

# 固体液体間で熱物質輸送を伴う多孔質媒質中での熱対流現象

## -煮物料理における煮汁の温度分布予測-

大阪大学 (Osaka Univ.) 吉永隆夫 (Takao Yoshinaga)

神戸山手短期大学 (Kobe-Yamate College) 原知子 (Tomoko Hara)

### 1 はじめに

古くからある加熱調理法のひとつに「煮る」があるが、この料理法は「焼く」や「揚げる」など他の料理法とは異なり、煮汁の熱対流により食材を比較的緩やかかつ長時間にわたり加熱する。このような料理法に関する学術的な研究は以前からおこなわれてきたが、これまで食材内部への伝熱の影響が主に調べられてきた(たとえば、渋川による総合報告 [1] や、Derbyshire と Owen [2], 香西ら [3] によるジャガイモでの数値モデルなど参照)。しかし、適切な加熱条件を知るためには、食材表面や内部への伝熱のみならず、煮汁の熱対流が食材に及ぼす影響や、食材内部の温度や濃度の変化が熱対流に及ぼす効果などといった煮汁-食材間の相互作用が重要になるが、現象が複雑になるためこれまでほとんど調べられていない。

最近、Datta [4] は「揚げる」料理法において食材周囲の油が食材内部へどのような影響を及ぼすかという問題を、油と食材間の相互作用を考慮した理論的取り扱いにより調べている。この場合、現象が食材近傍での熱物質輸送に限られることから、このような解析は食材を含むきわめて狭い領域での空間一次元解析で比較的よい近似となっている。しかし、「煮る」の理論的取り扱いに関しては、上で述べたように鍋容器内での空間・時間的に変動する熱流動運動と個々の食材における熱物質輸送の効果を同時に考えなければならず、両者の効果を含む熱流動モデルを構築する必要がある。その際、個々の具材や形状まで考慮することは現実的ではなく、二種類の変動スケール(マルチスケール)を持つポーラスメディア中での熱流体流動モデルを考えることが有効であろう。

本研究では、このような考えのもとで煮物における熱流動運動に関する精密なモデルを提案することにより、ゆで加熱調理におけるゆで水や具材の温度分布予測、および制御を行うことを最終目標とする。その第一段階として、具材内部の熱流動を考慮せず、具材と煮汁をポーラスメディア(多孔質媒質)として考え、煮汁の熱流動運動を調べている。

## 2 定式化

### 2.1 熱流動モデル

現象がポーラスメディア中での熱流動運動でモデル化されるとして以下に方程式を示す [5]. 添え字  $f, s$  がそれぞれ、液体部、固体部を表わすとして、流体の連続の式および運動方程式は

$$\varphi \partial \rho_f / \partial t + \nabla \cdot (\rho_f \mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

$$\rho_f [\varphi^{-1} \partial \mathbf{v} / \partial t + \varphi^{-2} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla P - \mu \mathbf{v} / K. \quad (2)$$

一方、流体部及び固体部の熱輸送方程式はそれぞれ

$$(1 - \varphi)(\rho c)_s \partial T_s / \partial t = (1 - \varphi) \nabla \cdot (k_s \nabla T_s) + h(T_f - T_s), \quad (3a)$$

$$\varphi(\rho c_p)_f \partial T_f / \partial t + (\rho c_p)_f \mathbf{v} \cdot \nabla T_f = \varphi \nabla \cdot (k_f \nabla T_f) + h(T_s - T_f), \quad (3b)$$

で与えられる。ここで、空隙率 (=空隙体積/全体積) を  $\varphi (< 0.6$  程度) とするとき、全体積で平均された Darcy 速度  $\mathbf{v}$  と流体部分で平均された  $V$  の間で Dupuit-Forchheimer の関係  $\mathbf{v} = \varphi V$  が用いられている。また、 $K = K(D_p, \varphi)$  は浸透率である (たとえば、砂で  $2 \times 10^{-7} \sim 1.8 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$  程度)。さらに、流体密度の温度 ( $T$ ) と濃度 ( $C$ ) の依存性は

$$\rho_f = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) - \beta_c(C - C_0)], \quad (4)$$

で与えられ、ブシネ近似に従うものとする。簡単のために等温度条件  $T_s \sim T_f = T$  を用いると、熱輸送方程式 (3) は

$$(\rho c)_m \partial T / \partial t + (\rho c)_f \mathbf{v} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k_m \nabla T), \quad (5)$$

となる。ここで、 $(\rho c)_m = (1 - \varphi)(\rho c)_s + \varphi(\rho c_p)_f$ ,  $k_m = (1 - \varphi)k_s + \varphi k_f$ , である。

一方、液体固体間での質量輸送方程式は

$$\varphi \partial C / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla C = \nabla \cdot (d_m \nabla C) + \dot{I}, \quad (6a)$$

$$(1 - \varphi) \partial C_s / \partial t = \nabla \cdot (d_s \nabla C_s) - \dot{I}, \quad (6b)$$

で与えられ、適当な関数  $f$  の時間微分として  $\dot{I} = f(C, C_s)$  で与えられる。

かくして、問題はこれらの連立方程式を適当な境界条件の下で解くことに帰着されるが、通常のポーラスメディア中の対流現象に固体液体間での温度・濃度輸送の効果が加わった結果が得られることを期待している。また、パラメータの具体的な数値設定により実験結果との比較が可能になる。

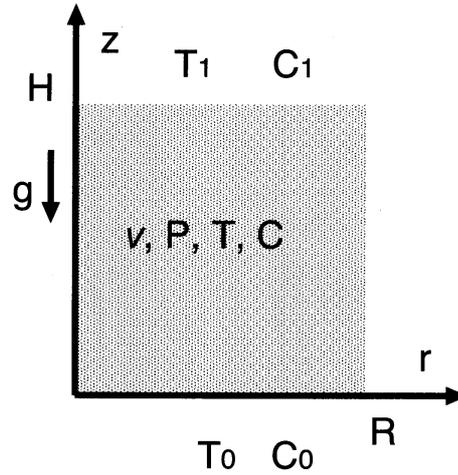


図 1: 解析モデル

## 2.2 中立安定曲線と対流モード

問題を簡単にするため、以下では液体個体間で熱物質移動のない場合を考え、攪乱の線形安定性を調べる。図1に示すように、 $(r, z)$  軸対称系で半径  $R$  高さ  $H$  の円筒容器内に液体を含むポーラスメディアがあるとし、重力加速度を  $g$  とする。そのとき流体の速度ベクトル、圧力、温度、濃度をそれぞれ、 $v, P, T, C$  とし、下面  $z=0$  及び上面  $z=H$  での温度及び濃度をそれぞれ  $T_0, C_0$  及び  $T_1, C_1$  とする。  $\alpha = (T_0 - T_1)/H$ ,  $\alpha_C = (C_0 - C_1)/H$  として、定常状態

$$\begin{aligned} v_b &= 0, \quad T_b = T_0 - \alpha z, \quad C_b = C_0 - \alpha_C z, \\ P_b &= P_0 - \rho_0 g [z + (\alpha\beta + \alpha_C\beta_C)z^2/2], \quad \rho_f = \rho_0 [1 - \beta(T - T_0) - \beta_C(C - C_0)], \end{aligned} \quad (7)$$

に以下のように攪乱を加える:

$$v = v_b + \tilde{v}, \quad P = P_b + \tilde{P}, \quad T = T_b + \tilde{T}, \quad C = C_b + \tilde{C}. \quad (8)$$

上式で攪乱に関して線形近似を行うと

$$\nabla^2 \tilde{w} = (R_T \nabla_H^2 \tilde{T} + R_C \nabla_H^2 \tilde{C}), \quad \partial \tilde{T} / \partial t - \tilde{w} = \nabla^2 \tilde{T}, \quad \partial \tilde{C} / \partial t - \tilde{w} = \nabla^2 \tilde{C}, \quad (9)$$

の攪乱に関する偏微分方程式を得る。ただし、温度レイリー数  $R_T$  および濃度レイリー数  $R_C$

$$R_T = \frac{\rho_0 g \beta K H^2 \alpha}{\mu k_m}, \quad R_C = \frac{\rho_0 g \beta_C K H^2 \alpha_C}{\mu d_m},$$

が導入される。

さらに、攪乱を

$$(\tilde{w}, \tilde{T}, \tilde{C}) = (W(r, z, \phi), T(r, z, \phi), C(r, z, \phi)) e^{st}, \quad (10)$$

と仮定して安定性交換の原理 ( $s = 0$ ) を用いると、臨界値近傍での方程式

$$\nabla^2 W = (R_T \nabla_H^2 T + R_C \nabla_H^2 C), \quad -W = \nabla^2 T, \quad -W = \nabla^2 C, \quad (11)$$

を得る。ただし、 $\nabla_H^2 = \nabla^2 - \partial^2/\partial z^2$  である。

次のような境界条件を考える [5] :

$$\begin{aligned} \partial W/\partial z + KW = 0, \quad \partial T/\partial z + LT = 0, \quad \partial C/\partial z + MC = 0, \\ \partial W/\partial r + SW = 0, \quad \partial T/\partial r + QT = 0, \quad \partial C/\partial r + RC = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 $|K|, |L|, |M|, |S|, |Q|, |R| = \infty$  は固体壁、等温、等濃度の条件に対応する。一方、 $|K|, |L|, |M|, |S|, |Q|, |R| = 0$  は一定圧力またはスリップ、零温度フラックス、零濃度フラックスの条件に対応する。以下では、これらの特別の場合として、(i)  $z = 0, 1$  で  $W, T, C = 0$ ,  $r = s$  (側面) で  $\partial(W, T, C)/\partial r = 0$ ,  $r = 0$  (中心) で  $W, R, T = \text{finite}$  と、(ii)  $z = 0$  で  $W, T, C = 0$ ,  $z = 1$  で  $\partial(W, T, C)/\partial z = 0$ ,  $r = s$  で  $\partial(W, T, C)/\partial r = 0$ ,  $r = 0$  で  $W, R, T = \text{finite}$  の場合を考える。このとき、解は

$$w = g(z) J_m(\lambda r) \cos(m\phi), \quad (13)$$

で与えられ

$$J'_m(\lambda s) = 0, \quad g^{(iv)} - 2\lambda^2 g'' + (\lambda^4 - \lambda^2 \text{Ra})g = 0, \quad (14)$$

を満たす必要がある。ここで、 $J_m$  は  $m$  次 Bessel 関数、 $\text{Ra} = R_T + T_C$  である。このとき、境界条件 (i) の解として、 $g(0) = g(1) = g''(0) = g''(1) = 0$  より  $g(z) = \sin(\pi z)$  である。 $\text{Ra} = (\pi^2 + \lambda^2)^2/\lambda^2$  から  $\lambda = \pi$  で最小値をとり臨界 Rayleigh 数  $\text{Ra} = 4\pi^2$  を得る [6]。

一方、(ii) の解として  $g(0) = g''(0) = 0, g'(1) = g'''(1) = 0$  より  $g(z) = \sin(\pi z/2)$  となる。また、 $\text{Ra} = [(\pi/2)^2 + \lambda^2]^2/\lambda^2$  から、 $\lambda = \pi/2$  で最小値をとり臨界 Rayleigh 数  $\text{Ra} = \pi^2$  となる。(i) の場合上下面固着であるのに対し (ii) の場合上面自由界面のため対流が始まる臨界  $\text{Ra}$  は減少する。

図 2 に  $\text{Ra} (= R_T + R_C)$  (Rayleigh 数),  $s (= R/H)$  (アスペクト比) としたときの中立安定曲線を (i) の条件について各モード  $m$  に対して示す。このとき、 $0 \leq r \leq s$  での温度、速度の空間分布  $T = \sin(\pi z) J_m(Z_m r/s) \cos(m\phi)$ ,  $W = (\pi^2 + 1) \sin(\pi z) J_m(Z_m r/s) \cos(m\phi)$  が得られる。ただし、 $Z_1 = 1.841, Z_2 = 3.054, Z_0 = 3.832, Z_3 = 4.201, Z_4 = 5.318, Z_1 = 5.331, Z_5 = 6.416$  で  $J'_m(Z_m) = 0$  となる。図よりわかるように、 $s$  が増加するにつれて最小の  $\text{Ra}$  数を与えるモードが  $m = 1, 2, 0, 3, 4, 1 \dots$  と順に変化し、それに対応して対流パターンが変わる。特に  $s \sim 1.28$  を境に対流パターンが大きく変わることがわかる。なお (ii) の場合についても (i) の結果と定性的に変わらない。

### 3 実験結果

ゆで加熱調理における鍋容器内の煮汁や食材の温度の場所や時間による変化を実験により調べた [7]。

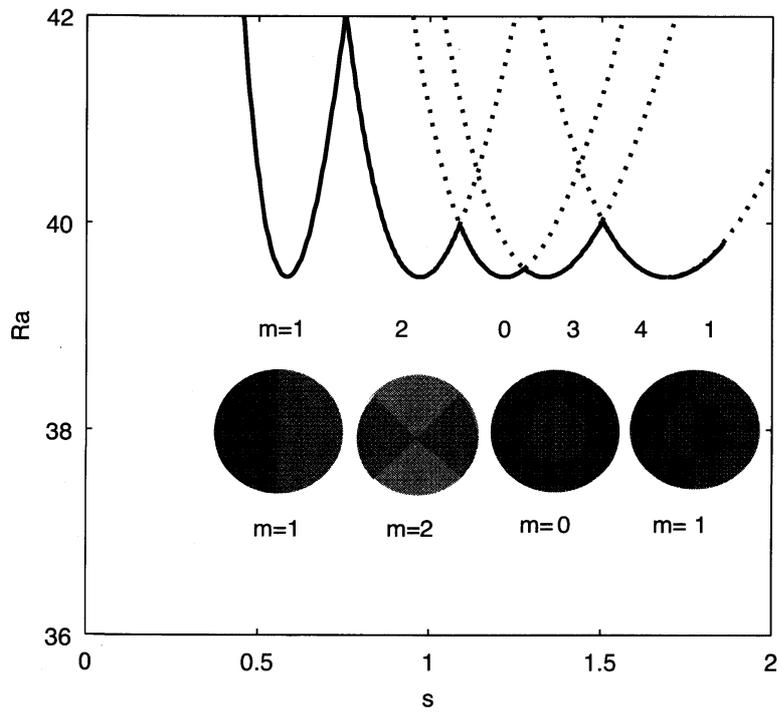


図 2: Rayleigh 数 ( $Ra$ ) とアスペクト比 ( $s$ ) における中立安定曲線と対流モード: 図中各モード  $m$  における対流パターンの色違いは上昇流と下降流に対応する。

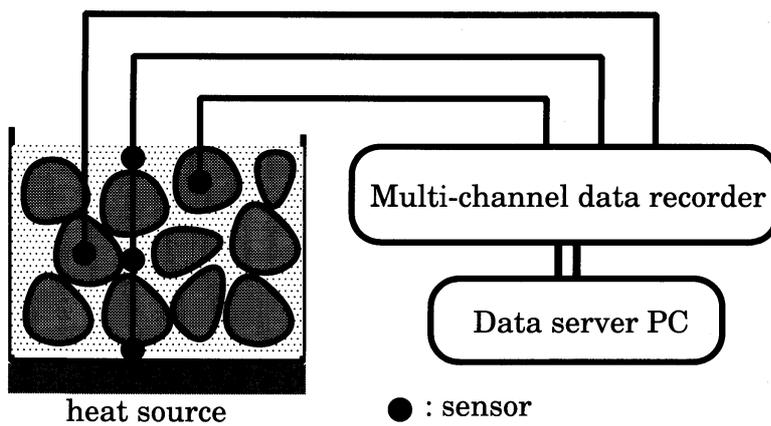


図 3: 実験装置の概要

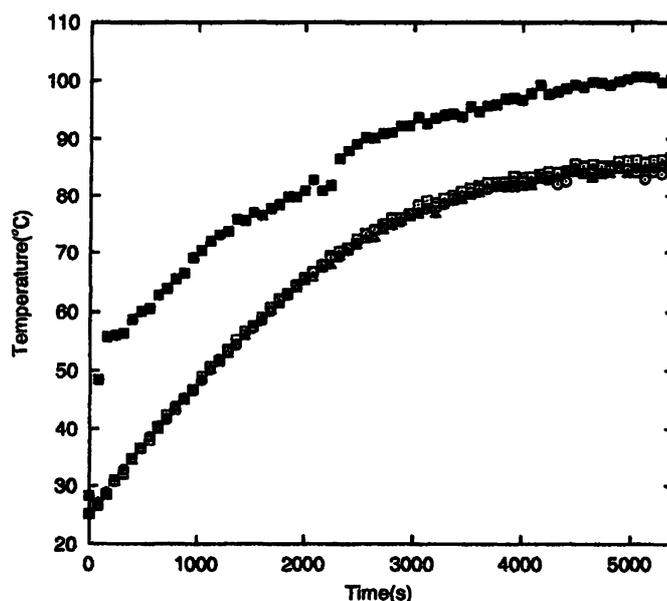


図 4: 温度変化(水のみ), 図中で ■:鍋底, □:鍋中心点(下から 1cm), ○:鍋中心点(液面から 1cm), 水量:3.645ℓ.

### 3.1 装置及び測定方法

図 3 に示すように, 加熱中の鍋容器内の数箇所に温度センサーを設置して煮汁及び食材の温度を経時的に測定する. 得られた計測データは温度記録装置 (Multi-channel recorder) を通して, データサーバ用のパソコン (Data server PC) に取り込む. 実験では, ステンレス製 IH 対応鍋 ( $\phi=22\text{cm}$ ) に水 (2 ℓ) とジャガイモ (北海道産メークイン 15 個, 総重量  $1700 \pm 50\text{g}$ ) を入れ, IH クッキングヒータ (ナショナル KZ-DS13, 100V, 1200W) を火力 3 で加熱して経時的温度変化を測定した.

鍋容器の中央底面, 中央底面近傍 (鍋底から 1cm 上), 中央液面近傍 (液面から 1cm 下), 鍋中央上部にあるジャガイモの中心点を測定点とし, (i) ジャガイモまるごと (長径約 10cm, 短径約 4 から 6cm) と (ii) ジャガイモを 1cm 角に切りそろえたもの, の二つの場合について経時的温度変化を測定した.

### 3.2 実験結果

以下に実験結果を示す [7]. まず, 水のみ加熱した場合を図 4 に示す. 鍋底面の温度 (■) は, 底面近傍 (□) 及び表面近傍 (○) よりも約  $20^\circ\text{C}$  高いが, 水の温度は二つの測定場所ではほぼ同じである. このことから, 鍋底面付近で温度境界層ができており, それ以外では対流による熱伝達により容器内がほぼ同温度になっているものと考えられる.

次に, 図 5 に水とジャガイモ (大) を入れた場合の温度変化を示す. 鍋底面の温度 (■) は, 底面近傍 (□) 及び表面近傍 (○) よりも  $20^\circ\text{C}$  程度高く, ジャガイモのない水だけの場

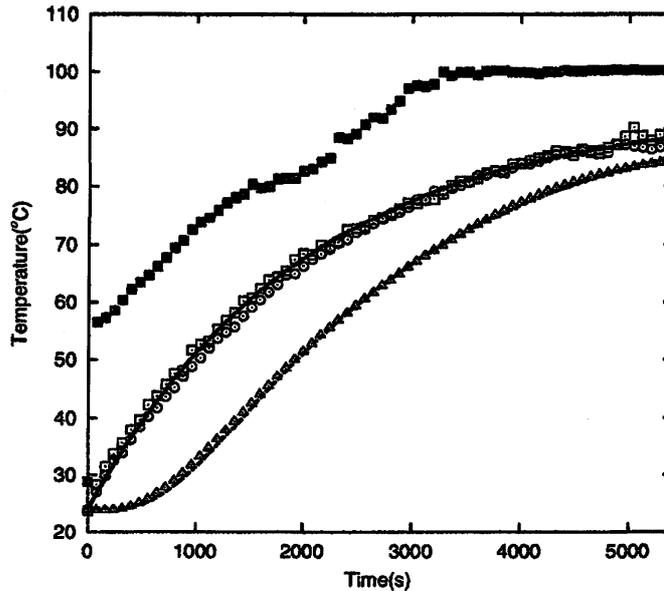


図 5: 温度変化(水とジャガイモ大), 図中で ■:鍋底, □:鍋中心点(下から1cm), ○:鍋中心点(液面から1cm), △:ジャガイモ中心部, 水+ジャガイモ:3.645l. また, 実線:ジャガイモ表面温度の計算値, 破線:ジャガイモ中心部温度の計算値.

合(図4)とほぼ同じであることがわかる. このことから, ジャガイモ(大)の場合, ジャガイモ間の隙間が大きいため, 対流による均一化が十分おこっていると考えられる.

一方, △はジャガイモ中心部の温度変化を示しており, 熱伝導のため鍋内の水温よりも遅れて温度が上昇していることがわかる. 以下では, ジャガイモ中心部のこの温度変化が表面温度変化より求めることができることを示す. 中心部温度を  $T_p$ , 表面温度を  $T_w$  として, 表面温度を水温に等しいと仮定し

$$T_w = A[1 - \exp(-\gamma t)] + B, \quad (15)$$

のように表面温度の時間変化が指数関数で表わされるとする. このとき, 半径  $a$  の球中心部での温度は以下のように与えられる [8]:

$$T_p = A \left[ 1 - \exp(-\gamma t) a \sqrt{\gamma/\kappa} / \sin(a \sqrt{\gamma/\kappa}) - 2\gamma a^2 \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^n \exp(-\kappa n^2 \pi^2 t/a^2) / (\kappa n^2 \pi^2 - \gamma a^2)] \right] + B. \quad (16)$$

ここで,  $A, B, \gamma$  は表面温度から決まる定数であり,  $\kappa$  は熱拡散率である. 上式でパラメータを  $A = 69.0^\circ\text{C}$ ,  $B = 24.0^\circ\text{C}$ ,  $\gamma = 0.0005/\text{s}$ ,  $\kappa = 1.5 \times 10^{-7} \text{m}^2/\text{s}$ ,  $a = 2.97 \text{cm}$  と選んだ ( $n \geq 4$  で十分収束). このとき, 図中実線は (15) 式による表面温度の時間変化, 破線は (16) 式によるジャガイモ中心部の温度変化を示しており, 実験結果とよく一致していることがわかる. このことから, 具材内部の熱伝達は伝導によると考えてよい [3] ことが確認できる.

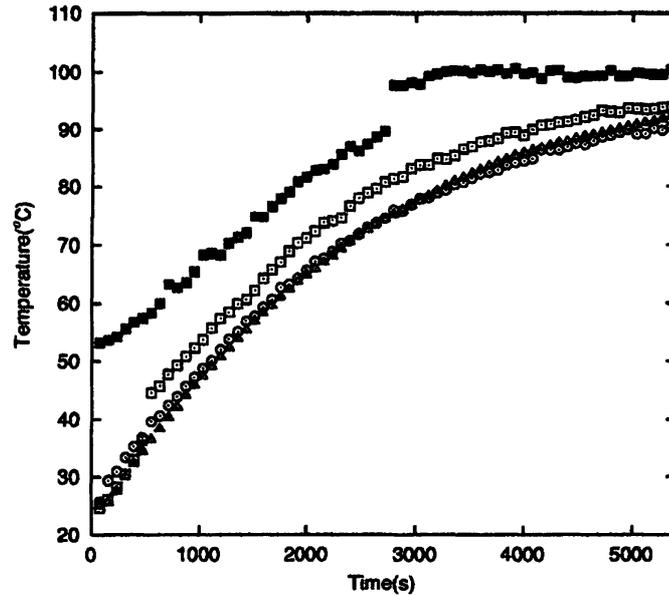


図 6: 温度変化(水とジャガイモ小), 図中で ■:鍋底, □:鍋中心点(下から 1cm), ○:鍋中心点(液面から 1cm), △:ジャガイモ中心部. 水+ジャガイモ:3.645ℓ.

最後に、水とジャガイモ(小)を加熱した場合を図6に示す。この場合、鍋底(■)、鍋下面近傍(□)、水面近傍(○)の順で同時刻での温度は低下する。このことは、小さいジャガイモの場合、対流による温度の均一化は起こっておらず、熱伝達は底面からの熱伝導によるとみられる。一方、ジャガイモ中心部(Δ)と周囲の水温度(○)はほとんど同じであることから、ジャガイモ内での熱伝達は速やかに起こっていることがわかる。

このように、ジャガイモが大きい場合は煮汁における熱伝達は対流によるのに対して、ジャガイモが小さい場合は熱伝導が主になる。前節でみたように、対流発生は Rayleigh 数ある臨界値を超えると起こることが示されているので、ジャガイモが大きい場合と小さい場合 Rayleigh 数の間にこの臨界値があることが予想される。ここで、Rayleigh 数は以下のように定義される：

$$Ra = \rho g \beta K H \Delta T / (\mu \kappa). \quad (17)$$

実験条件から、密度  $\rho = 998 \text{ kg/m}^3$ 、重力加速度  $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ 、体積膨張率  $\beta = 2.1 \times 10^{-4} / ^\circ\text{C}$ 、粘性率  $\mu = 10^{-3} \text{ Ns/m}^2$ 、熱拡散率  $\kappa = 1.5 \times 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ 、ジャガイモの有効直径  $D = 5.94 \text{ cm}$ (大),  $1.20 \text{ cm}$ (小), 空隙率 [≡ 水体積 ÷ (水+ジャガイモ体積)]  $\phi = 0.549$ , 浸透率  $K [\equiv D^2 \phi^3 / 180(1 - \phi^2)] = 1.59 \times 10^{-2}$  (大),  $6.49 \times 10^{-7}$  (小), 温度差  $\Delta T = 5 ^\circ\text{C}$  のようにパラメータが決定される。このとき、ジャガイモ小では  $Ra = 2.30 \times 10^4$ 、ジャガイモ大では  $4.79 \times 10^5$  となることから、Rayleigh 数はジャガイモが大きい場合のほうが大きくなり、対流がおりやすくなっていることがわかる。したがって、臨界 Rayleigh 数はこれらの数値の間にあるべきだが、前節に示した理論値  $\pi^2 \sim 4\pi^2$  に比べると非常に大きくなっている。

## 4 結論

以上得られた結果を以下のようにまとめる。

- ポーラスメディア円柱モデルでは臨界 Rayleigh 数を超えると対流が発生し、その対流パターンはアスペクト比に依存して変化する。
- ジャガイモが大きい場合、煮汁の熱伝達は対流であるのに対し、ジャガイモが小さい場合は伝導による。
- 大きなじゃがいもの表面温度と中心部温度の時間変化に関しては、熱伝導による理論結果と実験結果はよく一致する。このことから、具材内部での熱伝達は伝導による。
- 実験においてジャガイモが大きい場合と小さい場合の Rayleigh 数の間に臨界値があることが予想されるが、解析モデルで得られた結果からは大きく離れている。そのため定量的な比較に関して今後検討が必要である。

## 謝辞

本研究は科研費 (No.22500749) の助成を受けたものである。ここに感謝の意を表する。

## 参考文献

- [1] 渋川祥子: 調理における加熱の基本, 日本食生活学会誌, 17(2006)89.
- [2] P.M.Derbyshire and I.Owen: Transient heat transfer in a boiled potato: a study related to food process engineering, Int. J.Heat and Fluid Flow, 9(1988)254.
- [3] 香西みどり, 中村文子, 畑江敬子, 島田順子: シミュレーションによるジャガイモの最適加熱時間に及ぼす形状の影響, 日本調理科学会誌, 32(1999)296.
- [4] A.K.Datta: Porous media approaches to studying simultaneous heat and mass transfer in food processes, J.Food Eng.80(2007)80.
- [5] D.A.Nield and A.Bejan: *Convection in Porous Media* (3rd edition), (Springer,2010).
- [6] A.Zebib: Onset of natural convection in a cylinder of water saturated porous media, Phys. Fluids 21 (1978) 699.
- [7] 原知子, 吉永隆夫: 加熱過程におけるゆで水の温度変化に及ぼす具材の大きさの影響, 第 32 回日本家政学会関西支部研究発表会 (兵庫県立大学,2010).
- [8] H.S.Carslaw and J.C.Jaeger: *Conduction of heat in solids* (2nd edition), (Oxford, 1959).