数理解析研究所講究録
第 1763 巻 2011 年 53-65

上半平面における Aharonov-Casher 型定理について

京都工芸繊維大学 工芸科学研究科　峯 拓矢 (Takuya Mine)
Kyoto Institute of Technology,
愛媛大学 理工学研究科　野村 祐司 (Nomura Yuji)
Ehime University

概要. Aharonov–Casher の定理 [1] によれば, 2 次元 Euclid 平面における Pauli 作用素の zero-mode (固有値 0 に対応する固有ベクトル) の空間次元は全平面を貫く磁束のみによって定まる. 本稿では, 負の定曲率を持つ双曲上半平面で同様の問題を考えた場合での対応する結果の証明の概略を与える.

1　Euclid 平面における Aharonov-Casher 定理

以下, Cycon–Froese–Kirsch–Simon の教科書 [2] の 6.4 節より Euclid 平面 $\mathbb{R}^2$ における Aharonov-Casher 定理を引用する. まず, Pauli 行列 を

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

と取る. $\mathbb{R}^2$ の座標を (x_1, x_2) と書き, 磁場を表すベクトル・ポテンシャルを (a_1, a_2) と書く. 対応する平面に垂直な磁場の強さは $b = \partial_{x_1} a_2 - \partial_{x_2} a_1$ で与えられる. さらに $k = 1, 2$ に対して

$$D_k = \frac{1}{i}\partial_{x_k}, \quad \Pi_k = D_k - a_k$$

とおき, Dirac 作用素 Q およびその非対角成分 A, $A^\dagger$ を

$$Q = \sigma_1\Pi_1 + \sigma_2\Pi_2 = \begin{pmatrix} 0 & \Pi_1 - i\Pi_2 \\ \Pi_1 + i\Pi_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & A^\dagger \\ A & 0 \end{pmatrix}$$

により定義する. さらに Pauli 作用素 P およびその対角成分 P_+, P_- を

$$P = Q^2 = \begin{pmatrix} A^\dagger A & 0 \\ 0 & AA^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_- \end{pmatrix}$$

により定義する. ベクトル・ポテンシャルに適当な滑かさを仮定すれば, $P_\pm$ は $L^2(\mathbb{R}^2)$ 上の自己共役作用素として実現される. このとき, P の zero-mode のなす空間は

$$\mathrm{Ker}\, P = \mathrm{Ker}\, P_+ \oplus \mathrm{Ker}\, P_-$$

と表される. 良く知られているように, 上向きスピン成分 $P_+ = A^\dagger A$ と下向きスピン成分 $P_- = AA^\dagger$ は 0 を除いて同じスペクトル構造を持つ (例えば [3] 参照). 上下のスピンに対応する zero-mode の空間次元の差

$$\mathrm{Ind}\, P = \dim \mathrm{Ker}\, P_+ - \dim \mathrm{Ker}\, P_-$$

は超対称性の破れを表す量 (super symmetric index) として, Atiyah-Singer 指数定理との関連からも興味を持たれている. Aharonov-Casher [1] は次の結果を得た.

定理 1.1 (Aharonov–Casher '79) *$b \in C_0^1(\mathbb{R}^2)$(コンパクト台を持つ C^1 級関数) とし,*

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} b(x)dx$$

とおく. $n_\pm = \dim \operatorname{Ker} P_\pm$ について, 次が成り立つ.

(i) $\alpha \geq 0$ ならば $n_+ = \{\alpha\}$, $n_- = 0$.

(ii) $\alpha < 0$ ならば $n_+ = 0$, $n_- = \{-\alpha\}$.

ただし, $x > 0$ に対して $\{x\}$ は x より真に小さい整数のうち最大のものを表し, $\{0\} = 0$ である.

以下, n_+ についての主張の証明の概略を与えておく. 定義より明らかに $\operatorname{Ker} P_+ = \operatorname{Ker} A^\dagger A = \operatorname{Ker} A$ であるから, 方程式

$$Au = (\Pi_1 + i\Pi_2)u = -i(2\partial_{\bar{z}} + \phi(z))u = 0 \tag{1}$$

を解けばよい. ただし, $z = x_1 + ix_2$ により $\mathbb{R}^2$ と $\mathbb{C}$ を同一視し, $\partial_{\bar{z}} = (\partial_{x_1} + i\partial_{x_2})/2$, $\phi = a_2 - ia_1$ とおいた. (1) を解くためにはベクトル・ポテンシャル a_1, a_2 を次の形に取るのが便利である.[1] まず与えられた磁場 b に対し,

$$\Phi(x) = \left(b * \frac{\log|\cdot|}{2\pi}\right)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}^2} b(x-y)\log|y|dy \tag{2}$$

とおく. ただし, $*$ は畳み込み積を表す. $\mathbb{R}^2$ における超関数等式 $\Delta \log|x|/(2\pi) = \delta$ より

$$\Delta\Phi = \delta * b = b$$

を得る. これより,

$$a_1 = -\partial_{x_2}\Phi, \quad a_2 = \partial_{x_1}\Phi$$

とおけば $\partial_{x_1}a_2 - \partial_{x_2}a_1 = b$ を満たす. このとき,

$$2\partial_{\bar{z}}e^{\Phi} = e^{\Phi}\cdot 2\partial_{\bar{z}}\Phi = e^{\Phi}\phi$$

であるから, (1) は

$$-ie^{-\Phi}\partial_{\bar{z}}(e^{\Phi}u) = 0 \tag{3}$$

と書き直せる. (3) の一般解 u は, 任意の $\mathbb{C}$ 上の正則関数 $f(z)$ を用いて

$$u = e^{-\Phi}f(z) \tag{4}$$

[1] ゲージ不変性により, 与えられた磁場 b に対応する如何なるベクトル・ポテンシャル a を取っても, $n_\pm$ の値は同一である.

と表せる．これが $L^2(\mathbb{R}^2)$ に属する条件を調べればよい．関数 Φ の定義式 (2) より $|x| \to \infty$ のとき

$$\Phi \sim \alpha \log |x|, \quad e^{-\Phi} \sim |x|^{-\alpha}$$

であるから，(4) の u が $L^2(\mathbb{R}^2)$ に属するような正則関数 f は，$\alpha > 1$ ならば高々 $\{\alpha\} - 1$ 次の多項式であり，$\alpha \leq 1$ ならばそのような f は定数関数 0 のみである．これで n_+ についての主張が証明された．n_- についての主張も同様に証明できる．

定理 1.1 は Miller [14], Erdös–Vugalter [7] らによって，より弱い条件の下で証明された．さらに，定理 1.1 から全平面の磁束が無限大になる場合，すなわち $\alpha = \pm\infty$ の場合には zero-mode の空間次元が ∞ になると予想される．このことは磁場が定数のときは古くから良く知られており[2]，周期的磁場の場合は Dubrovin–Novikov [4, 5], さらに一般の場合は重川 [19], Geyler–Grishanov [9], Geyler–Stovicek [10], Rozenblum–Shirokov [18] らにより証明された．しかし，磁束の値が絶対収束せず，条件収束するのみの場合には反例も示されている [7].

上記の結果のうち，[7], [9], [10], [18] では磁場が測度になる場合，特に磁場が複数の δ 関数の和になる場合を扱っている．この場合には最小作用素[3] が本質的自己共役でなくなることが知られており，そのため自己共役拡張の選び方が問題となる[4]．前述の [10], [18] では，$P_\pm$ に対応する二次形式のうち定義域が最大のものを取り，それに付随する自己共役作用素 $P_{\pm,\max}$ を考えて，その場合には Aharonov-Casher 定理のある意味での一般化が得られることを示した[5]．自己共役拡張の取り方を変えると，一般には同じ主張は成立しない[6].

2 双曲上半平面の場合 (既知の結果)

双曲上半平面 (Poincaré 平面) $\mathbb{H}$, およびその計量 (Poincaré 計量) ds^2 を次で定義する．

$$\mathbb{H} = \{z = x_1 + ix_2 \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 > 0\}, \quad ds^2 = \frac{(dx_1)^2 + (dx_2)^2}{x_2^2}.$$

Riemann 多様体 $(\mathbb{H}, ds^2)$ は負の定曲率を持ち，群 $SL_2(\mathbb{R})$ が一次分数変換により等長変換群として作用する．対応する面積要素 (2 形式) は

$$\omega = \frac{1}{{x_2}^2} dx_1 \wedge dx_2$$

[2]これは定数磁場を持つ Schrödinger 作用素の最低 Landau 準位が無限多重度ということと同値である．

[3]δ 関数の台と交わらないようなコンパクト台を持つ C^∞ 級関数全体を定義域に持つような作用素のこと．

[4]この選び方のうちどれが物理的に正当か？ という問題についての解説が Persson [16] にある．

[5]この場合，各 δ 磁場の作る磁束の値が 2π の整数倍だけ異なる 2 つの $P_{+,\max}$ (あるいは $P_{-,\max}$) はユニタリ同値になるため，δ 磁束の値の選び方に任意性が生じる．上の主張は，うまく δ 磁束の値を選ぶと定理 1.1 と同じ主張が成り立つという意味である．後の定理 3.8 でも同じ問題が生ずる．

[6]例えば，磁場が無限個の δ 関数の和の場合に Friedrichs 拡張を取ると zero-mode は存在しなくなる [10].

である．測度 $dx_1dx_2/{x_2}^2$ に対する $\mathbb{H}$ 上の二乗可積分関数全体のなす空間を $L^2(\mathbb{H};\omega)$ と書き，そのノルムを $\|\cdot\|$ と書く．また，$\mathbb{H}$ は Cayley 変換 $w=(z-i)/(z+i)$ により Poincaré 円板

$$\mathbb{D}=\{w=u+iv \mid |w|<1\}, \quad \widetilde{ds}^2=\frac{4}{(1-|w|^2)^2}((du)^2+(dv)^2)$$

に等長に移されることも良く知られている．対応する $\mathbb{D}$ 上の面積要素は

$$\widetilde{\omega}=\frac{4}{(1-|w|^2)^2}du\wedge dv$$

である．

$\mathbb{H}$ 上の実 1 形式 $a=a_1dx_1+a_2dx_2$ をベクトル・ポテンシャルと呼び，その外微分 $da=(\partial_{x_1}a_2-\partial_{x_2}a_1)dx_1\wedge dx_2$ を磁場と呼ぶ．このとき，対応する Pauli 作用素は次のように定義される (稲浜–白井 [12] 参照)．まず，

$$D_k=\frac{1}{i}\partial_{x_k}, \quad \Pi_k=x_2(D_k-a_k),$$

$$A=\Pi_1+i\Pi_2, \quad A^\dagger=\Pi_1-i\Pi_2+1$$

とおく．作用素 A, $A^\dagger$ は $L^2(\mathbb{H};\omega)$ の内積に関して互いに形式的共役となっている．Dirac 作用素 Q を

$$Q=\begin{pmatrix}0 & A^\dagger\\ A & 0\end{pmatrix}$$

で定義し，Pauli 作用素 P を

$$P=Q^2=\begin{pmatrix}A^\dagger A & 0\\ 0 & AA^\dagger\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P_+ & 0\\ 0 & P_-\end{pmatrix}$$

で定義する[7]．

P の対角成分 $P_\pm$ は $\mathbb{H}$ 上の Schrödinger 作用素であり，特に磁場が定数，すなわちある実定数 B に対して $da=B\omega$ が成り立つとき，そのスペクトルは完全に決定されている (Elstrodt [6], Roelcke [17] など)．特に，$n_\pm=\dim\operatorname{Ker}P_\pm$ について次が成り立つ．

定理 2.1 ある実定数 B に対して $da=B\omega$ とする．このとき，

$$n_+=\begin{cases}\infty & (B>1/2),\\ 0 & (B\le 1/2).\end{cases} \quad n_-=\begin{cases}0 & (B\ge 1/2),\\ \infty & (B<1/2).\end{cases}$$

[7] この定義の正当性については [12] で議論されている．その他の定義を採用した論文もある (例えば [11])．

さらに [12] では定数磁場にコンパクト台を持つ磁場による摂動を加えても同じ結果が成り立つことを示している.

Euclid 平面のときと同様に, 磁場が周期的な場合の問題を考えることも出来る. Geyler–Stovicek [11] では Poincaré 円板 $\mathbb{D}$ の等長変換群

$$SU(1,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mid a,\ b \in \mathbb{C},\ |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}$$

の部分群 G で 商集合 $G\backslash\mathbb{D}$ がコンパクトであるもの (このとき, G をココンパクトと言う) のうち, ある条件を満すようなものを考え, G の作用に対して不変な離散部分集合 Γ の上に台を持つ δ 磁場の和に対応する Pauli 作用素の zero-mode, 特にその空間次元が ∞ になるための十分条件を与えている. しかし, 一般には与えられた条件の必要性は成り立たず, 尖点がある場合も考慮していない. 本稿では, 以下に記す仮定の下での [11] の結果の精密化を行った.

3 主定理

まず, 磁場の仮定および Pauli 作用素 $P_{\pm,\max}$ の厳密な定義を与える. B を実定数とし, α を $0 < \alpha < 1$ を満たす定数とする. Γ を $\mathbb{H}$ の離散集合とすると, Mittag–Leffler の定理により Γ 上にのみ極を持ち, その $\gamma \in \Gamma$ における主要部が $1/(z-\gamma)$ であるような 有理型関数 ϕ が存在する. そこで, 1 形式 a を

$$a = \left(\frac{B}{x_2} + \alpha \operatorname{Im} \phi(z) \right) dx_1 + \alpha \operatorname{Re} \phi(z) dx_2$$

により定義すると, 次の条件を満たすことが証明される.

仮定 3.1 ある $\mathbb{H}$ の離散集合 Γ に対して磁場 a の係数 a_1, a_2 は $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{H}) \cap C^\infty(\mathbb{H}\backslash\Gamma)$ に属し, 実定数 B, および $0 < \alpha < 1$ を満たす定数 α に対して $\mathbb{H}$ 上の超関数の意味で

$$da = B\omega + 2\pi\alpha \sum_{\gamma\in\Gamma} \delta_\gamma$$

を満たす[8]. ただし, δ_γ は点 γ における δ 測度である.

すなわち, 定数磁場と $\mathbb{H}$ 内の格子 Γ に台を持つ δ 磁場の和を考える.

Pauli 作用素の対角成分 $P_{\pm,\max}$ は, 次の二次形式 $p_{\pm,\max}$ に対応する非負の自己共役作用素として定義する.

$$p_{+,\max}[u] = \|Au\|^2, \qquad Q(p_{+,\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{H};\omega) \mid Au \in L^2(\mathbb{H};\omega)\},$$
$$p_{-,\max}[u] = \left\|A^\dagger u\right\|^2, \qquad Q(p_{-,\max}) = \{u \in L^2(\mathbb{H};\omega) \mid A^\dagger u \in L^2(\mathbb{H};\omega)\}.$$

[8] つまり, 任意の $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{H})$ に対して $-\int_{\mathbb{H}} d\varphi \wedge a = B\int_{\mathbb{H}} \varphi\omega + 2\pi\alpha \sum_{\gamma\in\Gamma} \varphi(\gamma)$. ゲージ不変性により, 以下の議論では a は仮定 3.1 の上で与えたベクトル・ポテンシャルと仮定する.

ただし, 上式において $Q(p)$ は二次形式 p の定義域を表し, Au, $A^\dagger u$ は超関数の空間 $\mathcal{D}'(\mathbb{H}\setminus\Gamma)$ における微分作用によって定義する.

次に格子 Γ についての仮定を述べる. 保型関数の初歩的な用語についてはやや簡略な定義を与えたが, 詳しくは清水 [20], 志村 [21], Ford [8] などの保型関数の入門書を参照されたい.

仮定 3.2 *群 G は $SL_2(\mathbb{R})$ の離散部分群であり, 商集合 $G\backslash\mathbb{H}$ の測度は有限である (このようなものを第 1 種 Fuchs 群という). $x \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ で,*

$$G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$$

が無限集合になるようなものを G の尖点といい, $\mathbb{H}$ に全ての尖点を付け加えて得られる位相空間を $\mathbb{H}^*$ と表す. Γ は $\mathbb{H}$ の離散部分集合, かつ $\mathbb{H}^*$ の離散部分集合であり,[9] 群 G の作用に関して不変である.

一般に $G\backslash\mathbb{H}^*$ はコンパクト Riemann 面の構造を持つが, 尖点があるときは $G\backslash\mathbb{H}$ はコンパクトでない. 尖点がないときには $G\backslash\mathbb{H} = G\backslash\mathbb{H}^*$ はコンパクトであり, このとき G はココンパクトであるという.

定義 3.3 *G を第一種 Fuchs 群とし, k を偶数とする. $\mathbb{H}$ 上の正則関数 Ψ で次の条件を満たすものを重さ k の保型形式と呼ぶ.*

(i) 任意の $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, $z \in \mathbb{H}$ について, $gz = (az+b)/(cz+d)$ と書くとき,

$$\Psi(gz)(cz+d)^{-k} = \Psi(z).$$

(ii) 任意の尖点において $\Psi(z)$ は有限の値を取る.

保型形式のうち, 全ての尖点において 0 となるものを尖点形式と呼ぶ.

(ii) の意味は次の通りである. まず ∞ が尖点であるとき, (i) を満たす関数 Ψ は ∞ のある近傍 $\{x_2 > 1/\epsilon\}$ で q-展開と呼ばれる次の展開を持つ.

$$\Psi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n q^n, \quad q = e^{2\pi i a z}. \tag{5}$$

ただし, a は G_∞ の生成元から定まる正の定数である. この展開係数 a_n が全ての $n<0$ に対して 0 になるとき, 尖点 ∞ で Ψ は有限であるといい, さらに $a_0 = 0$ であれば ∞ で Ψ は 0 であるという. 一般の尖点 $x = g\infty$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{R})$, については, $\Psi^g(z) = (cz+d)^{-k}\Psi(gz)$ について同様の条件を考える.

格子 Γ について, 次の仮定をおく.

[9] すなわち, 尖点は Γ の集積点でない.

仮定 3.4 G の保型形式 Ψ で, 尖点においては 0 にならず, その零点全体の集合が Γ と一致し, しかも全ての零点の位数が等しい値 m となるものが存在する.

さらに, G が尖点を持つときは次の仮定もおく.

仮定 3.5 G の尖点形式 Δ で, $\mathbb{H}$ 上に零点を持たないものが存在する.

Riemann-Roch の定理 ([20] 参照) を用いると, この仮定を満たす G, Γ は無数に存在することが示せる[10].

さらに, 仮定 3.4 が満たされるとき, $\Phi = \Psi^{1/m}$ は Γ 上に一位の零点を持つ一価正則な関数なので, ベクトル・ポテンシャルを定義する際の有理型関数 ϕ として

$$\phi(z) = \frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$$

を取れる.

さらにいくつかの用語を準備しておく.

定義 3.6 G を第 *1* 種 *Fuchs* 群とする. $\mathbb{H}$ の閉部分集合 $\mathcal{D}$ が次を満たすとき, $\mathcal{D}$ は G の基本領域であるという.

(i) $\mathcal{D}$ の境界は有限本の測地線からなる.

(ii) $\bigcup_{g\in G} g\mathcal{D} = \mathbb{H}$.

(iii) $G \ni g \neq \{\pm 1\}$ のとき, $g\mathring{\mathcal{D}} \cap \mathring{\mathcal{D}} = \emptyset$. ただし, $\mathring{\mathcal{D}}$ は $\mathcal{D}$ の内点全体の集合である.

このような $\mathcal{D}$ が存在することは知られている.

次に, $z \in \mathbb{H}$ に対して

$$G_z = \{g \in G \mid gz = z\}$$

とおく. ι を $SL_2(\mathbb{R})$ から $PSL_2(\mathbb{R}) = SL_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\}$ への射影作用素とし,

$$e_z = \#\iota(G_z)$$

とおく[11]. $e_z > 1$ となる点 $z \in \mathbb{H}$ を G の固定点という.

定義 3.7 G, Γ が仮定 *3.2* を満たすとし, $\mathcal{D}$ が G の基本領域とする. Γ の元の G-作用に関する完全代表系を $\gamma_1, \dots, \gamma_K$ とする. このとき, $\mathcal{D}$ 内の Γ の点の個数 N を

$$N = \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{e_{\gamma_k}}$$

と定義する.

[10]特に, Riemann 面 $G\backslash\mathbb{H}^*$ の種数が 0 ならば, 仮定 3.2 を満たす任意の Γ について仮定 3.4 を満たす Ψ が存在し, さらに尖点が存在すれば仮定 3.5 を満たす Δ も存在する. (a,b,c) 型三角群, すなわち三つの角が π/a, π/b, π/c (a,b,c は自然数または ∞ で $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1} < 1$) であるような双曲三角形の 2 つの辺に関する折り返し写像の合成が生成する群はこの条件を満たす. モジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$ は $(2,3,\infty)$ 型三角群である.

[11]$\{\pm 1\}$ は $\mathbb{H}$ の元に対して恒等作用素として作用することに注意せよ.

定義から N は有理数であり, 一般には整数とは限らない. N は固定点の存在を考慮した上で数えた $\mathcal{D}$ 内の Γ の点の個数である.

以上の準備の下で, 主結果は次のように表される. まず, G がココンパクトな場合に述べる.

定理 3.8 G, Γ は仮定 *3.2, 3.4* を満たし, さらに G がココンパクトであるとする. 仮定 *3.1* で与えられる磁場に対応する *Pauli* 作用素 $P_{\pm,\max}$ に対し, $n_\pm = \dim \operatorname{Ker} P_{\pm,\max}$ と書く. $\mathcal{D}$ を G の基本領域とし, $|\mathcal{D}|$ でその ω に関する面積 $\int_{\mathcal{D}} \omega$ を表す. このとき, 次が成り立つ.

$$n_+ = \begin{cases} \infty & (B + \dfrac{2\pi\alpha N}{|\mathcal{D}|} > 1/2), \\ 0 & (B + \dfrac{2\pi\alpha N}{|\mathcal{D}|} \leq 1/2), \end{cases}$$

$$n_- = \begin{cases} 0 & (B - \dfrac{2\pi(1-\alpha)N}{|\mathcal{D}|} \geq 1/2), \\ \infty & (B - \dfrac{2\pi(1-\alpha)N}{|\mathcal{D}|} < 1/2). \end{cases}$$

特に n_+ に対する結果において, 不等式の左辺の値 $B + 2\pi\alpha N/|\mathcal{D}|$ は単位面積当たりの磁束の平均値を表すので, この結果は定数磁場の場合 (定理 2.1) と対応している. n_- に対する結果は, n_+ に対する結果と次の作用素間の関係から導かれる. 作用素 $P_{\pm,\max}$ を定義する際の定数 B, α を明示したものを $P_{\pm,\max}(B,\alpha)$ と書くと,

$$CP_{-,\max}(B,\alpha)C = P_{+,\max}(-B+1,-\alpha) \simeq P_{+,\max}(-B+1,1-\alpha).$$

ただし C は複素共役写像, $\simeq$ はユニタリ同値を表す.

尖点がある場合は, 現在のところ次の結果が得られている.

定理 3.9 G, Γ は仮定 *3.2, 3.4* を満たし, さらに G の尖点が存在して仮定 *3.5* を満たすとする. 定理 *3.8* と同じ記号下で, 次が成り立つ.

(i) 非臨界的な場合, つまり定理 *3.8* の n_+ に関する主張で $B + 2\pi\alpha N/|\mathcal{D}| \neq 1/2$ のとき, および n_- に関する主張で $B - 2\pi(1-\alpha)N/|\mathcal{D}| \neq 1/2$ のとき, 定理 *3.8* と同じ主張が成り立つ.

(ii) $B \geq 0$ かつ $B + 2\pi\alpha N/|\mathcal{D}| = 1/2$ のとき, $n_+ = 0$.

(iii) $B \leq 1$ かつ $B - 2\pi(1-\alpha)N/|\mathcal{D}| = 1/2$ のとき, $n_- = 0$.

(ii) における条件 $B \geq 0$, (iii) における条件 $B \leq 1$ は技術的な仮定と思われるが, 現在のところ取り除かれていない.

4 証明の概略

定理 3.8, 3.9 の証明の方針そのものは Euclid 平面の場合と同じで, (1), (3) のように固有方程式を因数分解することによって具体的に解を与え, それが $L^2(\mathbb{H};\omega)$ に属するための条件を調べる. 簡単な計算により, $P_+u=0$ の解で Γ の各点の近傍で L^2_{loc} となるものは, $\mathbb{H}$ 上の任意の正則関数 f を用いて次のように表せることが分かる.

$$u = {x_2}^B|\Phi(z)|^{-\alpha}f(z).$$

$\Phi(z)$ の $x_2\downarrow 0$ のときの挙動は次のようにして分かる. 保型形式の定義 3.3 と等式 $\mathrm{Im}\, gz = \mathrm{Im}\, z/|cz+d|^2$ を用いると, 任意の $g\in G$ および $z\in\mathbb{H}$ に対して

$$|\Psi(gz)|(\mathrm{Im}\, gz)^{k/2} = |\Psi(z)|(\mathrm{Im}\, z)^{k/2}$$

が成り立つことが分かる. 両辺の m 乗根を取ると (m は仮定 3.4 で与えられる整数),

$$|\Phi(gz)|(\mathrm{Im}\, gz)^{k/(2m)} = |\Phi(z)|(\mathrm{Im}\, z)^{k/(2m)} \tag{6}$$

を得る. (6) の右辺の関数を ψ とおくと, ψ は G 作用に対して周期的である. 特に G がココンパクトの場合には基本領域 $\mathcal{D}$ はコンパクトだから, ψ は Φ の零点である Γ の点の近傍を除いて上下に有界であり, このことから $x_2\to 0$ のとき

$$|\Phi(z)| \sim {x_2}^{-k/(2m)}$$

が成り立つことが分かる (特に上からの評価は全ての点で成り立つ).[12] さらに, 保型形式の零点と基本領域の面積の関係 ([8, Sec.49, Theorem 4]) から

$$\frac{k}{m} = \frac{4\pi N}{|\mathcal{D}|}$$

が成り立つことが分かる. これらを合わせれば, Γ の点の近傍を除いて

$$|u|^2 \sim {x_2}^{2B+(4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}|}|f|^2$$

となる (特に下からの評価は全ての点で成り立つ). この漸近形から, $2B+(4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}|>1$ ならば十分大きい n に対して $f(z)=(z+i)^{-n}$ と取れば $u\in L^2(\mathbb{H};\omega)$ が分かり, 逆に $2B+(4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}|\le 1$ のときには $u\in L^2(\mathbb{H};\omega)$ となるのは f が恒等的に 0 のときのみであることが証明できる[13]. 前者の証明では $\psi^{-2\alpha}$ の上からの評価が Γ の近傍で得られないことが問題になるが, この問題は $\psi^{-2\alpha}$ の周期性と特異性が高々 L^1_{loc} 程度であることを用いれば解決できる.

G が尖点を持つ時には若干議論が煩雑になる. 例として, G がモジュラー群 $SL_2(\mathbb{Z})$, $\Gamma = Gi$ の場合に説明する. この場合, 仮定 3.4 の Ψ として 6 次の Eisenstein 級数

$$G_6(z) = \sum_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}} \frac{1}{(mz+n)^6}$$

[12] $F(z)\sim G(z)$ は $|F(z)|/|G(z)|$ およびその逆数が有界あることを意味する.

[13] 補題 4.1 の後の議論をみよ. この場合, ψ は上に有界であるから, (9) は明らかに成り立つ.

を取ることができ, しかも $m=1$ であることが知られている[14]. 特に $\Phi = G_6$ である. $\mathcal{D}$ としては良く知られた基本領域

$$\mathcal{D} = \{z \mid |\mathrm{Re}\, z| \leq 1/2,\ |z| \geq 1\}$$

を取る. 定義より,

$$\lim_{\mathrm{Im}\, z \to \infty} G_6(z) = 2\zeta(6) \neq 0$$

(ζ は Riemann の ζ 関数) であるから, (6) の右辺の関数 ψ の漸近挙動

$$\psi(z) \sim {x_2}^3, \quad x_2 \to \infty$$

が得られ, 特に $\psi(z)$ は $\mathcal{D}$ 内で上に非有界である. ψ の周期性 (6) を考えれば, ψ は全ての尖点で発散することが分かる. このとき, $\psi^{-2\alpha}$ は依然として特異点の周りを除いて上から有界なので $2B + (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}| > 1$ の場合の証明には影響しないが, 尖点の近傍で下から有界でなくなるため $2B + (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}| \leq 1$ の場合の証明は変更しなければならない.

非臨界的な場合, すなわち $2B + (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}| < 1$ の場合には, 仮定 3.5 で与えられる関数 Δ を用いてこの問題を次のように回避できる. まず, $\epsilon > 0$ に対して Δ^ϵ は $\mathbb{H}$ 上の正則関数であることに注意する. Δ は尖点形式なので, 尖点の近傍で z が尖点に近づくとき Δ は指数関数的に減衰する ((5) を見よ). Δ の重さを k' とすると, $|\Delta(z)|{x_2}^{k'/2}$ は G-周期的であり,

$$|u|^2 = {x_2}^{2B+(4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}|+\epsilon k'} \hat{\psi} |\Delta^\epsilon f|^2, \quad \hat{\psi} = \psi^{-2\alpha} |\Delta^{-2\epsilon}| {x_2}^{-\epsilon k'}$$

と表せる. この表示において $\hat{\psi}$ は G-周期的であり, しかも z が尖点に近づくときの $\psi^{-2\alpha}$ の減衰は高々多項式程度であり, $|\Delta^{-2\epsilon}|$ の発散は指数関数的だから, $\hat{\psi}$ は尖点の近傍で発散し, 特に下から有界である. しかも, ϵ を十分小さく取れば $2B + (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}| + \epsilon k' < 1$ であり, $\Delta^\epsilon f$ は $\mathbb{H}$ 上正則であるから, あとの議論はココンパクトのときと同様になる.

臨界的な場合, すなわち $2B + (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}| = 1$ の場合には上の手法は使えないため, さらに精密な評価が必要となる. このため, まず Cayley 変換を用いて問題を $\mathbb{D}$ 上の問題に翻訳すると, 次の問題に帰着される. $\beta = (4\pi\alpha N)/|\mathcal{D}|$ と書き, $2B+\beta = 1$ を仮定する. Cayley 変換の逆写像を σ と書き, $\mathbb{D}$ 上の正則関数 $\tilde{f}$ に対して

$$|\tilde{u}|^2 = (1-|w|^2)\tilde{\psi}^{-2\alpha}|\tilde{f}(w)|^2, \quad \tilde{\psi}(w) = \psi(\sigma w) \tag{7}$$

とおくとき, 示すべき主張は

$$|\tilde{u}|^2 \in L^1(\mathbb{D}; \tilde{\omega}) \Rightarrow \tilde{u} = 0. \tag{8}$$

ここで, 次の補題を用いる.

[14]つまり G_6 の全ての零点は軌道 $SL_2(\mathbb{Z})i$ であり, 位数は 1 位である. Koblitz [13] の命題 3.9 の証明参照.

補題 4.1 $0 < \beta \leq 1$ とする. このとき, $0 \leq r_0 < 1$ なる r_0 と $C > 0$ が存在して,

$$\int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(re^{i\theta})^{2\alpha} d\theta \leq C|\log(1-r)| \tag{9}$$

が全ての $r_0 \leq r < 1$ に対して成り立つ.

$\psi^{2\alpha} = |\Phi|^{2\alpha} {x_2}^{\beta}$ だから, β は尖点における関数 $\psi^{2\alpha}$ の発散の速さを表すパラメータである. 補題の仮定 $0 < \beta \leq 1$ はこの発散があまり速くないことを意味する. 仮定 $B \geq 0$ があれば $2B + \beta = 1$ より $0 < \beta \leq 1$ であるから, 補題 4.1 を適用できることに注意しておく. $\beta > 1$ の場合には, 現在のところ (9) の左辺は $O((1-r)^{-(\beta-1)})$ であることが知られている.

補題 4.1 を認めれば (8) が成り立つことを示す. まず, 正則関数 $\tilde{f}$ の原点における Taylor 展開を

$$\tilde{f}(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$$

と書く. $|\tilde{u}|^2 \in L^1(\mathbb{D};\omega)$ ならば, 全ての n に対して $a_n = 0$ であることを示せばよい. Cauchy の積分公式と Schwarz の不等式を用いれば, $r_0 \leq r < 1$ に対して

$$\begin{aligned} 2\pi r^n |a_n| &\leq \int_0^{2\pi} |\tilde{f}(re^{i\theta})| d\theta \\ &\leq \left(\int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(re^{i\theta})^{2\alpha} d\theta \right)^{1/2} \left(\int_0^{2\pi} \tilde{\psi}(re^{i\theta})^{-2\alpha} |\tilde{f}(re^{i\theta})|^2 d\theta \right)^{1/2} \end{aligned}$$

である. この不等式の両辺を 2 乗して $r(1-r^2)^{-1}/|\log(1-r)|$ をかけ, 補題の不等式を用いてから $[r_0, 1)$ で積分すると,

$$\begin{aligned} &4\pi^2 \int_{r_0}^1 r^{2n+1}(1-r^2)^{-1}/|\log(1-r)| dr \cdot |a_n|^2 \\ \leq\ & C \int_{r_0}^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta (1-r^2)^{-1} \tilde{\psi}(re^{i\theta})^{-2\alpha} |\tilde{f}(re^{i\theta})|^2 \end{aligned} \tag{10}$$

を得る. (10) の右辺は仮定 $|\tilde{u}|^2 \in L^1(\mathbb{D};\tilde{\omega})$ より収束するが ($\tilde{\omega} = 4r(1-r^2)^{-2} dr \wedge d\theta$ より), 左辺の積分は全ての n に対して発散する. したがって, $a_n = 0$ が得られ, (8) が示された.

補題 4.1 は尖点の近傍における保型関数の漸近挙動や尖点の近傍 (単位円周に内接する無限個の小円板) の $\mathbb{D}$ における分布状況を詳しく調べることによって証明できるが, 詳細は [15] に譲る[15].

[15]単位円の双曲タイル張りの図を御覧になれば, 証明の雰囲気を感じ取れるかもしれない.

参考文献

[1] Y. Aharonov, and Y. Casher; Ground state of a spin-1/2 charged particle in a two-dimensional magnetic field, *Phys. Rev. A* **19** (1979), 2461–2462.

[2] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon; *Schrödinger operators with application to quantum mechanics and global geometry*, Springer, 1987.

[3] P. A. Deift; Applications of a commutation formula, *Duke Math. J.* **45**, no. 2, 267–310.

[4] B. Dubrovin, and S. Novikov; The base state of a two-dimensional electron in a periodic field, *J. Exper. Theoret. Phys.* **79** (1980), no. 3, 1006–1016. (in Russian)

[5] B. Dubrovin, and S. Novikov; Base states in a periodic field. Magnetic Bloch functions and vector bundles, *Dokl. AN SSSR* **253** (1980), 1293–1297. (in Russian)

[6] J. Elstrodt; Die Resolvente zum Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene. Teil I-III, *Math. Ann.* **203** (1973), 295–330; *Math. Z.* **132** (1973), 99–134; *math. Ann. 208* (1974), 99–132.

[7] L. Erdös, and V. Vugalter; Pauli operator and Aharonov–Casher theorem for measure valued magnetic fields, *Comm. Math. Phys.***225** (2002), no. 2, 399–421.

[8] L. R. Ford; *Automorphic functions, Second edition*, AMS Chelsea Publ., 1951.

[9] V. A. Geyler, and E. Grishanov; Zero modes in a periodic lattice of Aharonov–Bohm solenoids, *JETP Lett.* **75** (2002), 354–356.

[10] V. A. Geyler, and P. Stovicek; Zero modes in a system of Aharonov–Bohm fluxes, *Rev. Math. Phys.* **16** (2004), 851–907.

[11] V. A. Geyler, and P. Stovicek; Zero modes in a system of Aharonov–Bohm solenoids, on the Lobachevsky plane, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006), 1375–1384.

[12] Y. Inahama, and S. Shirai; Spectral properties of Pauli operators on the Poincaré upper-half plane, *J. Math. Phys.* **44** (2003), no. 6, 2451–2462.

[13] N. Koblitz 著, 上田勝・浜畑芳紀訳; 楕円曲線と保型形式, シュプリンガー・ジャパン, 2006.

[14] K. Miller; Bound states of Quantum Mechanical Particles in Magnetic Fields, Ph.D. Thesis, Princeton University, 1982.

[15] T. Mine, and Y. Nomura; Landau levels on the hyperbolic plane in the presence of Aharonov–Bohm fields, in preparation.

[16] M. Persson; On the two-dimensional Pauli operator with a finite number of Aharonov–Bohm solenoids, Ph. D. Thesis, Göteborg University, 2006.

[17] W. Roelcke; Das Eigenwertproblem der automorphen Formen in der hyperbolischen Ebene, I, *Math. Ann.* **167** (1966), 292–337.

[18] G. Rozenblum, and N. Shirokov; Infiniteness of zero modes for the Pauli operator with singular magnetic field, *J. Func. Anal.* **233** (2006), 135–172.

[19] I. Shigekawa; Spectral properties of Schrödinger operators with magnetic fields for a spin 1/2 particle, *J. Func. Anal.* **101** (1991), 255–285.

[20] 清水 英男; 保型関数 I, 岩波講座 基礎数学, 1977.

[21] G. Shimura; *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions. Reprint of the 1971 original.* Publications of the Mathematical Society of Japan, 11. Kano Memorial Lectures, 1, Princeton University Press, 1994.