数理解析研究所講究録
第1761巻 2011年 151-162

カルマン渦列の振動源とその生成・消滅・再配列

Oscillation source of Karman's vortex street and its generation, annihilation and regeneration

同志社大学工学研究科　武本幸生 (Yukio Takemoto)
同志社大学工学研究科　赤嶺博史 (Hiroshi Akamine)
同志社大学理工学部　水島二郎 (Jiro Mizushima)

1 はじめに

古典的な流れの安定性理論は，流れを2次元平行流で近似し，流れの方向に一様性を仮定することにより，安定性の解析法を簡潔に表現することに成功し，多くの流れの安定性を予測するための方法として用いられてきた．この理論によれば，流れと垂直方向の速度分布を実験あるいは理論により求め，その速度分布を主流として，撹乱が満たすオア・ゾンマーフェルト方程式を固有値問題として解くことにより，主流の安定性が決定される．この方法によって，温度の異なる2枚の平板間に生じるベナール対流や回転角速度の異なる2重円筒間に発生するテイラー・クエット流などが調べられ，実験結果とよく一致する性質が求められている [1]．また，平面ポアズイユ流についても，線形安定性解析と実験で良く一致する結果が報告されている [2, 3, 4]．しかし，円柱を過ぎる流れなど，非一様性が大きい流れについては多くの解決すべき問題が残されている．

柱状物体を過ぎる流れの定常流から非定常流への遷移についてはこれまで多くの研究がされてきた．およそ100年前に Bénard[5] は実験によって物体後方の渦は2列の互い違いの配置となることを明らかにし，Kármán[6] は非粘性の仮定の下で，このような2列の互い違いの配置はある条件の下で中立安定になることを理論的に示した．そのため，今日ではこの渦列はベナール・カルマン渦列と呼ばれている．カルマン渦列を作り出す振動の発生は流れの不安定性によるものだろうということは多くの研究者に予想されていたが，オア・ゾンマーフェルト方程式を解くことにより，物体後流が不安定となることを示したのは McKoen[7] である．オア・ゾンマーフェルト方程式を解き，物体後流が不安定となる臨界レイノルズ数を求めたのは Taneda[8] である．Taneda によると，円柱を過ぎる流れが不安定となる臨界レイノルズ数は $\mathrm{Re}_d = 4.51$ である．ここで，Re_d は一様流速を代表速度とし，円柱直径 d を代表長さとするレイノルズ数である．しかし，当時の実験で円柱後方が振動流へ遷移する臨界レイノルズ数は $\mathrm{Re}_d = 30$ 程度であるとされており，オア・ゾンマーフェルト方程式は実験結果に比べて非常に小さな値を与えることになる．その後，有限要素法を用いて非平行性を無視せずに計算された臨界レイノルズ数は $\mathrm{Re}_d \sim 46$ $(\equiv \mathrm{Re}_g)$ [9] であり，平行流を仮定したオア・ゾンマーフェルト方程式の解析結果との違いは明白である．

安定性理論の結果と実験や数値シミュレーションの結果と相違する理由を明らかにするためにさまざまな仮説や理論が提案されてきた．流れの非平行性は大切ではあるが，非平行性のみが理論と実験の差を生み出しているのではなく，むしろ平行流近似の仮定の下で，円柱後流の振動流への遷移を理解しようとする考え方も大切である．円柱を過ぎる流れは比較的低いレイノルズ数において不安定性が発生するので，流れ場は非平行流である．しかし，非平行流を解析的に直接扱うのは困難なので，これまでの物体後流の安定性に関する多くの研究では，流れ方向の各位置における流れに垂直方向の速度分布を平行流近似した系の安定性 (局所安定性) を調べ，流れ場全体の安定性 (全体安定性) を推定するという研究方法が採用されてきた．局所安定性では速度分布は流れ方向に変化せず一様であると仮定しており，このような局所安定性は絶対不安定性と対流不安定性に分類で

きることがプラズマ物理学における研究から明らかになった (Briggs[10], 山田 [11] 参照). 円柱後流のように非一様性が大きい流れでは, 成長する攪乱は 1 つのフーリエ成分で表すことができず, 広い意味で波束状の攪乱である. 波束状の攪乱が, 流れ場中の固定した各点で観測して成長するとき, 流れはその点で (局所) 絶対不安定であり, 攪乱とともに動く座標系で観測すると攪乱は成長するが, 固定した点で観測すれば攪乱が減衰する場合, その点で流れは (局所) 対流不安定であるという. 持続して円柱近傍から渦放出が行われるためには, 円柱近傍に振動源が必要である. このとき, 流れのある領域が絶対不安定であれば, 一度この領域に攪乱が加えられると持続的に振動が生じ, 渦放出が行われることとなる.

このような見地から円柱を過ぎる流れの安定性 (対流不安定性と絶対不安定性) が詳しく調べられた [12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20]. その結果, 円柱後流が絶対不安定となるのはおよそ $\mathrm{Re}_d \sim 25$ であり [16], 円柱後方にできる絶対不安定領域の大きさが $3.5d$ 程度になると全体的不安定が生じて, 流れが持続的に振動するというのがこれらの研究結果の趨勢である. すなわち, Taneda[8] が求めた $\mathrm{Re}_d = 4.51$ は対流不安定攪乱が成長するための臨界レイノルズ数であり, 絶対不安定攪乱が成長するのは $\mathrm{Re}_d \sim 25$ で, 全体不安定性が生じる $\mathrm{Re_g} \sim 46$ の間にポケット (Pocket) と呼ばれるギャップが必要とされてきた. また, 振動を維持しているメカニズムについてはまだ明らかにはなっていないが, 絶対的不安定領域の後縁と円柱との間でなんらかの共鳴が生じていると考えられている. 振動を維持するメカニズムが問題となるのは, 1 つの柱状物体を過ぎる流れでは物体より上流で流れは安定であり, 物体のごく近傍に振動源がない限りカルマン渦列は発生しないことになり, 持続して物体近傍から渦が放出されるためには物体近傍に振動源が必要となるからである.

円柱の後方に生じるカルマン渦列は, 下流へ流されていくが, 円柱後方 $50d \sim 100d$ の位置まで来ると渦列が消滅し, 数 $100d$ 後方で再び現れるということを 1959 年に Taneda[25] が発見した. ここでは, 円柱ごく近傍から生じる渦列を第 1 渦列と呼び, 第 1 渦列が消滅した位置よりさらに後流に再び現れる渦列を第 2 渦列と呼ぶことにする. Taneda は, このような渦列の消滅と再生が繰り返し行われることにより, 渦列は流れの各位置でその最も適切な配置をもつように再配列すると予想した. この第 2 渦列が発生する現象については Taneda の報告以降多くの研究が行われてきた [26]. それらの研究の中でも, Durgin and Karlsson[27] は渦列を生じる円柱の後方にそれと直交するように大きな円柱を置くことにより, 渦列の対流速度を人為的に遅くする詳細な実験を行い, 第 1 渦列の消滅と生成を定量的に調べた. また, 第 1 渦列の消滅について非粘性渦モデルを考え, 渦領域の変形を調べた. その結果, 2 列に並ぶ渦列における流れ方向渦間隔を h とし, 流れと垂直方向の間隔を a とすると, $h/a > 0.366$ のときには各渦は他の渦との相互作用によって流れ方向に引き延ばされた楕円形渦となり, 引き延ばされた楕円渦が自己誘起速度で回転し合体することにより, 渦列は消滅してほぼ一様な剪断速度場になるという結論を得た. また, 渦列が消滅することによってできる速度場 (ウェイク) は不安定となって新たな渦列が生じることが Sato and Kuriki[28] の線形安定性解析により説明できると結論づけた. また, Karasudani and Funakoshi[29] は実験と離散渦糸法による数値シミュレーションを行い, 渦列の消滅と再生を確認し, それまでに行われてきた実験結果との比較を行った.

最近 (2010 年), Inasawa and Asai[30] は角柱を過ぎる流れから生じる音の伝播について, 圧縮性流れの数値シミュレーションを行い, 角柱後流においてもカルマン渦列の消滅と再生が起こることを確かめた. 彼らの計算では, 角柱の流れ方向の辺長を w, 流れと垂直な辺長を d とするとき, 角柱のアスペクト比 $A = w/d$ が 1 では彼らの計算範囲においては渦列の消滅は観測されず, $A = 0.4$ のときは渦列の消滅と再生が観測された.

本研究では, 流れが振動流へ遷移する機構と振動を維持する機構を 1 つの円柱を過ぎる流れを用いて数値的に調べる. 手順は, まず各レイノルズ数について対称な定常流を求め, その流れ場中に短時間だけ衝撃的な力を加え, これにより生じた波束状の攪乱の空間的・時間的変化を数値シミュレーションにより調べる. これまで平行流近似の下で定義されていた対流不安定性と絶対不安定性を非平行な流れにも適用できるように拡張し, それぞれパッシブモード不安定性とアクティブモード不安定性と呼び, それぞれの不安定性について

波束状撹乱の増幅率を求める．カルマン渦列の消滅と再配列については，角柱の後流において渦が消滅する機構，渦が再生成する機構について数値シミュレーションから明らかにする．円柱ではなく角柱を選ぶ理由は，パラメータ w/d の値によって，渦列の消滅と再生が生じる場合と生じない場合があるので，その物理的理由を調べるのに適しているからである．

2 問題の定式化

2.1 基礎方程式・境界条件

流速 U の一様流中におかれた直径が d の円柱あるいは流れ方向に垂直な面の辺長 d 流れに平行な面の辺長が w の角柱を過ぎる流れを考える．円柱の場合には円の中心を原点にとし，角柱の場合には角柱の後端を原点 O として，流れ方向に x 軸をとり，それと垂直に y 軸をとる (図 1)．流れは非圧縮 2 次元流と仮定し，流れ関数 $\psi(x,y,t)$ と渦度 $\omega(x,y,t)$ を導入する．流れを支配する基礎方程式は ψ と ω についての渦度輸送方程式とポアソン方程式であり，円柱の直径あるいは角柱の辺長 d を代表長さにとり，一様速度 U を代表速度にとって無次元化すると，

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = J(\psi,\omega)+\frac{1}{\mathrm{Re}_d}\Delta\omega, \qquad (1)$$

$$\Delta\psi = -\omega. \qquad (2)$$

と表せる．ここで，

$$J(f,g)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial x}, \quad \Delta=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

であり，流れを特徴づけるパラメータであるレイノルズ数は動粘性係数 ν を用いて $\mathrm{Re}_d \equiv Ud/\nu$ で定義される．

流れの境界条件は円柱または角柱の柱状物体表面では滑りなし条件

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0, \quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \qquad (3)$$

を課し，上流側と流れに垂直方向の十分遠方では流速 U の一様流を仮定し，下流での流出条件には，

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial\omega}{\partial x}=0 \qquad (4)$$

を用いる．

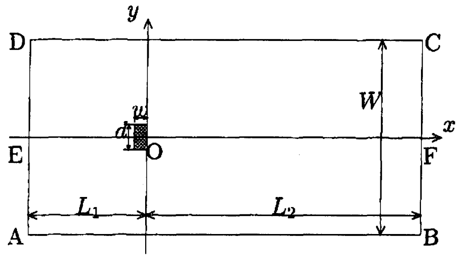


図 1: 角柱 (円柱) の配置と座標系．

2.2 定常解

レイノルズ数が小さいとき，流れ場は柱状物体 (円柱・角柱) の中心を通り流れに平行な中心線 (x 軸) に対して対称である．この対称流は，レイノルズ数に依らず，基礎方程式である渦度輸送方程式とポアソン方程式の定常解となっている．この対称定常解を $(\overline{\psi},\overline{\omega})$ とする．この対称定常解がこれから安定性解析を行う対象となる主流であり，対称性 $\overline{\psi}(x,-y)=-\overline{\psi}(x,y)$ および $\overline{\omega}(x,-y)=-\overline{\omega}(x,y)$ を課すことにより，不安定な定常解をも数値計算で求めることができる．あるいは，(2) の時間微分項を省略して得られる定常方程式

$$J(\overline{\psi},\overline{\omega})+\frac{1}{\mathrm{Re}_d}\Delta\overline{\omega}=0, \qquad (5)$$

$$\Delta\overline{\psi} = -\overline{\omega}. \qquad (6)$$

を解くことでも定常解を求めることができる．図 2(a) は円柱の対称定常解の例であり，この図では $\mathrm{Re}_d=50$ のときの流れ場の流線が $-5\le x\le 16$ および $-5\le y\le 5$ の範囲だけ描かれているが，数値計算の領域はこれよりも十分に大きくとってある．このレイノルズ数 ($\mathrm{Re}_d=50$) では円柱後方の双子渦の長さはおよそ $3.0d$ である．

2.3 定常解の線形安定性解析

円柱後流における撹乱の伝播と成長および振動維持機構を数値シミュレーションにより調べるため，対称定常流中のある位置 $(x,y)=(30,0)$ に短時間の衝撃力 (矩形パルス) を与える．その結果，衝撃力によって撹乱 ψ' が生じたとする．生じた撹乱は位置 $(x,y)=(30,0)$ において時間 $t=[0,1\times10^{-3}]$ の間のみ $\psi'=1\times10^{-3}$ の値をもち，その他の点では $t=0$ では $\psi'=0$ であるとする．

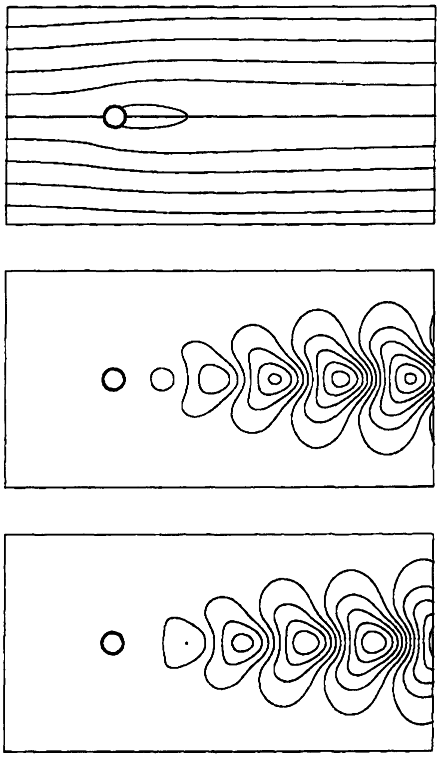
(a)
(b)
(c)


図 2: 流れ場 (流線). $\mathrm{Re}_d = 50$. (a) 対称定常流 (主流). (b) 撹乱. 実部 ($t = t_1, x = 14$ での ψ が最大となる時刻.) (c) 撹乱. 虚部 ($t = t_1 - T/4, T$ は撹乱の振動周期.)

撹乱 ψ' は渦度撹乱 ω' を誘起することになる．したがって，流れ関数と渦度はそれぞれ，$\omega = \overline{\omega} + \omega'$ および $\psi = \overline{\psi} + \psi'$ のように表される．これらの式を基礎方程式 (1) と (2) に代入し，対称定常流 $(\overline{\psi}, \overline{\omega})$ の式 (5) と (6) を引き，(ψ', ω') についての非線形項を無視すると，撹乱 (ψ', ω') についての線形方程式

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t} = J(\psi', \overline{\omega}) + J(\overline{\psi}, \omega') + \frac{1}{\mathrm{Re}_d} \Delta \omega' \quad (7)$$

$$\Delta \psi' = -\omega' \quad (8)$$

が得られる．この線形方程式を初期値・境界値問題として数値的に解くことにより，速度撹乱の空間的・時間的変化を観察する．この方法により，円柱後流のパッシブモード不安定性とアクティブモード不安定性を調べる．

また，角柱後流におけるカルマン渦列の消滅と再生を議論するときには，主流の線形安定性を固有値問題として定式化する．そのときは，撹乱の時間依存性を指数関数と仮定して $\psi' = \widehat{\psi}(x, y) \exp(\lambda t)$, $\omega' = \widehat{\omega}(x, y) \exp(\lambda t)$ と表す．ここで，λ は複素線形増幅率と呼ばれ一般に複素数であり，その実部 λ_r と虚部 λ_i はそれぞれ撹乱の増幅率と角速度 (振動数) を表している．これらを線形撹乱方程式 (7) と (8) に代入すると，$\widehat{\psi}(x, y)$ と $\widehat{\omega}(x, y)$ に対する方程式

$$\lambda \widehat{\omega} = J(\widehat{\psi}, \overline{\omega}) + J(\overline{\psi}, \widehat{\omega}) + \frac{1}{\mathrm{Re}_d} \Delta \widehat{\omega} \quad (9)$$

$$\Delta \widehat{\psi} = -\widehat{\omega} \quad (10)$$

が得られ，これらの方程式 (9) と (10) を境界条件の下で解き，固有値および固有関数を求める．

撹乱 (ψ', ω') あるいは $(\widehat{\psi}, \widehat{\omega})$ の境界条件として，柱状物体 (円柱・角柱) 表面では次の滑りなし条件:

$$u = \frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi'}{\partial x} = 0 \quad (11)$$

を用い，上流と流れに垂直方向に十分に離れた計算領域境界では速さ U の一様流を仮定し，下流での流出条件には，

$$\frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial \omega'}{\partial x} = 0 \quad (12)$$

を用いる．ただし，$(\widehat{\psi}, \widehat{\omega})$ の境界条件については式 (11) および (12) で (ψ', ω') を $(\widehat{\psi}, \widehat{\omega})$ で置き換える．

3 振動流への遷移・振動維持のメカニズム

3.1 振動流への遷移

円柱を過ぎる流れは小さなレイノルズ数では x 軸に対して対称な定常流である (例えば，図 2(a))．この対称定常流は全体不安定性の臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re_g}$ より小さなレイノルズ数においては安定であるが，$\mathrm{Re}_d > \mathrm{Re_g}$ で不安定となり，振動流へと遷移する．ここでは，対称定常流が振動流へ遷移する過程を詳しく調べ，振動維持のメカニズムを見いだすために，円柱後方の位置 $(x, y) = (30, 0)$ にパルス撹乱を与える．与えられた撹乱は，瞬時に円柱の後方の領域全体に伝わり，レイノルズ数が $\mathrm{Re_g}$ より大きいと，やがて成長して平衡振幅に達する．そのときの $\mathrm{Re}_d = 50$ における撹乱の流

れ場の例が図 2(b) と 2(c) である．図 2(b) は撹乱 ψ' の値が $(x,y)=(14,0)$ において最大となる時刻での流れ場であり，これは Jackson[9] の安定性解析における固有関数の実部に対応する．図 2(c) はその時刻より 1/4 周期前の流れ場であり，固有関数の虚部に対応する．これらは Jackson の安定性解析結果と良く一致していることはいうまでもない．

撹乱は十分長い時間の後に図 2(b) と 2(c) のように平衡状態に達するが，撹乱が加えられてから平衡状態に達するまでの伝播と成長を詳しく観察するために，x 軸上における撹乱の空間分布のみに注目する．図 3(a) は，$\mathrm{Re}_d=35$ の場合の $t=0$ および $t=60$ での x 軸上での ψ' の空間分布である．$x=30$ 付近にある細い鉛直線は $t=0$ でインパルス撹乱として与えられた初期撹乱である．時刻 $t=60$ では，撹乱の振幅は太線で包まれた細線によって表され，太線はその包絡線である．初期にパルス状であった撹乱は，$t=60$ になると $0\leq x\leq 100$ の範囲まで広がり，包絡線は A で示される主要部 (固有モード) 部と B で示される余剰部 (非固有モード) に分かれる．余剰部 B に囲まれた波はすぐに下流へ流れ去るので重要ではなく，固有部 A に囲まれた波束状の撹乱が全体不安定性を引き起こす原因となるので，今後はこの A の波束に注目する．

レイノルズ数 $\mathrm{Re}_d=35\ (<\mathrm{Re_g})$ での撹乱の伝播と成長を詳しく見ていこう．図 3(b) は，$20\leq t\leq 100$ の時刻での撹乱振幅の空間分布 (包絡線) であり，包絡線が $t=20$ ごとに描かれている．亜臨界レイノルズ数である $\mathrm{Re}_d=35$ では，撹乱の波束は下流へ流れ去り，x 軸上のどの位置で観察してもその振幅が減衰している．しかし，波束の伝播する速さと同じ速さで動く系から観察すれば撹乱振幅の大きさは成長している．一方，$\mathrm{Re}_d=50$ (図 3(c)) では，波束は $t\leq 60$ までの間は下流へ移流するが，それ以降は円柱後方の $x=25$ 近傍に波束のピークが留まっている．

撹乱の振動振幅が空間の固定点で観測すると減衰するが，波束と共に動く座標系で見れば増幅する場合と固定点で観測しても増幅する場合の２通りの場合があることが分かった．これは平行流近似における対流不安定性および絶対不安定性と類似の現象なので，ここではこれらの考え方を非平行流に拡張して，パッシブモード不安定性とアク

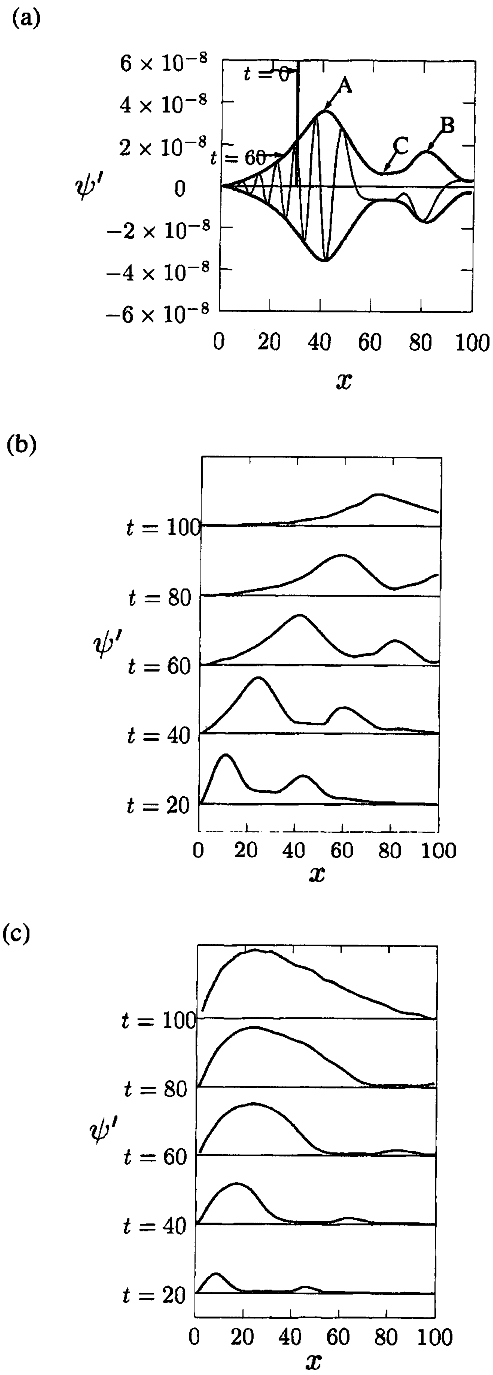


図 3: パルス型撹乱の過渡的変化．撹乱 ψ' の x 軸上での分布．(a) $\mathrm{Re}_d=35$. (b) 撹乱振動振幅の包絡線. $\mathrm{Re}_d=35$. (c) 撹乱振動振幅の包絡線. $\mathrm{Re}_d=50$.

ティブモード不安定性という概念を導入する．すなわち，波束のピークと共に動く座標系で撹乱の増幅率 σ_p を評価し，$\sigma_\mathrm{p}>$ のとき，撹乱はパッシブ不安定であるという．同様に，空間の各固定点 x

で攪乱の増幅率 σ_a を評価し，$\sigma_a >$ のとき，その攪乱はアクティブ不安定であるという．$\mathrm{Re}_d \leq 55$ の範囲で，いくつかの円柱後方位置 x において攪乱のアクティブ不安定増幅率 σ_a を評価すると σ_a は x に独立であり，位置によらず σ_a が決まることが分かった．この増幅率 σ_a をグラフにすると図 4(a) のようになる．これより，臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re_a}$ は 48.1 となった．ここでは平行流近似を用いず，攪乱のアクティブ不安定増幅率の定義は，流れ場の固定した各点における攪乱振幅の時間増幅率で定義しており，これは全体不安定の増幅率と同じ定義なので，アクティブ不安定性の臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re_a}$ は全体不安定性の臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re_g}$ と当然一致する．したがって，ここで得られた臨界値 $\mathrm{Re_a} = \mathrm{Re_g} = 48.1$ は Jackson の全体安定性から得られた臨界値 $\mathrm{Re_g} = 46.184$ と計算精度範囲内で一致している．

一方，波束の伝播する速さと同じ速さで動く系から見た攪乱の増幅率，すなわちパッシブ不安定増幅率 σ_p は座標 x により異なる．図 4(b) のように，亜臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re}_d = 35$ では，流れは円柱後端から $x = 23$ までがパッシブモード不安定であり，それより下流ではパッシブモード安定である，また，前に説明したように円柱後方の全領域でアクティブモード安定である．超臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re}_d = 50$ ではパッシブモード不安定領域は円柱後方すべての領域まで広がる (図 4(b))．円柱後方 $x = 25$ より下流においては，パッシブ不安定増幅率 σ_p とアクティブ不安定増幅率 σ_a は一致する．なぜなら，波束のピークは $x = 25$ まで移流するが，$x = 25$ より下流では移流せず同じ位置に留まるので，パッシブ不安定増幅率とアクティブ不安定増幅率に差が生じないからである．このように $x \geq 25$ の領域ではパッシブ不安定増幅率 σ_p は一定であり，アクティブ不安定領域は円柱のすぐ後流だけでなく下流全体まで広がるのである．これが，今回の研究で得られた重要な結論の 1 つである．もう 1 度整理すると，全体不安定性が生じるよりも小さいレイノルズ数においては流れは円柱の後方のある位置までパッシブモード不安定となるが，アクティブモード不安定領域は存在しない．臨界レイノルズ数を少しでも超えると，円柱後流はすべての位置で一斉にアクティブモード不安定となるのである．

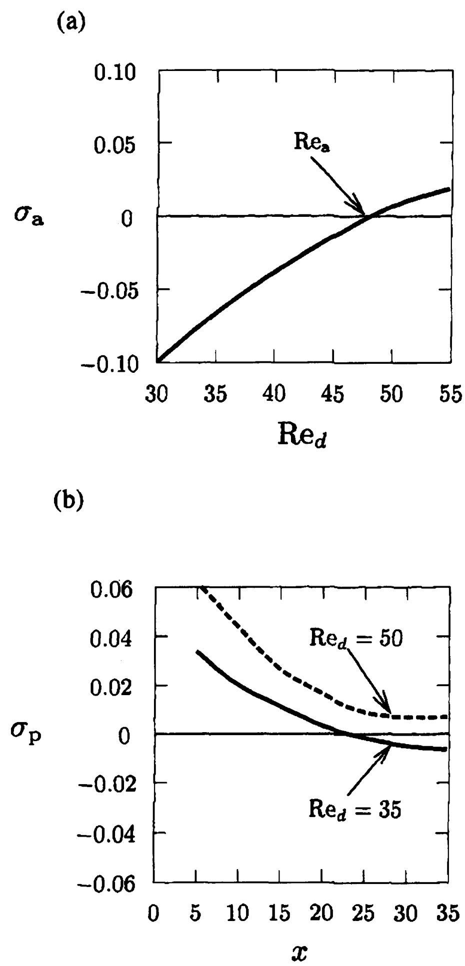


図 4: アクティブ不安定増幅率とパッシブ不安定性増幅率．(a) アクティブ不安定増幅率 σ_a．(b) パッシブ不安定増幅率 σ_p．

3.2 振動を維持するメカニズム

全体不安定性が生じる前は流れ場はアクティブモード安定であり，全体不安定性の発生と共に流れ場全体がアクティブモード不安定になることが分かったが，アクティブモード不安定性が生じたときにその振動を維持するメカニズムは不明である．このメカニズムを明らかにするため，波束攪乱の時間発展を詳細に観察する．時刻 t における波束の前縁・ピーク・後縁の位置をそれぞれ $x_f(t)$, $x_p(t)$, $x_t(t)$ とし，波束の広がりを特徴づける．これらの位置を時間の関数として，x-t 平面に描くと図 5 のようになる．この図から分かることは，前縁 $x_f(t)$ の進行速度は全てのレイノルズ数で一定であり，レイノルズ数に依らず下流へ移流して

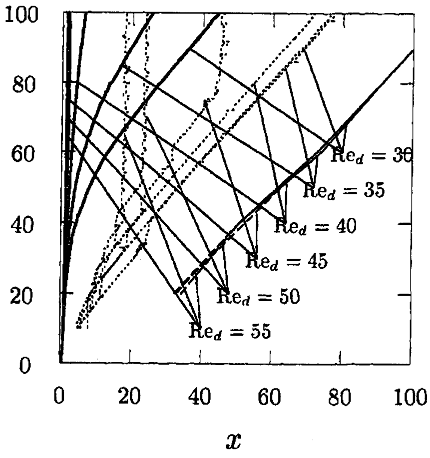


図 5: 波束の軌跡. 実線: 波束の後縁. 点線: 波束のピーク. 破線: 波束の前縁.

いくことである. 波束のピーク $x_\mathrm{p}(t)$ と後縁 $x_\mathrm{t}(t)$ は, レイノルズ数 Re_d が臨界値 Re_g に近づくにつれて, 進行速度が小さくなる. こうして, 波束の後縁 $x_\mathrm{t}(t)$ は $x = 1.4$ すなわち, 円柱の後端に近づいていく. したがって, 超臨界状態 $\mathrm{Re}_d > \mathrm{Re}_\mathrm{g}$ では, 後端では攪乱を与えた後も円柱後方に攪乱は留まり, 移流しないことになる.

波束の前縁・ピーク・後縁のこの振る舞いは図 6 に示されるように, x_f, x_p, x_t の伝播速度から容易に分かる. 図 6 は, それぞれの速度がほぼ一定値となる $80 < t < 100$ の区間で評価を行った. この図からも, 波束の前縁の位置 x_f は基本流の速さとほぼ同じ (一様流速 U の約 0.9 倍) であることが観察できる. すなわち, 波束の前縁はレイノルズ数に依らず速度一定で移流する. ピーク x_p の伝播速度は Re_g に近づくにつれて次第に 0 に近づいていく. 一方, 波束の後縁位置 x_t は臨界レイノルズ数 Re_g で突然 0 となる. この結果は, 流れの振動維持メカニズムを説明する上で最も重要な結果である. なぜなら, 流れの中での振動が維持される機構は, 波束の後縁の伝播速度が 0 となることが最も重要であり, 波束はレイノルズ数に依らず常に下流へ移流しているが, その後縁は移流効果による減衰よりも線形増幅による振幅の成長が卓越することにより, 円柱の後縁に常に存在し, そのことが流れの振動源となっているからである. これが, 今回の研究の 2 つ目の結論である.

波束の後縁が円柱近傍から移流しないことが流

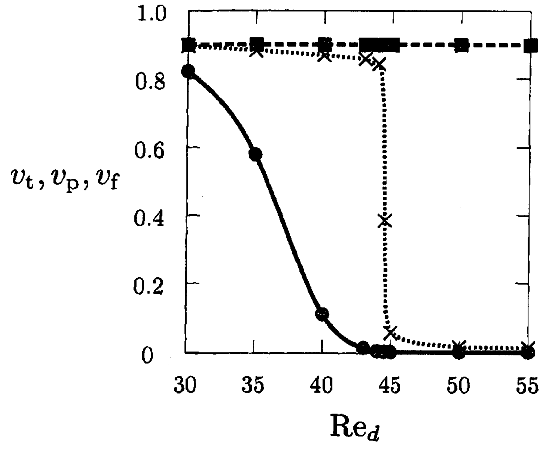


図 6: 波束の後縁・ピーク・前縁の進行速度. 実線: v_t, 波束の後縁, 点線: v_p, 波束のピーク. 破線: v_f, 波束の前縁.

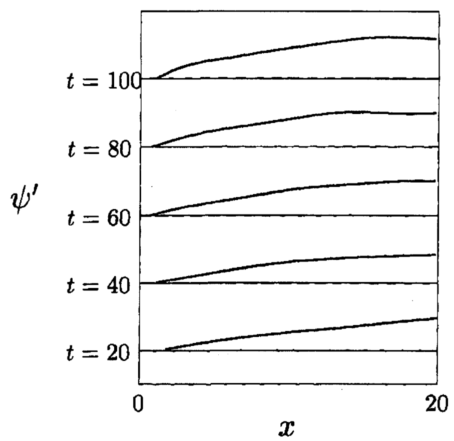


図 7: 波束の包絡線の時間変化. $\mathrm{Re}_d = 50$. 初期条件: $\mathrm{Re}_d = 35$ の場合の $t = 60$ における攪乱の状態.

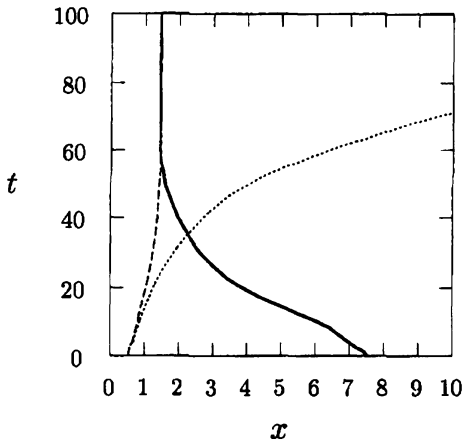


図 8: 波束の後縁の軌跡. 実線: $\mathrm{Re}_d = 50$ ($\mathrm{Re}_d = 35$ のときの $t = 60$ における撹乱を初期条件とした場合). 点線: $\mathrm{Rd}_d = 35$ (パルス状撹乱の初期条件の場合). 破線: $\mathrm{Re}_d = 50$ (パルス状撹乱の初期条件の場合).

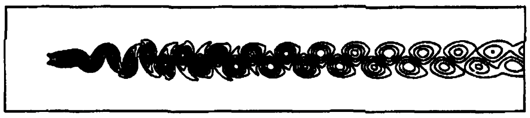
れの中で振動を維持するメカニズムの本質である. それは, 移流による振幅の減衰よりも不安定性による増幅が上回るからである. しかし, 円柱のずっと下流で撹乱が生じたときはどのようにして波束の後縁は円柱近傍にまでさかのぼることができるのだろうか. 前に説明したように, 流れ場のどの位置で衝撃力が加えられても, 生じた撹乱は瞬時に円柱近傍まで伝播してしまうので, 波束の後縁の伝播を確かめるのには工夫が必要である. ここでは, 後縁の上流への伝播を確かめるために, 亜臨界レイノルズ数 $\mathrm{Re}_d = 35$ の数値シミュレーション結果における $t = 60$ の波束撹乱を新たに $\mathrm{Re}_d = 50$ の超臨界状態での初期値にとる. このとき, 波束撹乱の後縁は円柱の下流 $x = 7.5$ 程度まで移流している. この初期条件の下に数値シミュレーションを行った結果, 図 7 のような波束の時間変化となる. この図から波束の後縁が上流へさかのぼり, 時刻 $t = 100$ では円柱の後方 $1.4d$ まで伝播している. これ以上時間が経過しても波束の後縁は伝播せず, この位置に留まる. すなわち, $\mathrm{Re}_d = 50$ では, 流れ場の振動は円柱の下流およそ d 離れた位置から振動が生じているのである. このことは, 今回の研究の 3 つ目の結論である. このことを確かめるために, 図 8 に波束の後縁 x_t の軌跡を図示しておく. この図から, 後縁の位置が初期に $x = 7.5$ にあっても, $x = 0.5$ にあっても, 時間が経過すると後縁の位置はやがて $x \sim 1.4$ に近づいて行くことが明らかである.

4 カルマン渦列の消滅・再配列

4.1 流れパターン

最近, Inasawa and Asai [30] は, 角柱を過ぎる圧縮性流れの数値シミュレーションを行い, カルマン渦列の発生等を調べた. 角柱の流れ方向の辺長と流れと垂直な辺長の比 (アスペクト比) を $A = w/d$ とすると, 彼らは $A = 1$ のとき, 計算領域内全体でカルマン渦列を観察したが, $A = 0.4$ のときには, 角柱後方の比較的短距離の位置で渦列の消滅と再配列を観察した. ここでは, 角柱を過ぎる非圧縮性流れの数値シミュレーションを行って, 彼らの計算結果を確かめる. 図 9 は $\mathrm{Re}_d = 80$ における $A = 0.5$ と $A = 1$ の角柱後流の渦度分布 (等高線) である. 図 9(a) ($A = 1$) では計算領域内でカルマン渦列が見られるが, 図 9(b) ($A = 0.5$) では, 角柱の後方約 $30d$ 近辺からカルマン渦列が崩壊し, 弱い剪断流へと変化している. 計算領域を拡大すれば正方形角柱 $A = 1$ の場合にもカルマン渦列の消滅と再配列は観測できると思われるが, 本研究では計算時間を短縮する点から角柱の縦と横の長さの比が $A = 0.5$ の角柱についてカルマン渦列の消滅と再配列について調べる.

(a)



(b)

図 9: 流れ場 (渦度, $\mathrm{Re}_d = 80$). (a) $A = 1$. (b) $A = 0.5$.

アスペクト比 $A = 0.5$ の角柱を過ぎる流れ場を $\mathrm{Re}_d = 30$ から 120 まで間のいくつかのレイノルズ数について, 数値シミュレーションにより求めると, 図 10 のようになる. 図 10(a) はレイノル

ズ数 $\mathrm{Re}_d = 30$ のときの流れ場 (流線) であり，流れは角柱の中心を通り x 軸に対して対称で定常な対称定常流である．この流れ場に対応する渦度場は図 10(b) であり，孤立した渦は存在せず、剪断層が見られるのみである．$\mathrm{Re}_d = 40$ では流れは対称性を失い，角柱後方で振動が生じている (図 10(c))．このとき振動は角柱後方の全領域 (計算領域の全ての範囲) に及んでいる．図 10(d) の渦度分布から分かるように，カルマン渦列が全領域で確認できる．レイノルズ数が大きくなるにしたがって，角柱後方のある位置より下流で振動が小さくなり，レイノルズ数が $\mathrm{Re}_d = 90$ (図 10(e)) では，角柱の約 $50d$ 下流で，振動がほぼ消滅しており，図 10(f) に見られるように，カルマン渦列もほぼ同じ位置では消滅し，単純な剪断層へと変化している．したがって，カルマン渦列の消滅は $\mathrm{Re}_d = 40$ と $\mathrm{Re}_d = 90$ の間で起こることになる．さらにレイノルズ数が大きくなり $\mathrm{Re}_d = 120$ になると，カルマン渦列の消滅していた領域の一部でカルマン渦列の再配列が生じ，第 2 渦列が形成される (図 10(h))．第 2 渦列を構成する個々の渦は第 1 渦列より大きな渦となっている．

次に，カルマン渦列を形成する渦の形状を見ていこう．レイノルズ数 $\mathrm{Re}_d = 40$ (10(d)) では，角柱直後から下流の $20d \sim 30d$ までは，渦の形は流れ方向に長い楕円であり，それより下流では円形あるいは三角形に近い形をもつ．レイノルズ数が 90 (10(f)) になると，渦の形状は角柱直後で流れと垂直方向に長い楕円であるが，$40d \sim 50d$ で流れ方向に長くなり，$60d$ あたりで横 (x 方向) に伸びた前後の渦が合体し，帯状の剪断流が現れる．$\mathrm{Re}_d = 120$ では，第 1 渦列内の渦は $\mathrm{Re}_d = 90$ のときとあまり変化はないが，第 2 渦列がそれより下流の第 2 渦列の渦は第 1 渦列の渦より大きく，それらの間隔も大きい．これらの結果は Durgin and Karlsson[27] の説明や Karasudani and Funakoshi[29] の実験および計算結果と定性的に一致している．

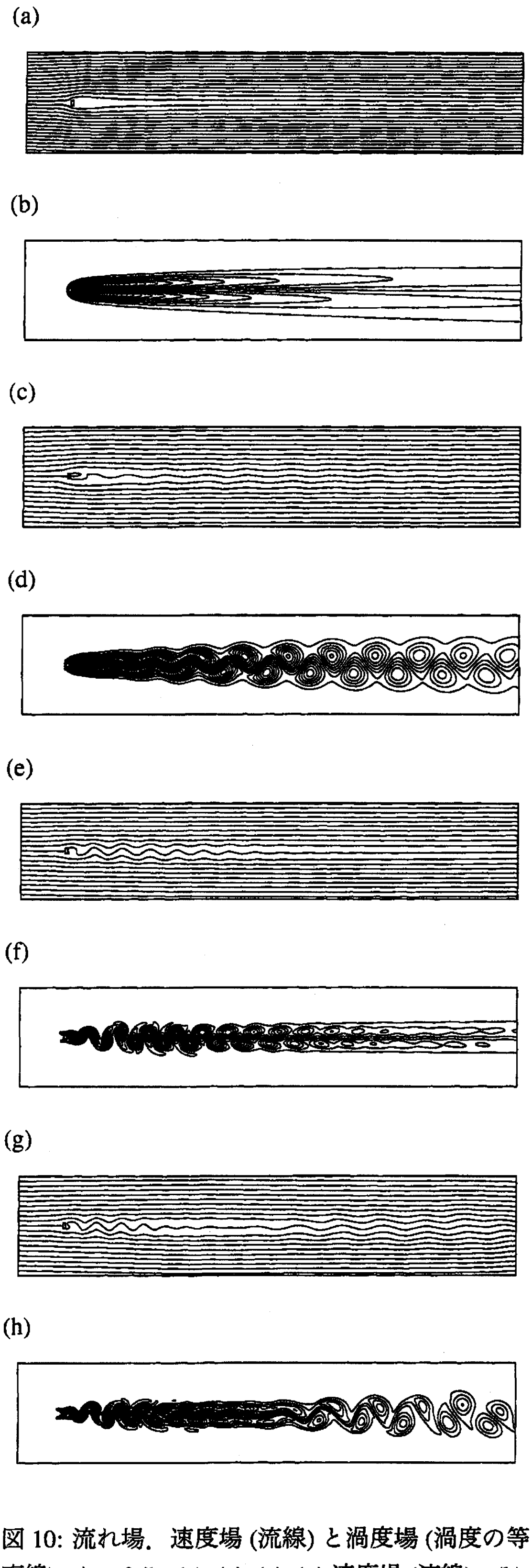


図 10: 流れ場．速度場 (流線) と渦度場 (渦度の等高線)．$A = 0.5$．(a), (c), (e), (g) 速度場 (流線)．(b), (d), (f), (h) 渦度場 (渦度の等高線)．(a), (b) $\mathrm{Re}_d = 30$．(c), (d) $\mathrm{Re}_d = 40$．(e), (f) $\mathrm{Re}_d = 90$．(g), (h) $\mathrm{Re}_d = 120$．

4.2 分岐図

数値シミュレーションにより，第1渦列の発生と消滅および第2渦列の生成を確認した．この節では，これらの渦列が発生または消滅する原因とその臨界レイノルズ数を調べる．2つの渦列が発生する臨界レイノルズ数を調べるために，角柱後方の流れの振動の大きさを表す代表的な物理量として，角柱後方の x 軸上 $x_1 = 20$ と $x_2 = 800$ における y 方向速度 v_1 および v_2 の最大振動振幅 a_1 と a_2 に着目する．観測点 x_1 は，角柱の比較的近傍で，第1渦列で生じる流れの振動振幅が大きくなる点であり，測定点 x_2 は第2渦列による振動が支配的となる点である．

振動振幅 a_1 と a_2 をレイノルズ数 Re_d の関数として描くと，図11のようになる．この図で，実線は観測点 $x_1 = 20$ での v_1 の振動振幅 a_1，破線は $x_2 = 800$ での v_2 の振幅 a_2 を表している．実線は $a_1 \propto (\mathrm{Re}_d - \mathrm{Re}_c)^{1/2}$ の関係を満たしており，この図は解のホップ分岐を表している．すなわち，位置 x_1 でも x_2 においても，$\mathrm{Re}_c = 38$ までは y 方向流速は0であり，対称な定常流であるが，レイノルズ数が $\mathrm{Re}_c = 38$ よりも大きくなると，振動する y 方向流速をもつことから，対称性が破れ振動流へ遷移する．すなわち第1渦列が生じる．位置 x_2 で観測する v_2 は，第1渦列が生じる臨界レイノルズ数 Re_c で生じるホップ分岐により，その振動振幅 a_2 は $\mathrm{Re}_d > \mathrm{Re}_c$ で有限の値となり，Re_d の増加と共に大きくなるが，その後次第に減少し，$\mathrm{Re}_d \sim 90$ 程度になると振幅はほぼ0となり，位置 $x_2 = 800$ では，カルマン渦列は消滅することになる．さらに，レイノルズ数が $\mathrm{Re}_d \sim 100$ 程度になると，v_2 は再び有限の値をもち，第2渦列が生じていることがわかる．

図11より，流れ場は $\mathrm{Re}_c = 38$ で対称定常解の不安定性により解のホップ分岐を生じ，角柱後方全体にカルマン渦列が形成されることがわかった．また，レイノルズ数が大きくなるにしたがって下流からカルマン渦列の消滅がおこり，$\mathrm{Re}_d = 100$ を超えるとで第2渦列が生じることがわかったが，第2渦列がどのようなメカニズムで生み出されるのか不明である．考えられる可能性としては，対称定常解の第2不安定モードとして第2渦列が生じる可能性と，ホップ分岐により生じた第1渦列を含む振動流が再び不安定となって，第2渦列を含む振動流が生み出される可能性である．

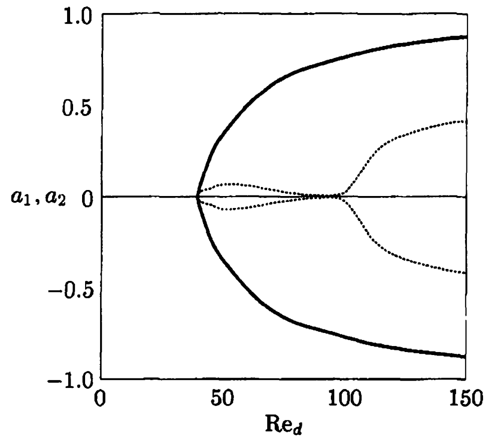


図 11: 振動振幅 a_1 と a_2 (分岐図). $A = 0.5$. 実線: a_1 ($x_1 = 20$). 破線: a_2 ($x_2 = 800$).

4.3 定常解の線形安定性解析

数値シミュレーションによって得られた流れ場と分岐図から，アスペクト比 $A = 0.5$ の角柱を過ぎる流れでは $\mathrm{Re}_c = 38$ で第1渦列が形成され，$\mathrm{Re}_d \sim 100$ で第2渦列が形成されることがわかった．この節では，第1渦列の消滅する原因と第2渦列が生じる理由を突きとめるため対称定常流の線形安定性解析を行う．レイノルズ数が大きくなるにつれて下流でカルマン渦列が消滅し，第2渦列が形成されることから，第1渦列を誘起する攪乱のモード (第1固有モード) と第2渦列を誘発する攪乱のモード (第2固有モード) は異なることが予想される．これより，それぞれの渦列を形成するレイノルズ数付近での線形安定性を調べ，カルマン渦列を形成するメカニズムを調べる．

流れの線形安定性を調べるため，方程式 (5) と (6) を数値的に解き，対称定常解 $(\overline{\psi}, \overline{\omega})$ を求め，方程式 (9) と (10) および境界条件 (11) と (12) からなる固有値問題を解く．得られた固有値 λ の実部 λ_r は線形増幅率，虚部 λ_i は振動数を表す．各レイノルズ数について固有値を計算すると，λ_r はレイノルズ数の関数として図12のようになる．$\lambda_r > 0$ ならば対称定常流は不安定であり，$\lambda_r < 0$ ならば安定である．また，$\lambda_r = 0$ となるレイノルズ数が臨界レイノルズ数 Re_c であり，図12より，臨界

レイノルズ数は $Re_c = 38.2$ となった．この値は数値シミュレーションによって得られた第 1 回目のホップ分岐点と一致している．

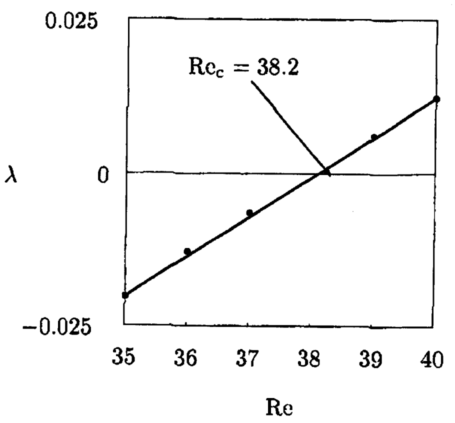


図 12: 線形増幅率 λ_r

固有値問題の数値計算により得られる固有関数 $\hat{\omega}$ の実部 $\hat{\omega}_r$ は角柱から $5d$ 下流での中心線 $(y = 0)$ 上の代表点 P_1 において，$\hat{\omega}_r = 1.0$ となるように正規化する．このとき，固有関数 $\hat{\psi}_r$ の実部 $\hat{\psi}_r$ は図 13 のようになる．図 13(a) は $Re_d = 40$ における流れ場 (流線) を表す固有関数であり，渦は計算領域のほぼ全体にわたって観測される．また，図 13(b) は $Re_d = 90$ における固有関数の流れ場であり，撹乱は角柱の後方のある位置 $(x \sim 60)$ から下流で消えている．この撹乱は渦の存在範囲と一致するため，第 1 渦列の消滅は撹乱の非線形相互作用に依らずとも，既に線形不安定性の段階で生じていると結論される．この結論と Durgin and Karlsson [27] の渦モデル (非線形相互作用) との関係は未だ不明である．また，第 2 渦列を誘起すると考えられる第 2 不安定モードの計算には現在のところ収束解が得られないという困難に直面しており，第 2 渦列生成の物理的メカニズムとしてこれまで考えられてきたように，第 1 渦列ができた後の振動流の平均場が不安定となって第 2 渦列が生じるという可能性も有力である．現在の時点では第 2 渦列の発生原因については研究途上にある．

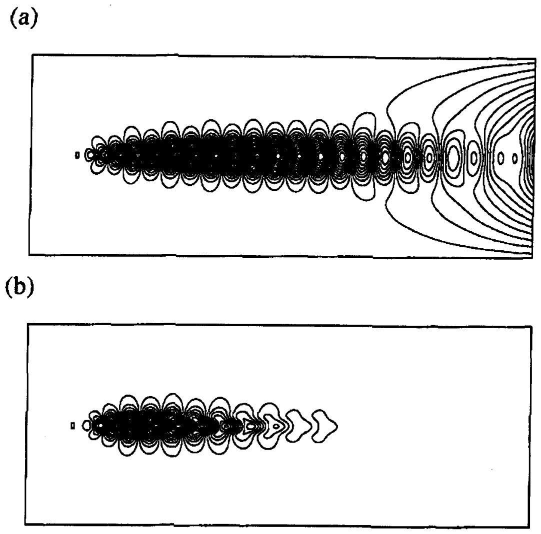


図 13: 線形固有関数 (流れ場，流線)．撹乱の実部 $\hat{\psi}_r$(虚部もほぼ同じ)．(a) $Re_d = 40$. (b) $Re_d = 90$.

参考文献

[1] Koschmieder, E.L, Bénard Cells and Taylor Vortices (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1993).

[2] Orszag, S. A., J. Fluid Mech., Vol. 50, (1971), pp. 689-703.

[3] Nishioka, M., Iida, S., Ichikawa, Y., J. Fluid Mech., Vol. 72, (1975), pp. 731-751.

[4] Asai, M., Floryan, J. M., Euro. J. Mech. B/Fluids, Vol. 25, (2006), pp. 971-986.

[5] Bénard, H., C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 147, (1908), pp. 839-842.

[6] Von Kármán, Th., Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, Math.-phys. Kl., (1911), pp. 509-517, (1912), pp. 547-556.

[7] McKoen, C., H., Aero. Res. Council Current Papers, No. 303, (1956), pp. 1-19.

[8] Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 18, (1963), pp. 288-296.

[9] Jackson, C. P., J. Fluid Mech., Vol. 182, (1987), pp. 23-45.

[10] Briggs, R., J., "Electron-Stream Interaction with Plasma", (MIT Press, 1964, Cambrige), chap. 2.

[11] 山田道夫,"流れとパターン - 流れの安定性理論序論" ("パターン形成" 第 3 章), (朝倉書店, 1991, 東京), pp. 38-79.

[12] Triantafyllou, G. S., Triantafyllou, M. S., Chryssostomidis, C., J. Fluid Mech., Vol. 170, (1986), pp. 461-477.

[13] Triantafyllou, G. S., Kupfer, K., Bers, A., Phys. Rev. Lett., Vol. 59, (1987), pp. 1914-1917.

[14] Kupfer, K., Bers, A., Ram. A. K., Phys. Fluids, Vol. 30, (1987), pp. 3075-3082.

[15] Monkewitz, P. A., Nguyen, L. N., J. Fluids Struct., Vol. 1, (1987), pp. 165-184.

[16] Monkewitz, P. A., Phys. Fluids, Vol. 31, (1988), pp. 999-1006.

[17] Hannemann, K., Oertel, H. Jr., J. Fluid Mech., Vol. 199, (1989), pp. 55-88.

[18] Oertel, H. Jr., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp.539-564.

[19] Chomaz, J. M., Huerre, P., Redekopp, L. G., Phys. Rev. Lett., Vol. 60, (1988), pp. 25-28.

[20] Huerre, P., Monkewitz, P. A., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 22, (1990), pp. 473-537.

[21] Kovasznay, L. S. G., Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 198, (1949), pp. 174-190.

[22] Goldstein, S., Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 142, (1933), pp. 545-562.

[23] Chomaz, J. M., Annu. Rev. Fluid Mech., Vol. 37, (2005), pp. 357-392.

[24] Betchov, R., Criminale, W. O., Phys. Fluids, Vol. 9, (1966), pp. 359-362.

[25] Taneda, S., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 14, (1959), pp. 843-848.

[26] Honji, H., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 55, (1986), pp. 2897-2898.

[27] Durgin, W. W., Karlsson, S. K. F., J. Fluid Mech., Vol. 48, (1971), pp. 507-527.

[28] Sato, H., Kuriki, K., J. Fluid Mech., Vol. 11, (1961), pp. 321-352.

[29] Karasudani, T., Funakoshi, M, Fluid Dyn. Res., Vol. 14, (1994), pp. 331-352.

[30] Inasawa, A., Asai, M., Private communication (2010).

[31] Gaster, M., Phys. Fluids, Vol. 11, (1968), pp. 723-727.

[32] Nakaya, C., J. Phys. Soc. Japan., Vol. 41, (1976), pp. 1087-1088.