数理解析研究所講究録
第 1755 巻 2011 年 24-29

多価写像の不動点性質
(Fixed Point Properties Related to Multivalued Mappings)

慶應義塾大学・商学部 小宮英敏 (Hidetoshi Komiya)
Faculty of Business and Commerce,
Keio University

1 序

本稿では筆者による [8] の内容をその周辺の話題の紹介を交えて解説する．話題の中心は不動点性質である．一般にある位相空間 X について，X から X への任意の連続写像が不動点をもつとき X は不動点性質をもつという．よく知られた Brouwer の不動点定理 [1] は有限次元ユークリッド空間の任意の有界閉凸集合が不動点性質をもつことを主張している．Brouwer の不動点定理は無限次元空間まで拡張されており，Banach 空間の弱コンパクト凸集合が不動点性質をもつことを主張する定理は Schauder の不動点定理 [9] とよばれ，さらに，局所凸線形位相空間のコンパクト凸部分集合が不動点性質をもつことを主張する定理は Tychonoff の不動点定理 [10] とよばれている．

また，Brouwer の不動点定理は多価写像の不動点定理として拡張され，これは角谷の不動点定理 [5] として知られている．この定理では上半連続という多価写像特有のある種の連続性をみたし，閉凸集合を値としてもつ多価写像を対象としている．多価写像の上半連続性の定義については後に解説する．有限次元ユークリッド空間の有界閉部分集合からそれ自身へ定義された上半連続，閉凸値多価写像が不動点をもつことを主張する定理が角谷の不動点定理である．ここで，多価写像 F の不動点とは $x \in Fx$ をみたす点 x のことをいう．角谷の不動点定理についても，Fan[3] および Glicksberg[4] によって局所凸線形位相空間のコンパクト凸集合からそれ自身への上半連続閉凸値多価写像が不動点をもつという定理まで拡張されている．

角谷-Fan-Glicksberg の不動点定理とは違った種類の多価写像に関する不動点定理のひとつとして Browder の不動点定理 [2] が知られている．その主張は，線形位相空間のコンパクト凸集合 X からそれ自身への多価写像 F が，凸値であり，任意の $y \in X$ について

F の下切片 $\{x \in X : y \in Fx\}$ が X 内で開であるならば，F は不動点をもつというものである．

上記の様々な型の多価写像に関する凸集合の不動点性質について考察することが本稿の目的である．

2 準備

以後表れる位相空間はすべてハウスドルフの分離公理をみたすものとする．X と Y を位相空間とする．X から Y への**多価写像**とは X の各点 x に対し，Y の非空部分集合 Fx を対応させる写像をいう．この状況を記号では $F : X \twoheadrightarrow Y$ と表記する．Y の部分集合 B に対し，B の F による**上逆像**$F^u(B)$ を $F^u(B) = \{x \in X : Fx \subset B\}$ と定義する．そして，$F : X \twoheadrightarrow Y$ は Y の任意の開部分集合 G について $F^u(G)$ が X の開部分集合となるとき**上半連続**であるという．また，Y が線形位相空間であるとき，Y の任意の開半空間 H について $F^u(H)$ が X の開部分集合となるとき F は**上半空間連続**ということにしよう．

位相空間 X は X から X へのすべての連続写像 f が不動点，すなわち $f(x) = x$ となる $x \in X$ をもつとき**不動点性質をもつ**という．本稿の興味は通常の連続写像ではなく各種の多価写像に関する不動点性質の相互関係を明らかにすることである．

本稿に表れる多価写像 F はすべて凸値である．すなわち，Fx はすべての x について凸集合である．X を局所凸線形位相空間の部分集合とし，$F : X \twoheadrightarrow X$ は凸値多価写像であるとする．このとき，F が閉値で上半連続であるとき**角谷型**であるといい，閉値で上半空間連続であるとき**弱角谷型**であるということにしよう．また，F は開下切片をもつ，すなわち，任意の $y \in X$ について $\{x \in Fx \ni y\}$ が X の開部分集合であるとき，*Browder* **型**であるとよぶことにする．さらに，F のグラフ $G(F) = \{(x, y) \in X \times X : y \in Fx\}$ が $X \times X$ の開部分集合であるとき，F は**開グラフ型**であるということにしよう．

局所凸線形位相空間の凸部分集合 X は，X から X へのすべての角谷型多価写像が不動点をもつとき，**角谷型不動点性質をもつ**ということにし，同様に，**弱角谷型不動点性質**，*Browder* **型不動点性質**，**開グラフ型不動点性質**も定義する．

3 結果

本稿で示したい結果は次の定理である．上で定義した様々な不動点性質がパラコンパクト凸集合においてはすべて同値となることを明らかにしている．

定理 1 X を局所凸線形位相空間 Y のパラコンパクト凸部分集合とすると，以下の五つの主張は互いに同値である．

1. X は弱角谷型不動点性質をもつ．
2. X は角谷型不動点性質をもつ．
3. X は不動点性質をもつ．
4. X は Browder 型不動点性質をもつ．
5. X は開グラフ型不動点性質をもつ．

証明 (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) は明らか．

(3) $\Rightarrow$ (4)　この証明法は [2] にあるものとほぼ同じ手法をとっている．$F : X \twoheadrightarrow X$ を Browder 型とする．$F^{-1}y = \{x \in X : Fx \ni y\}$ は X の開集合であり，任意の $x \in X$ に対し $y \in Fx$ をとれば $x \in F^{-1}y$ となっているので，$\{F^{-1}y\}_{y \in X}$ は X の開被覆である．従って，$\{F^{-1}y\}_{y \in X}$ に付随する連続な単位の分解 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ が存在する．すなわち，各 $f_\alpha : X \to [0,1]$ は連続であり，開集合族 $\{x \in X : f_\alpha(x) > 0\}$ は $\{F^{-1}y\}_{y \in X}$ の局所有限な細分であり，$\sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) = 1$ がすべての $x \in X$ に対し成立している．ここで，和の記号 $\sum_{\alpha \in A}$ は，$f_\alpha(x) > 0$ である添字 α は有限個しかないので，それら有限個の全部の α について和をとること意味する．各 $\alpha \in A$ ごとに $\{x \in X : f_\alpha(x) > 0\} \subset F^{-1}y$ なる y をひとつとりそれを y_α とする．そして，写像 $f : X \to X$ を

$$f(x) = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x) y_\alpha$$

と定める．この f が連続であることは開集合族 $\{x \in X : f_\alpha(x) > 0\}$ が局所有限であることより明らかである．また，$f(X) \subset X$ であることは F が凸値であることからよい．従って，仮定より f は不動点 $x_0 \in X$ をもつ．すなわち，

$$x_0 = \sum_{\alpha \in A} f_\alpha(x_0) y_\alpha$$

が成立しているが，$f_\alpha(x_0) > 0$ なる α については，$x_0 \in F^{-1}y_\alpha$ が成立しているので，$y_\alpha \in Fx_0$ である．Fx_0 は凸集合なので $x_0 \in Fx_0$ が結論され，x_0 が F の不動点であることが証明された．

(4) $\Rightarrow$ (5)　明らか．

(5) $\Rightarrow$ (1)　多価写像 $F : X \twoheadrightarrow X$ は弱角谷型であるが，不動点をもたない，すなわち $x \notin Fx$ がすべての $x \in X$ に対して成立していると仮定して矛盾を導く．Fx は閉凸なの

で，Y 上の連続線形汎関数 f_x が存在し，x と Fx を強分離している．すなわち，

$$x \in I_x = \{y \in Y : f_x(y) < \alpha\} \qquad Fx \subset J_x = \{y \in Y : f_x(y) > \alpha\}$$

となっている実数 α が存在する．

$$U_x = I_x \cap F^u(J_x \cap X).$$

とおくと, U_x は X 内の x の近傍であり, $F(U_x) \subset J_x$ が成立している．$\{U_x\}_{x \in X}$ は X の開被覆なので, X がパラコンパクトであることより，X の開被覆 $\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で $\{\overline{W_\alpha}\}_{\alpha \in A}$ が局所有限かつ $\{U_x\}_{x \in X}$ の細分となっているものが存在する．ここで，集合 B に対する閉包演算 $B \mapsto \overline{B}$ は X 内の閉包を表している．各 $\alpha \in A$ に対し，$\overline{W_\alpha} \subset U_x$ となる $x \in X$ をとり，それを x_α と表す．各 $x \in X$ に対し，Gx を

$$Gx = \bigcap_{\overline{W_\alpha} \ni x} (J_{x_\alpha} \cap X)$$

と定義する．$\overline{W_\alpha} \ni x$ である任意の α について，$x \in U_{x_\alpha}$ なので，$Fx \subset F(U_{x_\alpha}) \subset J_{x_\alpha}$ が成立する．そして，$Fx \subset \bigcap_{\overline{W_\alpha} \ni x}(J_{x_\alpha} \cap X) = Gx$ が成立する．従って，すべての $x \in X$ に対し，$Gx \neq \emptyset$ であるので，上で定義した Gx は多価写像 $G : X \twoheadrightarrow X$ を定義する．そしてこの G が開凸値であることは容易に確認できる．

次に G が開グラフをもつことを示そう．G のグラフ $\mathrm{Gr(G)}$ の任意の点 (x_0, y_0) をとり固定する．そして，M_{x_0} を

$$M_{x_0} = \bigcap_{x_0 \notin \overline{W_\alpha}} (X \setminus \overline{W_\alpha}),$$

と定義すると，$\{W_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は局所有限であるので M_{x_0} は x_0 の近傍である．よって，$M_{x_0} \times Gx_0$ は (x_0, y_0) の近傍である．

次に $M_{x_0} \times Gx_0 \subset \mathrm{Gr(G)}$ を示そう．任意に点 $(x, y) \in M_{x_0} \times Gx_0$ をとる．$x \in M_{x_0}$ なので，$x_0 \notin \overline{W_\alpha}$ である任意の α に対し $x \notin \overline{W_\alpha}$ が成立する．従って，$\{\alpha \in A : x \in \overline{W_\alpha}\} \subset \{\alpha \in A : x_0 \in \overline{W_\alpha}\}$. が成立する．この包含関係より

$$y \in Gx_0 \subset Gx,$$

即ち，$M_{x_0} \times Gx_0 \subset \mathrm{Gr(G)}$ をえるので，G は開グラフをもつ．一方，任意の $x \in X$ をとると，$x \in \overline{W_\alpha}$ である $\alpha \in A$ が存在する．$x \in U_{x_\alpha} \subset I_{x_\alpha}$ なので，$x \notin J_{x_\alpha}$ であり，従って，$x \notin Gx$ である．よって，G は不動点をもたないことになるが，これは X が開グラフ型不動点性質をもつという仮定に矛盾する．□

考察対象の線形位相空間が距離付け可能である場合には以下の Klee[6] による定理が知られている.

定理 2 局所凸距離付け可能線形位相空間の凸部分集合が不動点性質をもつための必要十分条件はそれがコンパクトであることである.

この定理 2 を考慮すると定理 1 より次の系が導かれる.

系 1 X を局所凸距離付け可能線形位相空間の凸部分集合とすると, 以下の六つの主張は互いに同値である.

1. X はコンパクトである.
2. X は弱角谷型不動点性質をもつ.
3. X は角谷型不動点性質をもつ.
4. X は不動点性質をもつ.
5. X は Browder 型不動点性質をもつ.
6. X は開グラフ型不動点性質をもつ.

参考文献

[1] Brouwer, L.E.J., "Uber abbildung von mannigfaltikeiten," Math. Ann. 71(1912), 97–115.

[2] Browder, F.E., "The fixed point theory of multivalued mappings in topological vector spaces," Math. Ann. 177(1968), 283–301.

[3] Fan, K., "Fixed-point and minimax theorems in locally convex topological spaces, " Proc. Nat. Acad. Sci. USA 38(1952), 121–126.

[4] Glicksberg, I.L., "A further generalizaiton of the Kakutani fixed point theorem with applications to Nash equilibrium points," Proc. AMS 3(1952), 170–174.

[5] Kakutani, S., "A generalization of Brouwer's fixed point theorem," Duke Math. J. 8(1941), 457–459.

[6] Klee, V.L., "Some topological properties of convex sets," Trans. Amer. Math. Soc. 78(1955), 30–45.

[7] Komiya, H., "Inverse of the Berge maximum theorem," Econ. Th. 9(1997), 371–375.

[8] Komiya, H., "Fixed point properties related to multivalued mappings," Fixed Point Theory and Applications, 2010(2010), Article ID 581728.

[9] Schauder, J., "Zur Theorie stetiger Abbildung in Funktionalräumen," Math. Z. 26(1927), 47–65.

[10] Tychonoff, A., "Ein Fixpunktsatz," Math. Ann. 111(1935), 767–776.

[11] Yamauchi, T., "An inverse of the Berge maximum theorem for infinite dimensional spaces," J. Nonlinear Convex Anal. 9(2008).