

## ソリトン相互作用の有効ポテンシャル II

富山大・工 角 嶋 浩 (Hiroshi Kakuhata)  
Faculty of Engineering, University of Toyama

### 1 はじめに

ソリトンが衝突しても壊れない波で、衝突によって軌道が変化し位相シフトがおこることはよく知られている [1]。この衝突の際にソリトン粒子と見なせばソリトン間に力が働いているように見えるであろう。ソリトン解からソリトンの相互作用の様子を再現するソリトン粒子の力学を構築することを目指して、これまでに外部磁場中の内部電流を持つストリングの運動を記述する連立非分散方程式のソリトンに対して effective force とその有効ポテンシャルを求めて来た [2]。このときいくつかの問題点

- それぞれのソリトン粒子に作用する力の和が 0 にならない (作用反作用の法則が成り立たない)
- 無理に高次の近似項を取り込んだ (解の特異性の緩和)
- ソリトンの回転の効果を取り入れていない
- 求めた有効ポテンシャルがどの程度正しいのか?

などがあった。本稿ではこれらの最後の 1 つを検討する。

### 2 連立非分散方程式

連立非分散方程式

$$\partial_\tau^2 \mathbf{r} - \partial_\sigma^2 \mathbf{r} = (\partial_\tau \mathbf{r} + \partial_\sigma \mathbf{r}) \times (\mathbf{J} \times \mathbf{r}), \quad (1)$$

は外部電流  $\mathbf{J}$  が作る外部磁場中の内部電流を持つ  $\mathbf{J}$  方向に張られたストリングの運動を記述し、ソリトンは非線形な外部 Lorentz 力と線形なストリング張力の釣り合いによって形成される。ソリトンは 3 次元 Euclidean 空間  $\mathbf{R}^3$  中で  $\mathbf{J}$  方向に沿って双方向に伝播する。また、この周りに回転するため、ソリトンは 3 次元的に振る舞う [3],[4]。またソリトンは位相速度と角速度によってループであったりなかったりし、このためもあっているいろいろなソリトン相互作用パターンがある。ここに、 $\mathbf{r} = (X, Y, Z)$  はストリングの位置ベクトル、 $\tau$  は時間、 $\sigma$  はストリングに沿うパラメータである。左辺はストリング自体の運動に対応し、右辺が  $\mathbf{J}$  がつくる磁場とストリングの内部電流との相互作用に対応する。

### 3 連立非分散方程式のソリトン解

$\mathbf{R}^3$  の解を得るため、連立非分散方程式 (1) を成分で書き下す。以下、簡単のため、 $\mathbf{J} = (0, 0, 1)$  とすると

$$\begin{aligned} \partial_\tau^2 X - \partial_\sigma^2 X &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)X, \\ \partial_\tau^2 Y - \partial_\sigma^2 Y &= -(\partial_\tau Z + \partial_\sigma Z)Y, \\ \partial_\tau^2 Z - \partial_\sigma^2 Z &= (\partial_\tau X + \partial_\sigma X)X + (\partial_\tau Y + \partial_\sigma Y)Y. \end{aligned} \quad (2)$$

になる。この方程式に対する双線形方程式

$$\begin{aligned} (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q &= 0, \\ (D_\tau^2 - D_\sigma^2 + 1)F \cdot Q^* &= 0, \\ (D_\tau - D_\sigma)^2 F \cdot F - \frac{1}{2}Q^*Q &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

は、双線形変換

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Re} \left( \frac{Q}{F} \right), \quad Y = \operatorname{Im} \left( \frac{Q}{F} \right), \\ Z &= \sigma + 2(\partial_\tau - \partial_\sigma) \ln F, \end{aligned} \quad (4)$$

により得られる。ただし、 $F$  は実関数、 $Q$  は複素関数、「 $*$ 」は複素共役を表し、 $D$  は双線形演算子である。

この双線形方程式から、(3) の 1 ソリトン解

$$Q = e^\eta, \quad F = 1 + b^2 e^{2\eta},$$

を得る。ここで位相は  $\eta = k\sigma - \omega\tau + \eta_0$ 、係数  $b$  は  $b = \frac{1}{2(\omega + \omega^* - k - k^*)}$ 、分散関係は  $\omega^2 - k^2 = -1$ 、である。また、 $\eta_0$ 、 $k$ 、 $\omega$  とはそれぞれ複素初期位相、複素波数と複素振動数である。実空間  $\mathbf{R}^3$  ではソリトン解は

$$\begin{aligned} X &= A \cos \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Y &= A \sin \zeta \operatorname{sech} \xi, \\ Z &= Z_0 + \sigma - A \tanh \xi, \end{aligned}$$

その位相、 $\xi$  と  $\zeta$  および波数  $\gamma$  は振幅、 $A$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \xi &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta, \quad \zeta = \Omega(\tau - v\sigma) + \theta, \\ \gamma &= \sqrt{\frac{1 - (1 - v^2)\Omega^2}{1 - v^2}}, \\ A &= 2\gamma(1 + v), \end{aligned}$$

で与えられる。ここで  $v$  は位相速度、 $\Omega$  は角速度、 $\theta$  と  $\delta$  はそれぞれ回転と並進の実初期位相である。これから、ソリトンは位相速度  $v$  が大きくなれば、振幅が大きくなり、また、 $Z$  はキंक型であることがわかる。ただし、解が実数であるために、 $-1 < v < 1$  と  $\frac{-1}{\sqrt{1-v^2}} < \Omega < \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$  を満足する必要がある。

(3) の2ソリトン解は

$$Q = e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + c_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2} + c_2^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + \eta_2^*},$$

$$F = 1 + b_1^2 e^{\eta_1 + \eta_1^*} + b_{12}^{*2} e^{\eta_1^* + \eta_2} + b_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_2^*} + b_2^2 e^{\eta_2 + \eta_2^*} + d_{12}^2 e^{\eta_1 + \eta_1^* + \eta_2 + \eta_2^*},$$

である。ここで係数は以下で与えられる。

$$b_n = \frac{1}{2(\omega_n + \omega_n^* - k_n - k_n^*)}, \quad n = 1, 2,$$

$$b_{12} = \frac{1}{2(\omega_1 + \omega_2^* - k_1 - k_2^*)},$$

$$c_1 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_1 b_{12}^*,$$

$$c_2 = 2(\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2) b_2 b_{12},$$

$$d_{12} = 4|\omega_1 - \omega_2 - k_1 + k_2|^2 b_1 b_2 |b_{12}|^2$$

ここでも位相は  $\eta_n = k_n \sigma - \omega_n t + \delta_n + i\theta_n$  ( $n = 1, 2$ ), 分散関係は  $\omega_n^2 - k_n^2 = -1$  である。

## 4 ソリトン相互作用

この節では非分散連立方程式のソリトンの相互作用を簡単に紹介する。以下では両ソリトンの角速度は 0 で、同じ大きさの位相速度  $v$  と  $-v$  での正面衝突のみ考える。このときには衝突の仕方によって3つのパターンがある。すなわち、正（負）の振幅同士の衝突のときは、小さい相対速度では弾くように衝突し、大きい相対速度では小さいループが大きいループの中を回る。正と負の振幅の衝突のときには、小さいループが一時的に消え、大きいループがさらに大きくなる (図 1)。この最後の場合の衝突寸前の様子を見ると小さいループのピークが大きいループのピークを通り過ぎ、消滅した後、大きなソリトンのピークの右側に再び出現して左に進むことが判る (図 2)。

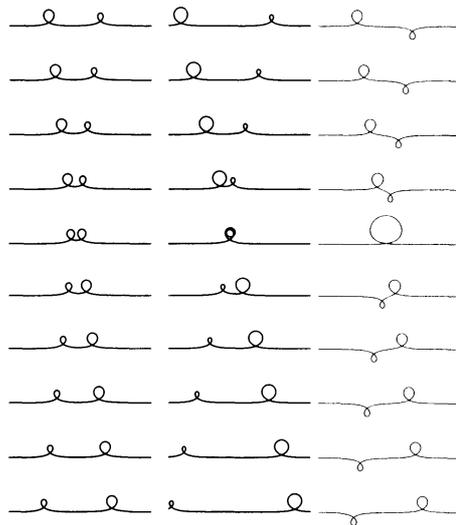


図 1  $v = 0.12,$   $v = 0.24,$   $v = 0.12$

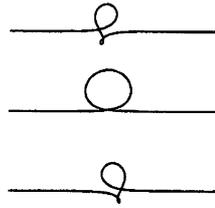


図2  $v = 0.10$

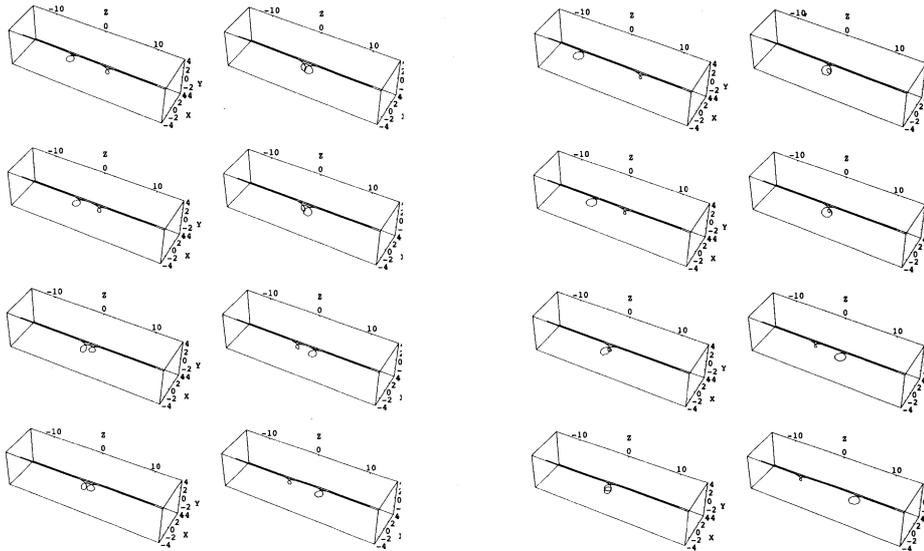


図3  $v = 0.12$

$v = 0.24$

直交するループの衝突も同様であるが、ソリトン同士が近づくとつれ、2つのループが同一の平面上にのるように相互作用する(図3)。

## 5 ソリトンの軌道

前節のようなソリトン相互作用をソリトン粒子の相互作用として理解しようとするとき、ソリトンの位置を  $\tau$  の関数として表せば加速度を計算できる。加速度が判ればソリトン間に働く力が引力か斥力かを知ることができるだろう。ソリトンの位置をソリトンのピークの位置であるとす。以下では、前節と同じ状況を考え、位相速度が  $v$  の右進行(大きい)ソリトンを soliton-1、 $-v$  の左進行(小さい)ソリトンを soliton-2 とする。また図3を考慮すると  $\Omega = 0$  であってもソリトンの衝突に際して回転運動がおこるので同一平面内での衝突のみを考察する。また(図2)を考慮するとソリトンの有効ポテンシャルは多価でなければならないので、 $\mathbf{R}^3$  での有効ポテンシャルを求めることを今回は断念する。 $\Omega = 0$  かつ同一平面内なので  $z$  成分のみ考察する。2つのソリトンが大きさが  $v$  の逆向きの位相速度で正面衝突するとき、2つのソリトンの波数  $\gamma$  は等しく

$\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}$ , になり, 振幅と位相は以下で与えられる。

$$\begin{aligned} A_1 &= 2\gamma(1+v), A_2 = 2\gamma(1-v), \\ \eta_1 &= \gamma(\sigma - v\tau) + \delta_1, \eta_2 = \gamma(\sigma + v\tau) + \delta_2, \\ \xi_1 &= \theta_1, \xi_2 = \theta_2 \end{aligned}$$

双線形方程式の従属変数  $F$  は

$$\begin{aligned} F &= \beta(\tau) + v^2 \cosh 2\gamma\sigma, \\ \beta(\tau) &= \cosh 2\gamma v\tau + (1-v^2) \cos \theta_{12}, \end{aligned}$$

のように非常に簡単になる。ここで,  $\theta_{12}$  は回転の初期位相差で  $\theta_{12} = \theta_2 - \theta_1$  であるが, 同一平面内なのでその値は 0 か  $\pi$  である。

$Z$  はキック型なので, ソリトンのピークは

$$\partial_\sigma^2 Z = 0 \quad (\partial_\sigma^3 Z > 0),$$

で与えられる。2つのソリトンの波数が等しいため, この方程式は,  $e^{2\gamma\sigma}$  の4次方程式

$$\begin{aligned} v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau))e^{8\gamma\sigma} - 2(v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau + \beta(\tau)^2 - 2v^4)e^{6\gamma\sigma} \\ - 6v^3 \sinh 2\gamma v\tau e^{4\gamma\sigma} - (v\beta(\tau) \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)^2 + 2v^4)e^{2\gamma\sigma} \\ + v^2(v \sinh 2\gamma v\tau - \beta(\tau)) = 0, \end{aligned}$$

に帰着する。この方程式は厳密解を求めることができるが, 残念ながら, 厳密解は非常に複雑なため, ソリトン同士が十分離れているときを考察し,  $e^{2\gamma v\tau}$  の0次と1次のみでソリトンのピークの位置  $\sigma_n$  ( $n=1,2$ ) を表すことにする。soliton-1の位置,  $\sigma_1$ , と soliton-2の位置,  $\sigma_2$ , はそれぞれ,  $\sigma_1 \approx v\tau$  と  $\sigma_2 \approx -v\tau$  で与えられるので, 衝突前 ( $\tau \rightarrow -\infty$ ) には,  $x$ - $\sigma$  空間での soliton-1の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{v^2[1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}, \quad (5)$$

soliton-2の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}]e^{2\gamma v\tau}}. \quad (6)$$

になる。同様に, 衝突後 ( $\tau \rightarrow +\infty$ ) では, soliton-1の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_1} \approx \frac{1 + 2(1-v)(2+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{v^2[1 + 2(1-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}, \quad (7)$$

soliton-2の位置は

$$e^{2\gamma\sigma_2} \approx \frac{v^2[1 + 2(1+v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}]e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 2(1+v)(2-v) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}. \quad (8)$$

になる。なお, これらには,  $\cos \theta_{12} = \pi$  のとき特異性がある。

相対座標

$$\rho = \sigma_2 - \sigma_1 \quad (9)$$

は衝突前には

$$e^{2\gamma\rho} \approx \frac{e^{-4\gamma v\tau}}{v^4} \frac{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} \quad (10)$$

衝突後には

$$e^{2\gamma\rho} \approx v^4 e^{-4\gamma v\tau} \frac{1 + 4 \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 4(2 - v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} \quad (11)$$

である。

## 6 effective forces と有効ポテンシャル

(10) と (11) を用いて、ソリトン粒子に対する漸近的な Newton の運動方程式を求めるために、ソリトンの質量を定義する。ソリトンの運動量の  $z$  成分は  $P_z = \int d\sigma \partial_\tau Z$  で与えられるので、soliton-1 と soliton-2 のソリトンの運動量はそれぞれ

$$P_{z1} = 4\gamma(1+v)v, \quad P_{z2} = -4\gamma(1-v)v, \quad (12)$$

で与えられる。ソリトン質量の候補として、

$$M = \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{4(1+v-v^2)}{(1-v)\sqrt{1-v^2}},$$

が考えられるが [5],  $M < 0$ , ( $v < -0.61$ ) および  $\lim_{v \rightarrow -1} M = -\infty$ , となるので不適である。そこで、(12) の  $v$  の係数をソリトンの質量とすることにすれば、soliton-1 と soliton-2 の質量として、それぞれ、

$$m_1 = 4\gamma(1+v), \quad m_2 = 4\gamma(1-v), \quad (13)$$

を得る。これらから換算質量  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  は

$$\mu = \frac{2}{\gamma} \quad (14)$$

になる。これを用いれば、相対座標に対する加速度から、漸近的な Newton の運動方程式は衝突前に

$$\mu \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \approx \frac{16(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}}{1 + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{2\gamma v\tau}} \quad (15)$$

衝突後に

$$\mu \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \approx \frac{-16(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}}{1 + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{-2\gamma v\tau}} \quad (16)$$

となる。ここで、(10) と (11) を逆に解いて、相対座標  $\rho$  により Newton の運動方程式を表すと、

$$\mu \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \approx \frac{16v^2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{-(\gamma\rho + \ln v^2)} [1 + 2(2-v^2) \cos \theta_{12} e^{-(\gamma\rho + \ln v^2)}]}{1 + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{-(\gamma\rho + \ln v^2)}} \quad (17)$$

$$\mu \frac{d^2 \rho}{d\tau^2} \approx \frac{-16v^2(1-v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma\rho - \ln v^2} [1 + 2(2-v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma\rho - \ln v^2}]}{1 + 8(3-v^2) \cos \theta_{12} e^{\gamma\rho - \ln v^2}} \quad (18)$$

になり、右辺が effective force を表す。 $v$  の絶対値が大きくなると力が弱まることが判る。尚、これらの力は遠隔作用ではないので作用反作用の法則は成り立たない。実際、 $\sigma_n$  からそれぞれの運動方程式を求めても、その和、すなわち重心運動の加速度は 0 にならない。また、effective force に現れる特異性はソリトンの位置の特異性に起因するもので、正と負の振幅の場合の小さいループの消失に対応するものと思われる。これらの式、(17) と (18) から、effective force は  $\theta_{12} = 0$  では斥力、 $\theta_{12} = \pi$  では引力、であることが判る。これらは定性的にソリトンの衝突の様子を説明する。

右辺の effective force を積分して、衝突前の有効ポテンシャルは

$$U(\rho) = 2 \frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \Delta \cos \theta_{12} [(2-v^2)e^{-\gamma\rho} + 2(10-3v^2) \cos \theta_{12} \Delta \ln |1+8(3-v^2)\Delta \cos \theta_{12} e^{-\gamma\rho}|]$$

衝突後の有効ポテンシャルは

$$U(\rho) = 2 \frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \Delta \cos \theta_{12} [(2-v^2)e^{\gamma\rho} + 2(10-3v^2) \cos \theta_{12} \Delta \ln |1+8(3-v^2)\Delta \cos \theta_{12} e^{\gamma\rho}|]$$

になる。ここで  $\Delta$  は位相シフトに対応し

$$\Delta = e^{-\ln v^2},$$

である。これらの有効ポテンシャルは

$$U(\rho) = 2 \frac{1-v^2}{\gamma(3-v^2)} \Delta \cos \theta_{12} [(2-v^2)\operatorname{sech} \gamma\rho + 2(10-3v^2) \cos \theta_{12} \Delta \ln |1+8(3-v^2)\Delta \cos \theta_{12} \operatorname{sech} \gamma\rho|]$$

と統一的に書くことができる。この全  $\rho$  での有効ポテンシャルを図示した (図 4,5)。これから、 $\theta_{12} = 0$  のときには釣り鐘状のソリトン型の斥力ポテンシャルになり、 $\theta_{12} = \pi$  の場合には、引力ポテンシャルで2つの特異性があり、 $\rho = 0$  付近では、小さな斥力領域があることがわかる。しかし、斥力領域では小さい方のソリトンが消失している部分に対応し、本来、 $\rho$  の定義が無効な領域であって、その有効性は定かではない。

## 7 Summary

連立非分散方程式のソリトン間に働く effective force と有効ポテンシャルを求めた。effective force は、 $\theta_{12} = 0$  に対しては斥力、 $\theta_{12} = \pi$  に対しては引力で、有効ポテンシャルもこれに対応する。

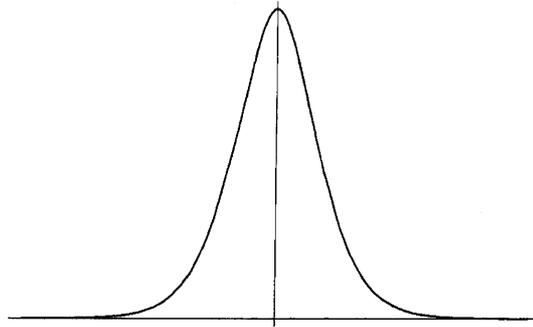


図4 effective potential for  $v = 0.12, \theta_{12} = 0$

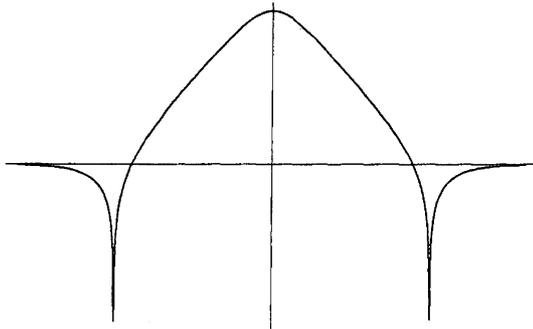


図5 effective potential for  $v = 0.12, \theta_{12} = \pi$

これらはソリトンの衝突の様子を定性的に説明する。正と正（負と負）の振幅の衝突では、小さな相対速度での衝突は斥力により弾くが、相対速度が大きくなると停止できずに中を回る。正と負の振幅の場合には、引力により加速されより大きな速さで衝突する（図1）。

本稿の方法は原理的にはほぼ全域で effective force や有効ポテンシャルを計算でき、しかも、 $v$  の大きさによらない。しかし、いくつかの課題が残っている。まず2つのソリトンが一つになってしまうような場合、特に、引力ポテンシャルの斥力領域の場合は2つのソリトンの位置を特定できない領域なので、この方法で議論するのは困難である。従って、全  $\rho$  での有効ポテンシャルはどの程度正しいのかは不明であるが、 $Z$  で表さず  $\sigma$  で表したので斥力領域を除き定性的には正しいものと思われる。また、 $\cos \theta = -1$  の場合の引力ポテンシャル（図5）に特異性が現れることはソリトンの位置に現れる特異性に起因し、小さいソリトンの消失に対応するものと思われるが、詳細は不明である。作用反作用の法則が成立するようにできるかという問題もあげられる。これには定式化を変えるか、質量の変化を考慮するかが考えられるが今のところ良い方法は見つかっていない。

その他の課題としてはより近い位置での相互作用の様子を調べるため、無視した高次の項を取り入れる、あるいは、近距離ではソリトンの位置の取り扱いを変えることと effective force の  $Z$  成分以外の成分を求めることおよび他のソリトン方程式に適用することが可能かどうかを検討することなどがあげられる。

## 参考文献

- [1] 例えば, M. J. Ablowitz and H. Segur, "SOLITONS AND THE INVERSE SCATTERING TRANSFORM", SIAM, 1981.
- [2] 角島浩, 紺野公明, 「ソリトン相互作用の有効ポテンシャル」, 数理解析研究所講究録 1701 「波動現象の数理と応用」, p.197, 京都大学数理解析研究所, 2010 年
- [3] H. Kakuata and K.Konno, J. Phys. Soc. Jpn. **68** (1999) 757.
- [4] H.Kakuata and K.Konno, Theor. Math. Phys. **65** (2002) 713.
- [5] F. Abdullaev, S. Darmanyam and P. Khabibullaev, *Optical Solitons*, Springer-Verlag, 1993.