)}$

(iii) $W_{\text{loc}}^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ は $W_{\text{loc}}^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_0)$ の $\mathcal{O}(\varepsilon)$ -近傍に存在する;

(iv) $W_{\text{loc}}^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ 上の軌道 $y_\varepsilon^{\text{s,u}}(t)$ に対して, $t \rightarrow \infty$ または $-\infty$ のとき $|y_\varepsilon^{\text{s,u}}(t) - \mathcal{M}_\varepsilon| \rightarrow 0$ となる.

通常の方法により, 局所的な安定/不安定多様体 $W_{\text{loc}}^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ から大域的な安定/不安定多様体 $W^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ を定義する. $\Pi_{(I, \psi, \alpha)}$ を点 $(x^{\text{h}}(0; I, \alpha), I, \psi)$ において2つのベクトル

$$(x, I, \psi) = (D_x F_j(x^{\text{h}}(0; I, \alpha), I), 0, 0), \quad j = 1, 2,$$

で張られる2次元平面とする (図4を参照). $W^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_0)$ は $\Pi_{(I, \psi, \alpha)}$ に交差するから, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $W^{\text{s,u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ も交差する.

$c_2 = G_2(x_\varepsilon^{\text{s,u}}(0; I, \alpha), I, \psi)$ とおき,

$$\mathcal{G}_{c_2} = \{(x, I, \psi) \mid G_2(x, I, \psi; \varepsilon) = c_2\}$$

とする. $\Pi_{(I, \psi, \alpha)} \cap \mathcal{G}_{c_2}$ 上での $W^{\text{s}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ と $W^{\text{u}}(\mathcal{M}_\varepsilon)$ の距離を

$$d_\varepsilon(\psi; I, \alpha) = D_x H_0(x^{\text{h}}(0; I, \alpha), I) \cdot (x_\varepsilon^{\text{s}}(0; I, \psi, \alpha) - x_\varepsilon^{\text{u}}(0; I, \psi, \alpha))$$

と定める. Melnikov 理論の標準的なアプローチ (例えば, 文献 [8, 10] を参照) により, 次式が得られる.

$$d_\varepsilon(\psi; I, \alpha) = \varepsilon M^{I, \alpha}(\psi) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (10)$$

ここで,

$$\begin{aligned} M^{I, \alpha}(\psi) = & \int_{-\infty}^{\infty} (D_x H_0 \cdot J D_x H_1 - D_I H_0 D_\psi H_1)(x^{\text{h}}(t, I, \alpha), I, \psi^{\text{h}}(t) + \psi) dt \\ & + D_I H_0(x_0(I), I) \int_{-\infty}^{\infty} D_\psi H_1(x^{\text{h}}(t, I, \alpha), I, \psi^{\text{h}}(t) + \psi) dt \end{aligned} \quad (11)$$

であり, 慣例に従い, **Melnikov 関数**と呼ぶ. $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して4次元レベル集合

$$\mathcal{H}_c = \{(x, I, \psi) \in \mathbb{R}^4 \times \mathcal{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \mid G_j(x, I, \psi; \varepsilon) = c_j\}$$

を定義する.

定理 2 ある $(I, \alpha) \in \mathcal{I}' \times \mathcal{A}$ に対して, $M^{I, \alpha}(\psi)$ が単純な零点 $\psi = \psi_0$ を有するものとする:

$$M^{I, \alpha}(\psi_0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \psi} M^{I, \alpha}(\psi_0) \neq 0$$

このとき, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対して $W^s(\mathcal{M}_\varepsilon) \cap \mathcal{H}_c$ と $W^u(\mathcal{M}_\varepsilon) \cap \mathcal{H}_c$ は 4 次元レベル集合 \mathcal{H}_c 上で横断的に交差する. ここで, $c_1 = H_0(x_0(I), I) + \mathcal{O}(\varepsilon)$, $c_2 = F_2(x_0(I), I) + \mathcal{O}(\varepsilon)$ である. 特に, \mathcal{H}_c において $\mathcal{M}_\varepsilon \cap \mathcal{H}_c$ 上の周期軌道に対する横断的ホモクリニック軌道が存在する.

5. 横断的ホモクリニック軌道の存在証明

$0 < \varepsilon \ll \delta \ll 1$ として, 前節の Melnikov 理論を式 (2) で与えられる系に適用する. まず, $\varepsilon \neq 0$ の場合も式 (5) の関数 F は第 1 積分となり, 仮定 (H1)-(H4) が成り立つ. また, 任意の $p_\psi \in \mathbb{R}$ に対して

$$\gamma_{p_\psi} = \{(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi) = (\delta, 0, 0, p_\psi \cos \delta), \psi = \beta_1 p_\psi t, \}$$

は周期軌道であり, 定数 $p_{\psi 1} < p_{\psi 2}$ に対して,

$$\mathcal{M} = \bigcup_{p_\psi \in [p_{\psi 1}, p_{\psi 2}]} \gamma_{p_\psi}$$

は 2 次元不変多様体となる. さらに, 式 (8) により, $0 < \delta \ll 1$ のとき

$$(\theta_\pm^h(t), \phi_\pm^h(t), \psi_\pm^h(t), p_{\theta, \pm}^h(t), p_{\phi, \pm}^h(t)) = (\pm \bar{\theta}^h(t), \bar{\phi}^h(t) + \phi_0, \bar{\psi}^h(t), \pm \bar{p}_\theta^h(t), p_\psi) + \mathcal{O}(\delta)$$

となり, Melnikov 関数は

$$M^{p_\psi, \phi_0}(\psi) = \frac{1}{4} A(p_\psi) \sin 2\psi + \mathcal{O}(\delta)$$

と求められる. ここで,

$$A(p_\psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ p_\psi \left[\left(\frac{p_\psi^2}{(1 + \cos \bar{\theta}^h(t))^2} - \beta_2 \right) (1 - \cos \bar{\theta}^h(t)) - \left(\bar{p}_\theta^h(t) \right)^2 \right] \cos 2\bar{\psi}^h(t) \right. \\ \left. - \left(\frac{2p_\psi^2}{1 + \cos \bar{\theta}^h(t)} - \beta_2 \right) \bar{p}_\theta^h(t) \sin \bar{\theta}^h(t) \sin 2\bar{\psi}^h(t) \right\} dt$$

である. 積分 $A(p_\psi)$ を計算することは一般的に困難であるが, $\rho^{-2} = \frac{1}{2}\beta_2 - \frac{1}{4}\bar{p}_\theta^2 \gg 1$ のとき

$$A(p_\psi) > \frac{9}{2p_\psi \rho^2} + \mathcal{O}(\rho^{-1})$$

となることが示される (文献 [12] の付録 B を参照せよ). このようにして次の定理が証明される.

定理 3 $\beta_2 = 2mg\ell/I_1 \gg 1$, $I_1/I_2 = 1 + \varepsilon$, $|\varepsilon| \ll 1$ ならば, 非対称コマのハミルトニアン (1) はレベル集合 $\{H, F = \text{定数}\}$ 上に周期軌道に対する横断的ホモクリニック軌道を有し, 馬蹄力学が存在する.

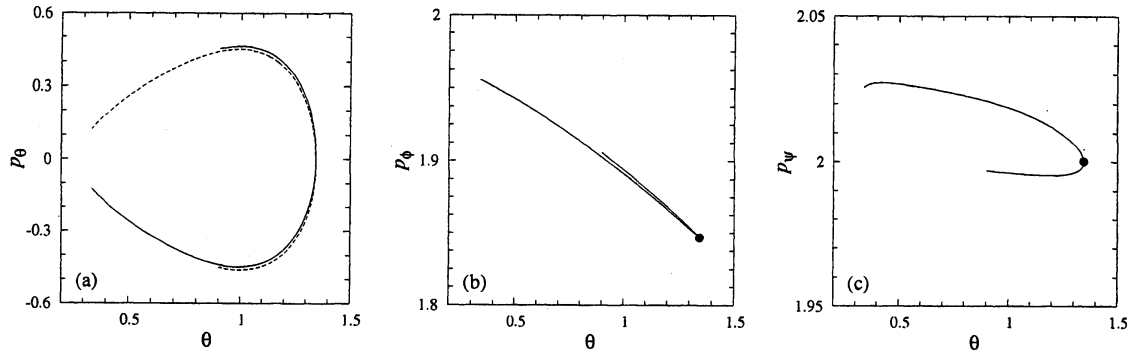


図 5. $\hat{p}_\psi = 2, \varepsilon = 0.01, \delta = 0.1, \beta_1 = 0.5, \beta_2 = 3$ のときの, 断面 $\phi, \psi = 0$ 上における安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\gamma_{\hat{p}_\psi})$ の数値計算結果 (a) (θ, p_θ) -平面; (b) (θ, p_ϕ) -平面; (c) (θ, p_ψ) -平面への射影

6. 数値計算

最後に, 文献 [14] と類似のアプローチを用いて周期軌道の安定/不安定多様体を数値的に求める. 同様の方法は文献 [15] でも用いられている.

$z = (\theta, \phi, \psi, p_\theta, p_\phi, p_\psi)$ と表す. 定数 ψ_0, \hat{p}_ψ に対して $z_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(t) = (\delta, 0, 0, \hat{p}_\psi \cos \delta, \beta_1 \hat{p}_\psi t + \psi_0, \hat{p}_\psi)$ は周期軌道 $\gamma_{\hat{p}_\psi}$ を表す. Z_{ψ_0, \hat{p}_ψ} を線形方程式

$$\dot{\zeta} = JD_\zeta^2 H(z_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(t)) \zeta,$$

のモノドロミー行列とし, $L_{\psi_0, \hat{p}_\psi}^{s,u}$ を, Z_{ψ_0, \hat{p}_ψ} の絶対値が 1 以下あるいは 1 以上の固有値に対する固有行ベクトルからなる 2×4 行列とする. 安定多様体および不安定多様体上の軌道は, それぞれ, 境界条件

$$\begin{aligned} L_{\psi_0, \hat{p}_\psi}^s (\zeta^u(0) - \zeta_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(0)) &= 0, \quad |\zeta^u(0) - \zeta_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(0)| = \varepsilon_u, \\ (\psi^u(0), p_\psi^u(0)) &= (\psi_0, \hat{p}_\psi), \quad z^u(T^u) = z_0^u \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} L_{\psi_0, \hat{p}_\psi}^u (\zeta^s(T^s) - \zeta_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(0)) &= 0, \quad |\zeta^s(T^s) - \zeta_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(0)| = \varepsilon_s, \\ (\psi^s(0), p_\psi^s(0)) &= (\psi_0, \hat{p}_\psi), \quad z^s(0) = z_0^s \end{aligned}$$

の下で, 式 (2) で与えられる系を解くことによって数値的に求められる. ここで, $\varepsilon_{s,u}$ は微小な定数であり, $\zeta^{s,u}(t)$ と $\zeta_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(t)$ は, それぞれ, $z^{s,u}(t)$ と $z_{\psi_0, \hat{p}_\psi}(t)$ の $(\theta, \phi, p_\theta, p_\phi)$ 成分である. $z_0^{s,u} \in \mathbb{R}^6$ は安定/不安定多様体上の点を表し, その値を変化させて解の追跡を行うことにより, 安定/不安定多様体 $W^{s,u}(\gamma_{\hat{p}_\psi})$ を計算することができる. これらの計算を AUTO97 [11] を用いて行った.

安定/不安定多様体の数値計算結果の 1 例を図 5 に示す. ここで, 微小定数は $\varepsilon_{s,u} = 1 \times 10^{-4}$ とした. 図では, 安定および不安定多様体が, それぞれ, 実線および破線でプロットされている. また, 図 5(b) と (c) において, 記号 “●” はこれらの多様体の交差点を表している.

安定および不安定多様体は図 5(a) では横断的に交差している一方, 図 5(b) と (c) では一致しているように見える. これは式 (5) によって与えられる付加的な第 1 積分 F が存在することによる. この

ように、定理3で証明されたように、これらの多様体はレベル集合 $\{H = \frac{1}{2}(\beta_1 \hat{p}_\psi + \beta_2), F = \hat{p}_\psi \sec \delta\}$ 上で横断的に交差していることがわかる。ここで、周期軌道 $\gamma_{\hat{p}_\psi}$ に対して、関数 H と F は、それぞれ、 $\frac{1}{2}(\beta_1 \hat{p}_\psi + \beta_2)$ と $\hat{p}_\psi \sec \delta$ に等しいことに注意する。

参考文献

- [1] Ziglin S L 1983 Bifurcation of solutions and the nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics, I and II *Functional Anal. Appl.* **16**, 181–189; **17**, 6–17
- [2] Ziglin S L 1997 On the absence of a real-analytic first integral in some problems of dynamics, *Functional Anal. Appl.* **31**, 3–9
- [3] Maciejewski A J and Przybylska M 2005 Differential Galois approach to the non-integrability of the heavy top problem *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)* **14** 123–160
- [4] Holmes P J and Marsden J E 1983 Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups *Indiana Univ. Math. J.* **32** 273–309
- [5] Holmes P J and Marsden J E 1982 Horseshoes in perturbations of Hamiltonian systems with two degrees of freedom *Comm. Math. Phys.* **82** 523–544
- [6] Holmes P J and Marsden J E 1982 Melnikov's method and Arnol'd diffusion for perturbations of integrable Hamiltonian systems *J. Math. Phys.* **23** 669–675
- [7] Melnikov V K 1963 On the stability of a center for time-periodic perturbations *Trans. Moscow Math. Soc.* **12** 1–57
- [8] Wiggins S 1988 *Global Bifurcations and Chaos: Analytical Methods* (New York: Springer)
- [9] Haller G 1999 *Chaos near Resonance* (New York: Springer)
- [10] Guckenheimer J and Holmes P J 1983 *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (New York: Springer)
- [11] Doedel E, Champneys A R, Fairgrieve T F, Kuznetsov Y A, Sandstede B and Wang X 1997 *AUTO97: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations (with HomCont)* Concordia University, Montreal (an upgraded version is available at <http://cmvl.cs.concordia.ca/auto/>)
- [12] Yagasaki K 2011 Horseshoes for a nearly symmetric heavy top, submitted for publication
- [13] Wiggins S 1994 *Normally Hyperbolic Invariant Manifolds in Dynamical Systems* (New York: Springer)
- [14] Champneys, A R and Lord G J 1997 Computation of homoclinic solutions to periodic orbits in a reduced water-wave problem *Physica D* **102**, 232–269
- [15] Sakajo T and Yagasaki K 2008 Chaotic motion of the N -vortex problem on a sphere: I. Saddle-centers in two-degree-of-freedom Hamiltonians *J. Nonlinear Sci.* **18**, 485–525