

ODE/IM 対応*

鈴木 淳史

静岡大学 理学部

概要

あるクラスの常微分方程式 (ODE) と可積分系 (IM) の間に成立する不思議な対応 (ODE/IM 対応) に関する introductory なレビューをおこなう。

1 イントロダクション

量子力学で最も基本的な一次元系に対する定常的シュレディンガー方程式を考える。

$$\left(-\epsilon^2 \frac{d^2}{dx^2} + P(x, E)\right)\psi(x, E) = 0 \quad P(x, E) = V(x) - E \quad (1)$$

物理的には $x \in \mathbb{R}$ である。しかしながら後々のためには $x \in \mathbb{C}$ と採っておいた方が都合が良い。ここで ϵ はプランク定数と粒子の質量に関するごく小さな量である。最高次数の微分項に ϵ が掛かっているので、この方程式は特異摂動で扱われるべきものである。

ここでは $|x| \rightarrow \infty$ で十分はやく発散するような $P(x)$ を考える (具体形は後述)。このとき $x = \infty$ は不確定特異点となる。そのため複素平面は、いくつかの角領域にわかれ、境界を横切るとに $\psi(x)$ は不連続な変化をおこす。この変化を特徴づける量を Stokes 係数といい、 $P(x)$ の係数、とくに E の関数である。この不連続な跳び具合を追跡してすべての角領域での $\psi(x)$ の関係づけをおこなうことを大域的接続問題とよぶ。

*“可積分系の多様性” (2010 年 7 月 京都大学数理解析研究所)

物理の問題では $\psi(x)$ の大域的振る舞いでなく、実軸上 $x \rightarrow \pm\infty$ で $\psi \rightarrow 0$ なる境界条件を課したときのエネルギー固有値のほうに興味がある。しかしながら大域的接続問題の解は後者の解を含んでいる。これを見るには次のように考えればよい。負の実軸をふくむ角領域で $x \rightarrow -\infty$ で $\psi \rightarrow 0$ なる解から出発して正の実軸をふくむ角領域に解を接続する。二階の常微分方程式を対象にしているので得られる結果は、 $x \rightarrow \infty$ で指数的に発散する解 (dominant) と指数的にゼロになる解 (subdominant) の線形結合であたえられ、それぞれの係数は適当な Stokes 係数の積である。境界条件を満たすためには dominant な解の係数がゼロになるように E の値を調節すればよい。これが固有値を与える。

よって大域的接続問題は物理的にも非常に重要な問題である。しかしながら一般にこれを顕に解くことは非常に困難である。ところが、近年、 $P(x)$ が非常に簡単な場合には可積分系の手法を用いる事により、これが明示的に解ける事が明らかになってきた (ODE/IM 対応)。小論では、この事情を簡単に論じてみたい¹。

2 WKB 法と Stokes 現象

2.1 素朴 WKB 法

用語の定義もかねて物理で用いられる近似法としての WKB 法（ここでは素朴 WKB 法とよぶ）に関して簡単に解説しておく。(1) を考える。

定義 1. $P(x_0) = 0$ なる x_0 を変わり点 (*turning point*) という。 $P'(x_0) \neq 0$ のときは単純 (*simple*) という。 *simple* 以外の変わり点を *higher turning point* という。

解 $\psi(x, E)$ に対して次の形を仮定する。

$$\psi(x, E) = \exp\left(\frac{S(x, E)}{\epsilon}\right) \quad S(x, E) = S_0(x, E) + \epsilon S_1(x, E) + \dots \quad (2)$$

このように置く事により（時間に依存する）シュレディンガー方程式より S が虚数時間に対するハミルトン・ヤコビの方程式を満足する事がわかる。すなわち $S(x, E)$ は古典的な作用（の虚数倍）に対応している。 ϵ の各次数をみる事により S_n 達は再帰的に決定されていく。完全 WKB

¹詳細なレビューは [1] を参照されたい

法ではこれらの明示的な形によらないでさらに議論を進めていくことができる²[2]。ここでは物理でよくやるように $O(\epsilon)$ までの近似で議論を進める。

$$\phi_{\pm} = P^{-\frac{1}{4}} \exp\left(\pm \frac{1}{\epsilon} \int_{x_0}^x \sqrt{P(x, E)} dx\right)$$

物理では $x, x_0 \in \mathbb{R}$ で上の近似を考えるが、ここでは一般に $x, x_0 \in \mathbb{C}$ としておく。

(1) の解はこれらの線形結合で与えられる。

$$\psi(x, E) \sim \frac{C}{P^{\frac{1}{4}}} \exp\left(\int_{x_0}^x \sqrt{P} dx\right) + \frac{D}{P^{\frac{1}{4}}} \exp\left(-\int_{x_0}^x \sqrt{P} dx\right) \quad (3)$$

ただしここで $\epsilon = 1$ とした³。

境界条件をみたすように C, D, E を決めたい。ここで境界条件はもともとの $\psi(\pm\infty, E) = 0$ とするより、

$$\psi(+\infty, E) = 0, \psi(0, E) = 0 \quad \text{または} \quad \psi(+\infty, E) = 0, \psi'(0, E) = 0$$

と採っておく方が便利である。

2.2 Stokes 幾何

定義 2. 次を満足する x を結んでできる曲線を変わり点 x_0 から生じる Stokes 曲線という。

$$\Im \int_{x_0}^x \sqrt{P} dx = 0$$

同様に次の x を結んでできる曲線を変わり点 x_0 から生じる反 Stokes 曲線という。

$$\Re \int_{x_0}^x \sqrt{P} dx = 0$$

よって x_0 から生じる反 Stokes 曲線が原点を通過していれば (3) の第一項と二項が相殺し合って原点で $\psi(x, E) = 0$ となる可能性がある。また x_0 から生じる Stokes 曲線が $+\infty$ を通るならば (3) の第一項、または二項をゼロとすれば $x = +\infty$ で $\psi(x, E) = 0$ となる可能性がある。もちろん

²竹井氏の原稿も参照されたい。

³本稿で興味ある場合には ϵ はいつでも x, E の再定義 (Symanzik scaling) により ϵ を吸収することができるのでこうしても問題ない

ん実際にゼロにあるのを見るには C, D, E を調整する必要があるが、ともかく第一ステップとして素朴 WKB 法で行うべき事は Stokes 曲線と反 Stokes 曲線を書いてみる事、すなわち Stokes 幾何を調べてみる事である。 $P(x, E) = x^4 \pm 1$ ($E = \mp 1$) の例を図 1 にあげる。左の図を眺めると変わり点と原点が反 Stokes 曲線で、さらに同じ変わり点と無限遠が Stokes 曲線で結ばれているようなものがない。よって $E = -1$ は固有値になれないことがわかる⁴。

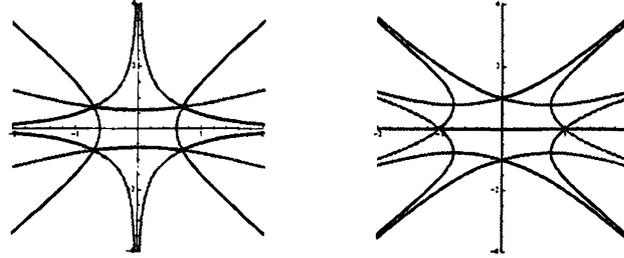


図 1: Stokes 曲線と反 Stokes 曲線。左は $P(x, E) = x^4 + 1$ ($E = -1$)、右は $P(x, E) = x^4 - 1$ ($E = 1$) のもの。

2.3 Stokes 現象

定義 3. Stokes 曲線を横切るとき ψ_d が ψ_{sub} に応じて不連続に変化することを Stokes 現象という。またとびを特徴づける τ を Stokes 係数という。

変わり点 x_0 に対して反時計回りに Stokes 曲線を横切るとき

$$\psi_d \rightarrow \psi_d + \tau \psi_s$$

$$\psi_s \rightarrow \psi_s$$

と変化する。時計回りに Stokes 曲線を横切るときは上で τ を $-\tau$ とすればよい。

注意 1. 反 Stokes 曲線を横切るとき *dominant* 解と *subdominant* 解が入れ替わる。すなわち $\psi_d \leftrightarrow \psi_s$ 。

⁴右図では実軸上の変わり点と原点が反 Stokes 曲線で、無限遠が Stokes 曲線で結ばれているが、だからといって $E = 1$ が固有値であるとは結論できない。

以下 τ が得られたとして (すなわち隣接する角領域間での接続問題が解けているとして) $V(x) = x^4$ の場合の大域的接続問題、および固有値問題を考えてみる。この場合、変わり点は $E > 0$ として $\pm E^{\frac{1}{4}}, \pm iE^{\frac{1}{4}}$ の 4 点あり、それぞれから Stokes、反 Stokes 曲線が三本ずつ生じている。このうち変わり点として $z_0 = E^{\frac{1}{4}}$ に注目して正の実軸を含む領域 1 から波動関数を考える (図 2)。

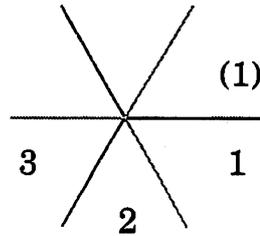


図 2:

$(z_0, z) := P^{-\frac{1}{4}} \exp(\int_{z_0}^z P^{\frac{1}{2}} dz)$ とかくことにすると領域 1 での解は

$$(z, z_0)_s \quad \text{領域 1}$$

で与えられる。下付き添字はこの解が subdominant であることを強調するためにつけた。領域 2 に行くためには反 Stokes 曲線をわたるので領域 2 での波動関数は

$$(z, z_0)_d \quad \text{領域 2}$$

となる。次に領域 2 から領域 3 に行くためには Stokes 曲線を時計回りに横切るので領域 3 での波動関数は次で与えられる。

$$(z, z_0)_d - \tau(z_0, z)_s \quad \text{領域 3}$$

よって原点は 3 の実軸上にあるのでここで $\psi(z=0, E) = 0$ なる境界条件を課すと

$$(0, z_0)_d - \tau(z_0, 0)_s \Rightarrow \exp\left(2 \int_0^{z_0} P^{\frac{1}{2}} dz - i\frac{\pi}{2}\right) = \tau/i \quad (4)$$

を得る。ここで $\tau = i$ ならばこれは Bohr-Sommerfeld の量子化条件に一致し、半古典的なエネルギー固有値を決める。

このように Stokes 係数を評価する事は大変重要なステップとなる。次のセクションでは $P(x)$ が多項式で与えられる場合に Stokes 係数が満足する広田・三輪型の代数式について論じる。

2.4 Stokes 係数の満足する代数式

$P(x) = x^{2M} + a_1 x^{2M-1} + \dots + a_{2M}$ とする。ただし $M \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $E = -a_{2M}$ である。角領域 S_j を次で定義する (図 3)⁵。

$$S_j := \left\{ x \mid \left| \arg x - \frac{j}{M+1} \pi \right| < \frac{\pi}{2(M+1)} \right\}$$

複素平面上に $2M$ 個の変わり点が存在するがそれ原点につぶしてしまう

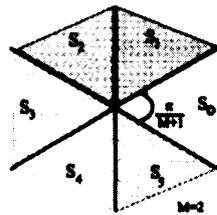


図 3:

と角領域の境界線は漸近的に反 Stokes 曲線と一致する。 $\phi(x, \{a_n\}, E)$ を S_0 における subdominant 解とする。すなわち ϕ は漸近的に次のように振る舞う。

$$\phi \sim \frac{x^{-\frac{M}{2}}}{\sqrt{2i}} \exp\left(-\frac{x^{M+1}}{M+1}\right) \quad |x| \gg 1, x \in S_0.$$

定義 4. $q = \exp\left(\frac{\pi}{M+1}i\right)$ に対して次を定義する。

$$y_j := q^{\frac{j}{2}} \phi(q^{-j}x, \{q^{(2M+2-n)j} a_n\}, E q^{2j}) \quad (5)$$

このとき簡単に次の補題が示される。

補題 1. y_j, y_{j+1} は S_j での基本解の系であり、 y_j は subdominant 解、 y_{j+1} は dominant 解となる。また

$$W[y_j, y_{j+1}] := \det \Phi_j \quad \Phi_j := \begin{pmatrix} y_j & y_{j+1} \\ \partial y_j & \partial y_{j+1} \end{pmatrix}$$

とすると $W[y_j, y_{j+1}] = 1$ である。

⁵この例に対する詳細な分析は [3] にある。

ここで S_j における基本解の系と S_{j+p} における基本解の系をつなぐ接続行列を $\mathcal{M}_{j+p,j}$ とする。

$$\Phi_j = \Phi_{j+p} \mathcal{M}_{j+p,j} \quad p \geq 1.$$

$\mathcal{M}_{j+p,j}$ を具体的に次のようにパラメトライズしておく。

$$\mathcal{M}_{j+p,j} := \begin{pmatrix} \tau_j^{(p)} & \eta_j^{(p)} \\ \zeta_j^{(p)} & \delta_j^{(p)} \end{pmatrix} \quad (6)$$

特に $p=1$ では次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_j^{(1)} &= W[y_j, y_{j+2}] \quad (:= \tau_j) & \eta_j^{(1)} &= W[y_{j+1}, y_{j+2}] = 1 \\ \zeta_j^{(1)} &= -1 & \delta_j^{(1)} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

S_j と S_{j+1} の基本解の間の線形関係は定義より

$$y_{j+2} = \tau_j y_{j+1} - y_j$$

である。これは Stokes 現象を表しており、 τ_j はそこでの Stokes 係数と同一視される。そこで $\tau_j^{(p)}$ は一般化された Stokes 係数と解釈できる。

本来は y_j 達が知るべき波動関数である。しかし発想を逆転して、 y_j 達は既にわかっているとして、それらで $\tau_j^{(p)}$ 達を表してみる。具体的には次のようになる。

$$\begin{aligned} \tau_j^{(p)} &= W[y_j, y_{j+p+1}] & \eta_j^{(p)} &= W[y_{j+1}, y_{j+p+1}] = \tau_{j+1}^{(p-1)} \\ \zeta_j^{(p)} &= -W[y_j, y_{j+p}] = -\tau_j^{(p-1)} & \delta_j^{(p)} &= -W[y_{j+1}, y_{j+p}] = -\tau_{j+1}^{(p-2)} \end{aligned}$$

すなわちすべて $\tau_j^{(p)}$ で表されることが明らかになる。

ここで恒等式

$$W[y_\alpha, y_\beta] W[y_\gamma, y_\delta] = W[y_\alpha, y_\gamma] W[y_\beta, y_\delta] + W[y_\alpha, y_\delta] W[y_\gamma, y_\beta]$$

を用いれば一般化された Stokes 係数の間に、次の広田・三輪型の方程式が成立することが結論される。

$$\tau_j^{(k)} \tau_{j+1}^{(k)} = \tau_j^{(0)} \tau_{j+k+1}^{(0)} + \tau_j^{(k+1)} \tau_{j+1}^{(k-1)} \quad (8)$$

2.5 接続問題と固有値問題

(8) を用いてどのように Stokes 係数を評価するかはとりあえずおいて、Stokes 係数が得られたとして (4) の類似を考えてみる。

S_0 と S_{M+1} がそれぞれ、正の実軸、負の実軸をふくむ角領域であるから Φ_0 と Φ_{M+1} の接続問題 $\Phi_0 = \Phi_{M+1} \mathcal{M}_{M+1,0}$ を考えればよい。(6) を使えば、 S_0 での境界条件を満たす y_0 は S_{M+1} の基本解でつぎのように書ける。

$$y_0 = \tau_0^{(M+1)} y_{M+1} + \zeta_0^{(M+1)} y_{M+2}$$

$\pm\infty$ の両方の境界条件を満たすためには実軸上での波動関数 ψ は

$$\psi(x, E_n) \propto y_0, x \in S_0 \quad \psi(x, E_n) \propto y_{M+1}, x \in S_{M+1}$$

を同時に満たさねばならないので $\zeta_0^{(M+1)}(E_n) = \tau_0^{(M)}(E_n) = 0$ が結論される。

すなわち次の ohr-Sommerfeld の量子化条件の厳密版が得られる。

命題 1. $\tau_0^{(M)}(E) = 0$ が固有値を定める。

3 ODE/IM 対応

前セクションでみたように、Stokes 係数を求める事は重要な問題である。しかし (8) を一般に解くことは難しいだろう。ここではこれが解ける特殊な状況を考える。そしてこの場合に、可積分系とのつながりが生じる。

単項のベキポテンシャルを考え、 $P(x) = x^{2M} - E$ とする。つまりセクション 2.4 で $a_n = 0 (n \neq 2M)$ とする。この場合、Stokes 係数は E にしか依存しない。また (5) と (7) をみればわかるように、添字 j に対する Stokes 係数は $j = 1$ のもので $E \rightarrow Eq^{2j}$ してやればよい。定義よりすぐ知れる $\tau_j^{(0)} = 1$ を用い

$$T_j(u) = \tau_j(Eq^{-j-1}) \quad E = \exp\left(\frac{\pi u}{M+1}\right) \quad (9)$$

とすれば (8) は次の式に変換される。

$$T_j(u+i)T_j(u-i) = 1 + T_{j+1}(u)T_{j-1}(u) \quad 1 \leq j \leq 2M$$

ただし $T_0(u) = 1$ と定義した。また $y_{2M+1} = -y_1$ より $T_{2M}(u) = 1, T_{2M+1} = 0$ である。これは可積分な統計力学モデルや場の理論に現れる $U_q(sl_2)$ 型の T-system と呼ばれる関数方程式である [4]。

ここでさらに $Y_j(u)$ ($1 \leq j \leq 2M - 1$) を $Y_j(u) = T_{j-1}(u)T_{j+1}(u)$ で導入すると関数方程式は Y-system とよばれる式に変換される。

$$\frac{Y_j(u+i)Y_j(u-i)}{Y_{j-1}(u)Y_{j+1}(u)} = \left(1 + \frac{1}{Y_{j-1}(u)}\right) \left(1 + \frac{1}{Y_{j+1}(u)}\right) \quad 1 \leq j \leq 2M - 1$$

ただし $Y_0 = Y_{2M} = 0$ と解釈する。一般にはこの関数方程式だけでは $Y_j(u)$ を、そして $T_j(u)$ を決定する事はできないが上の可積分系における模型では次の「良い解析性」により関数方程式を積分方程式に変換する事が可能である。

Conjecture 1. $\log Y_\ell(u)$ ($\log(1 + Y_\ell(u))$) は $\Im u \in [-1, 1]$ ($[-0^+, 0^+]$) の領域で、非ゼロ、解析的である。

現在のところ、これは証明されていないが、様々な証拠から正しいと信じられている。conjecture 1 を認めればフーリエ変換を用いれば Y-system より次の積分方程式⁶を得る。

$$\begin{aligned} \log Y_\ell(\theta) &= m_\ell \operatorname{Re} \theta + \sum_{\ell'=1}^{2M-1} \int_{-\infty}^{\infty} F_{\ell, \ell'}(\theta - \theta') \log\left(1 + \frac{1}{Y_{\ell'}(\theta')}\right) d\theta' \\ m_\ell &= m_1 \frac{\sin \frac{\pi \ell}{2M}}{\sin \frac{\pi}{2M}} \end{aligned} \quad (10)$$

ただし $\theta = \frac{\pi u}{2M}$ とした。また $F_{\ell, \ell'}$ の具体形は省略する。

これは IM における $Y_j(u)$ を決定する式となる。さて問題は ODE から構成される Y_j が Conjecture 1 の解析性をもつか? ということであるが、数値的にあたってみると確かに満たされていることがチェックできる。そこで m_0 を適当に調整する事により (10) は ODE に現れる $Y_j(u)$ を、そして $T_j(u)$ を決定することになる。固有値を E_n とすると命題 1 と (9) より $T_M(-E_n) = 0$ である。そこで E_n に対応する θ を θ_n であらわすと $T_M(-E_n) = 0$ は

$$\log Y_M(\theta_n + \frac{\pi}{2}i) = (2I_n + 1)\pi i \quad (11)$$

⁶可積分系で Thermodynamic Bethe Ansatz 方程式と呼ばれる

と同値であり、式 (10) の左辺に代入して固有値を決める積分方程式が求まる。簡単のため (10) で convolution の項を落としてみる。この近似で $E = \exp(\frac{\pi u}{M+1}) = \exp \frac{\theta}{\mu} (\mu = \frac{M+1}{2M})$ に注意すると (11) は次のように Bohr-Sommerfeld の量子化条件で書ける。

$$bE^\mu = (2I_n + 1) \quad b = m_M R$$

これにより dconvolution の項が Bohr-Sommerfeld の量子化条件に対する「厳密な補正」を与えている事がわかる。

以上、簡単な $P(x)$ の場合、 $U_q(sl_2)$ に対応する T-system, Y-system が現れ、接続問題および固有値問題の定量的解析に用いる事ができることを見てきた。

後者におけるリー代数に基づく拡張は具体的に知られている。そこで ODE の方にも対応する拡張を期待するのは自然な発想であろう。実際、古典型 (ABCD) に対してつぎの integro-differential 方程式が対応物として提案されている [5]。

$$\begin{aligned} A_{n-1} \quad & \left((-1)^n D_n(\mathbf{g}) - P_K(x, E) \right) \psi(x, E, \mathbf{g}) = 0 \\ D_n \quad & \left(D_n(\mathbf{g}^\dagger) \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} D_n(\mathbf{g}) - \sqrt{P_K(x, E)} \left(\frac{d}{dx} \right) \sqrt{P_K(x, E)} \right) \psi(x, E, \mathbf{g}) = 0 \\ B_n \quad & \left(D_n(\mathbf{g}^\dagger) D_n(\mathbf{g}) + \sqrt{P_K(x, E)} \left(\frac{d}{dx} \right) \sqrt{P_K(x, E)} \right) \psi(x, E, \mathbf{g}) = 0 \\ C_n \quad & \left(D_n(\mathbf{g}^\dagger) \left(\frac{d}{dx} \right) D_n(\mathbf{g}) - P_K(x, E) \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} P_K(x, E) \right) \psi(x, E, \mathbf{g}) = 0 \end{aligned}$$

ただし D_n, P_K は次で定義される。

$$D_n(\mathbf{g}) = D(g_{n-1} - (n-1)) \dots D(g_0), \quad P_K(E, x) = (x^{h^\vee M/K} - E)^K$$

4 結語

ODE/IM 対応に関して、ごく簡単に論じてきた。残念ながら現在のところ、その根本的な理解が得られているとは云いがたい。実際上にあげた ABCD 型の拡張は、難問に対する対処のひとつである、“if you can not solve it, generalize it!” の趣がある。近い将来の本質の解明を期待したい。

参考文献

- [1] P. Dorey, C. Dunning, R. Tateo, The ODE/IM Correspondence, *J. Phys. A: Math. Theor.* **40** (2007), R205–R283.
- [2] 河合隆裕, 竹井義次著, 「特異摂動の代数解析学」岩波書店 (2008)
- [3] Y. Sibuya: Global theory of second order linear ordinary differential operator with a polynomial coefficient, *Mathematics Studies* 18 (North-Holland 1975).
- [4] A. Kuniba, T. Nakanishi, J. Suzuki, T-systems and Y-systems in integrable systems, *J. Phys. A: Math. Theor.* Topical review, to appear.
- [5] P. Dorey, C. Dunning, D. Masoero, J. Suzuki, R. Tateo, Pseudo-differential equations, and the Bethe Ansatz for the classical Lie algebras *Nucl. Phys.* **B772** (2007), 249–289.