

Some Questions on Schröder Functions

Shunsuke MOROSAWA(諸澤 俊介)

Department of Natural Science,
Faculty of Science, Kochi University

概要

本稿では石崎—柳原 [4] と奥山—Drasin [3] の論文をもとに Schröder 関数についてのいくつかの問題を述べる。

1 導入

R は原点を反発不動点とし、その乗法因子を λ とする有理関数とする。Schröder の関数等式とは次のものをいう。

$$f(\lambda z) = R(f(z))$$

この解は $f(0) = 0$ かつ $f'(0) = 1$ とするとただ一つに決まり、それを Schröder 関数と呼ぶ。石崎—柳原 [4] と奥山—Drasin [3] はそれぞれ独立に Schröder 関数をその定義する Schröder 関数等式に表れる有理関数の複素力学系の性質を用いて考察している。もちろん反発不動点は原点である必要は無いし、力学系の立場から乗法因子 λ の周期 p の反発周期点について

$$f(\lambda z) = R^p(f(z))$$

を考えて問題は無い。本稿では簡単の為に多くの場合は原点を不動点として考えることにする。

2 滑らかなジュリア集合と Schröder 関数

ファトゥ集合が空でない滑らかなジュリア集合は円周または線分であることが知られている [1]。

例 1. ジュリア集合が円周である有理関数は $P_n(z) = (z+1)^n - 1$ と共役である。

$$P_n(0) = 0, \quad P'_n(0) = n$$

となる。このとき $f_n(z) = e^z - 1$ は Schröder 関数である。実際に

$$f_n(0) = 0, \quad f'_n(0) = 1$$

$$f_n(nz) = e^{nz} - 1 = P_n(f_n(z))$$

例 2. ジュリア集合が線分となる有理関数はチェビシェフ多項式 T_n と共役である。ここで

$$T_n(\cos \theta) = \cos n\theta$$

である。 $\varphi_n(z) = (n^2/2)z - (n^2/2)$ とし、 $S_n(z) = \varphi(z) \circ S_n \circ \varphi_n^{-1}(z)$ とおく。すると $J(S_n) = [-n^2, 0]$ であり、 $S_n(0) = 0$ かつ $S'_n(0) = n^2$ となる。このとき

$$f_n(z) = -n^2 \sin^2 \sqrt{-\frac{z}{n^2}}$$

は Schröder 関数である。実際に

$$f_n(0) = 0, \quad f'_n(0) = 1$$

$$f_n(n^2 z) = S_n(f_n(z))$$

どのような代数的常微分方程式も満たさない関数を超・超越的という。次の問題は古くから考えられているようだ ([5] を参照)。

問題 1. Schröder 関数が超・超越的で無いならば、その関数等式の有理関数のジュリア集合は滑らかであるか、複素球面全体となるか。

3 漸近値

$f(z)$ を \mathbb{C} で有理型とする。 $a \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、 $D(a, r)$ を球面距離 $r > 0$ を半径とする開円板とする。 $U(r)$ を $f^{-1}(D(a, r))$ の成分とする。 $r_1 < r_2$ に対して $U(r_1) \subset U(r_2)$ となるようにとる。 $\bigcap_{r>0} U(r) = \emptyset$ となるときに a を f の漸近値と呼ぶ。 $A(f)$ で f の漸近値の集合を表す。 適当な $r > 0$ に対して、すべての $z \in U(r)$ が $f(z) \neq a$ となるときに直接、そうでな

いときに間接であるという。 $AP(f)$ で f の吸引不動点あるいは放物的不動点の集合とし、 $C(f)$ で f の臨界点の集合を表すとする。また

$$E(f) = \{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^{-2}(w) = \{w\}\}$$

とする。

定理 1 ([3], [4]). $f(\lambda z) = R(f(z))$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\begin{aligned} E(R) &= \{w \in \widehat{\mathbb{C}} \mid f^{-1}(w) = \emptyset\} \\ f(C(f)) &= \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n(C(R)) \setminus E(R) \\ \mathcal{A}(f) &\subset AP(R) \end{aligned}$$

定理 2 ([3], [4]). $f(\lambda z) = R(f(z))$ とする。 $a \in AP(R)$ とし、 D をその直接鉢で 0 がその境界にあるとする。このとき、 $a \in \mathcal{A}(f)$ である。

さらに、 a が吸引不動点であり $R^{-1}(a) \cap D \neq \{a\}$ であるならば、 a は間接特異点である。

間接特異点については次の定理に注意しておく。

定理 3 ([2]). f を有限位数の有理型関数とし、 a をその間接特異点とする。このとき、 a は f の a と異なる臨界値の列の極限となる。

例 3. $\lambda > 1$ とし、 $a = \lambda - 2$ とする。

$$R(z) = \frac{\lambda z}{z^2 + az + 1}$$

このとき、 $R(0) = 0$ 、 $R'(0) = \lambda$ で臨界点は ± 1 である。

$\lambda = 2$ のときは ± 1 が超吸引不動点である。これは例 1 と共役で Schröder 関数は

$$f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$$

である。定理 2 で述べられているように ± 1 は f の漸近値であり、定理 1 で述べられているように、それら Picard の意味での除外値であり、直接特異点となる。

$\lambda \neq 2$ のときは 1 が超吸引不動点であり、 $1 - \lambda < 0$ 、 $1 - \lambda \neq -1$ は吸引不動点である。 1 が直接特異点であり、 $1 - \lambda$ が間接特異点である。定理 2 より $\{R^n(-1)\}$ が定理 3 の臨界値の収束列である。

問題 2. $\lambda = 2$ では -1 が超吸引不動点であり、Schröder 関数の直接特異点となるが、その近傍で $\lambda \neq 2$ に対して、吸引不動点は連続的に変わり、Schröder 関数の間接特異点となる。このことを考察し、直接特異点と間接特異点について何か説明できるか。

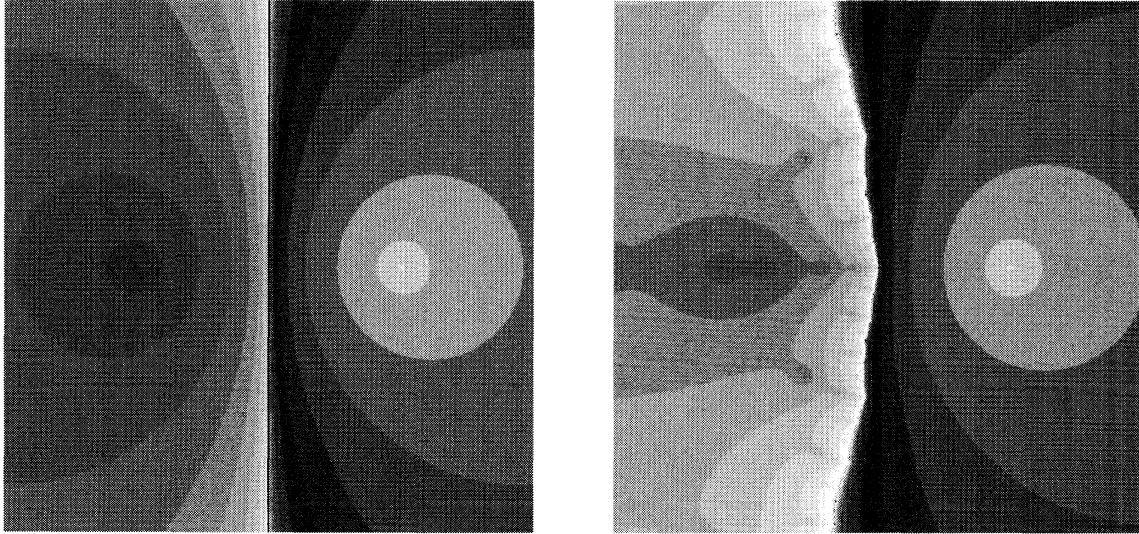


図 1: 左: $\lambda = 2$ 、 ± 1 は超吸引不動点。 -1 は f の直接特異点。 右: $\lambda = 2.2$ 、 ± 1 は超吸引不動点、 -1.2 は吸引不動点であり、 f の間接特異点。

4 ジュリアの方向

$$\ell_\theta = \{z \mid \arg z = \theta\}$$

$$\Omega(\theta, \varepsilon) = \{z \mid |\arg z - \theta| < \varepsilon\}$$

とする。

定義 4. ℓ_θ が有理型関数 f のジュリアの方向であるとは、任意の $\varepsilon > 0$ に対し f が $\Omega(\theta, \varepsilon)$ の中で高々二つの値を除くすべての値を無限回取るときをいう。

定理 5 ([4]). $\lambda > 1$ とし

$$f(\lambda z) = R(f(z))$$

とする。 ℓ_θ が f のジュリアの方向である必要十分条件は次が成り立つことである。

$$f(\ell_\theta) \cap J(R) \neq \emptyset$$

注意 6. 次のいずれの場合も起こりえることが知られている ([5] 参照)。

$$f(\ell_\theta) = J(R), \quad f(\ell_\theta) \subsetneq J(R), \quad f(\ell_\theta) \supsetneq J(R)$$

$$J_R(0) = \bigcap_{\varepsilon > 0} \overline{\{\arg w \mid w \in J(R), 0 < |w| < \varepsilon\}}$$

$$\mathbb{J}_f = \{\theta \mid \theta \text{ は } f \text{ のジュリアの方向}\}$$

とする。

定理 7 ([4]).

$$\mathbb{J}_f = J_R(0)$$

例 4 ([5]).

$$P(z) = z^4 + \frac{4}{3}z$$

とする。このとき $z_j = -\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\omega^j$ 、 $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ は超吸引不動点である。

$x \searrow -\infty$ とすると $f(x) \searrow z_0$ となり、 $f(l_\pi) = (z_0, 0)$ となる。すなわち、 l_π は漸近値 z_0 の漸近路である。また、 $x \nearrow \infty$ とすると $f(x) \nearrow \infty$ となり、 $f(l_0) = (0, \infty)$ となる。すなわち、 l_0 は漸近値 ∞ の漸近路である。同様に、 $l_{\frac{\pi}{3}}$ は z_2 、 $l_{\frac{2}{3}\pi}$ は z_1 の漸近路である。また $l_{\frac{2}{3}\pi}$ 、 $l_{\frac{4}{3}\pi}$ は ∞ の漸近路である。これらの間にジュリアの方向が存在する。

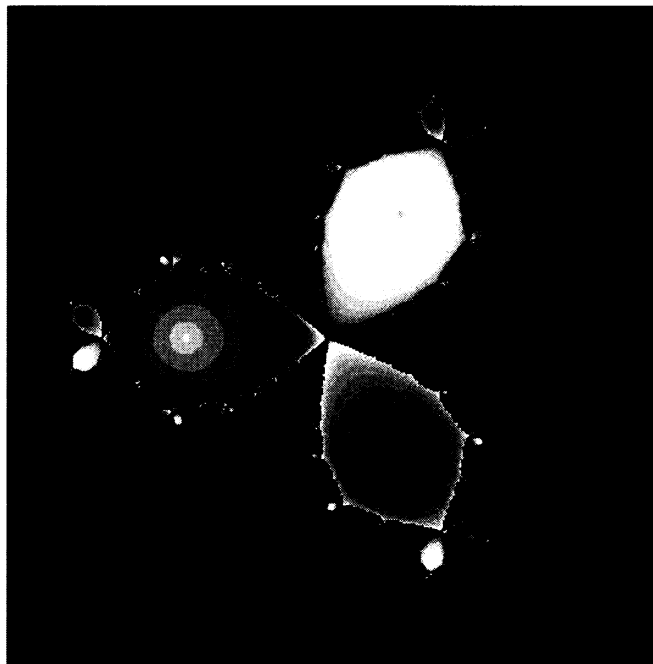


図 2: $P(z) = z^4 + \frac{4}{3}z$ のジュリア集合

例 5 (放物型分岐). $\varepsilon \in \mathbb{R}$ とする。

$$P_\varepsilon(z) = 4z^3 + z^2 + z + \varepsilon$$

$\varepsilon = 0$ のときは $-\frac{1}{4}$ は反発不動点であり、 0 は放物的不動点である。 $-\frac{1}{4}$ についての Schröder 関数等式の Schröder 関数を f_0 とする。 0 は間接特異点であり、 $(-\frac{1}{4}, \infty)$ は 0 の漸近路である。

$\varepsilon > 0$ を十分に小とすると、 P_ε は反発不動点 $\alpha_\varepsilon < 0$ と二つの吸引不動点 $\beta_\varepsilon, \bar{\beta}_\varepsilon$ を持つ。 α_ε についての Schröder 関数等式の Schröder 関数を f_ε とする。 β_ε と $\bar{\beta}_\varepsilon$ は f_ε の漸近値である。 ∞ も漸近値であり、 $(\alpha_\varepsilon, \infty)$ はその漸近路である。

$\varepsilon \searrow 0$ とすると $\alpha_\varepsilon \nearrow -\frac{1}{4}$ となる。さらに、 $\beta_\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\beta}_\varepsilon \rightarrow 0$ となる。

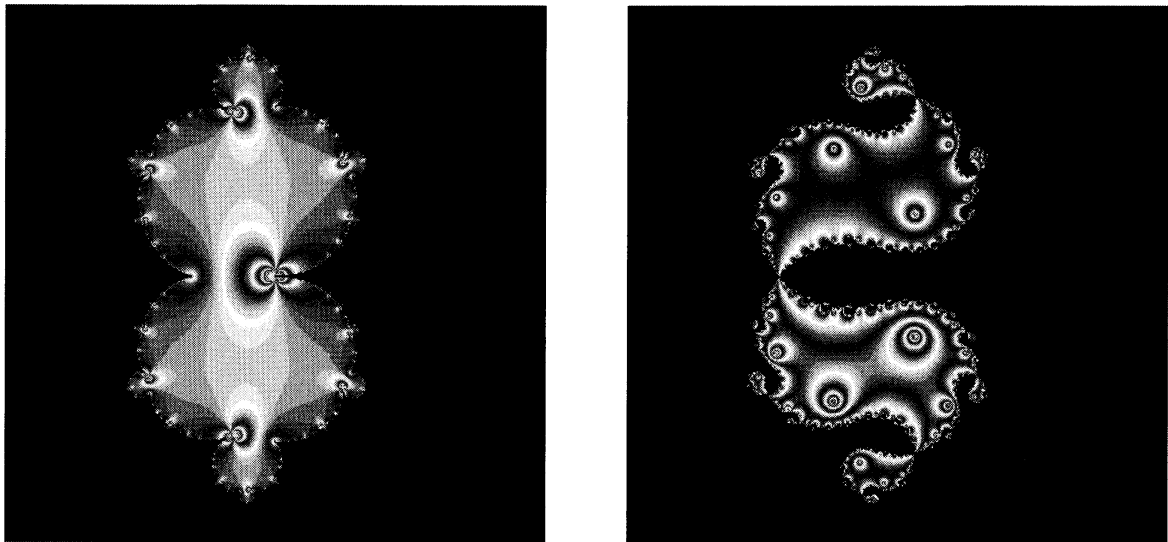


図 3: 左: $\varepsilon = 0$ 右: $\varepsilon = 0.1$

例 6 (放物型分岐). $\varepsilon \in \mathbb{R}$ とする。

$$P_\varepsilon(z) = -\frac{1}{2}z^4 + \frac{1}{2}z^2 + z + \varepsilon$$

$\varepsilon = 0$ のときは -1 は反発不動点であり、 0 は放物的不動点であり、 1 は吸引不動点である。 -1 についての Schröder 関数等式の Schröder 関数を f_0 とする。 0 は間接特異点であり、 $(-1, \infty)$ は 0 の漸近路である。

$0 < \varepsilon < \frac{1}{8}$ とする。 $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon, \bar{\beta}_\varepsilon$ は反発不動点であり、 γ_ε は吸引不動点である。ここで

$$\alpha_\varepsilon = -\frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}}}{\sqrt{2}}, \quad \beta_\varepsilon = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 + 8\varepsilon}}}{\sqrt{2}}, \quad \gamma_\varepsilon = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 + 8\varepsilon}}}{\sqrt{2}}$$

とする。 α_ε についての Schröder 関数等式の Schröder 関数を f_ε とする。
 γ_ε は f_ε の漸近値であり、 $(\alpha_\varepsilon, \infty)$ はその漸近路である。

$\varepsilon \searrow 0$ とすると $\alpha_\varepsilon \nearrow -1$ となる。さらに、 $\beta_\varepsilon \rightarrow 0$ 、 $\overline{\beta}_\varepsilon \rightarrow 0$ となる。
 また、 $\gamma \searrow 1$ となる。

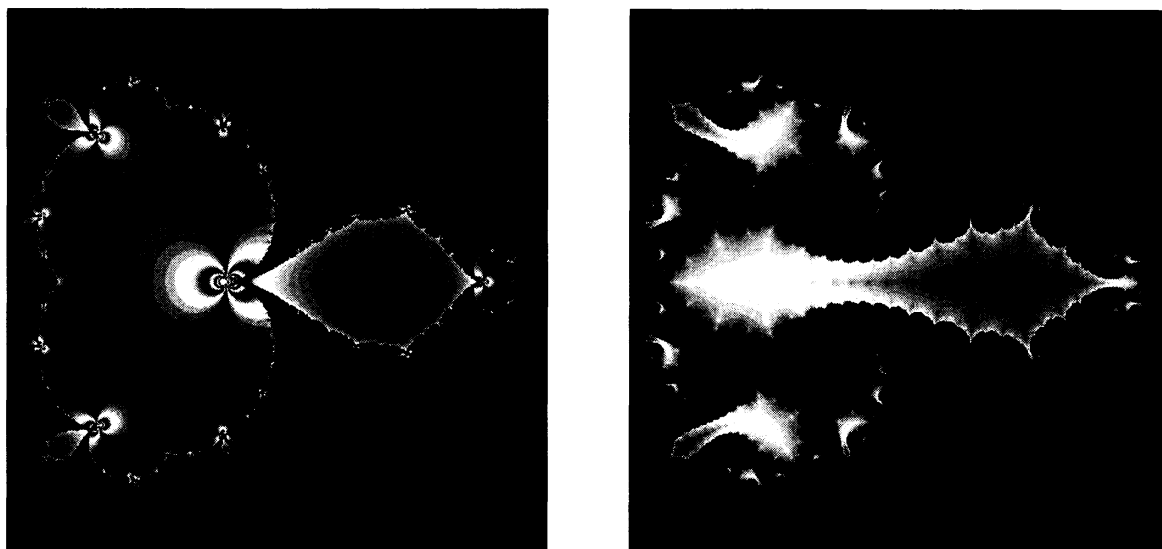


図 4: 左: $\varepsilon = 0$ 右: $\varepsilon = 0.1$

問題 3. 放物型分岐が起こるところで、ジュリア集合の連続性が無いことは知られている。Schröder 関数 f_0 と f_ε の特異点などについてどのようなことが言えるか。

参考文献

- [1] A. F. Beardon, Iteration of Rational Functions, GTM 132(1991), Springer.
- [2] W. Bergweiler and A. Eremenko, On the singularities of the inverse to a meromorphic function of finite order, Rev. Mat. Iberoamericana 11 (1995), 355-373.
- [3] D. Drasin and Y. Okuyama, Singularities of Schröder Maps and Unhyperbolicity of Rational Functions, Compu. Meth. Func. Theo., Vol. 8(2008), 285-302.

- [4] K. Ishizaki and N. Yanagihara, Borel and Julia directions of meromorphic Schröder functions, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 139(2005), 139–147.
- [5] K. Ishizaki, Schröder 関数の値分布について, 第 49 回函数論シンポジウムアブストラクト