

# ランダムな方向反転を伴う単純排他過程の流体力学極限

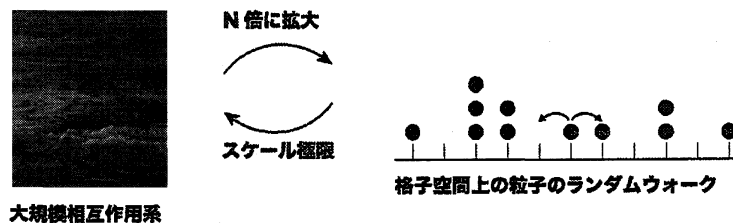
東京大学大学院数理科学研究科 佐々田 槇子

Graduate School of Mathematical Sciences, The University of Tokyo

## 1 Introduction

流体力学極限は、統計物理学を数学的に厳密に基礎付ける重要な手法の一つである。統計物理学は、原子や分子といったミクロな系の性質から、その系のマクロな性質を導出するための理論である。ここでミクロな系として考察の対象となる系は、一般に非常に多くの自由度、または構成要素を持ち、複雑な相互作用をしながら時間発展しており、大規模相互作用系と呼ばれる。統計物理学の数学的な基礎付けには、大数の法則をはじめとした確率解析に基づく大規模相互作用系の研究が大きな役割を果たしている。特に、ミクロな系の時間発展を表す確率過程を、時間と空間について適切なオーダーの比でスケール変換をし、スケーリングパラメータに極限操作を行い、大規模相互作用系の局所平衡による平均化を示すことで、マクロなパラメータが従う時間発展方程式を導出する手法は、流体力学極限と呼ばれている。この手法の本質的なアイディアは、大規模相互作用系は、その性質ゆえに、マクロな（少数の）パラメータで特徴づけられる平衡状態を持ち、さらにその平衡状態を特徴づけるパラメータは時空間の各点で異なり（局所平衡状態）、それが滑らかに連なって全体として平均化していく、という描像にある。

本稿では、格子気体モデルの中でも最もシンプルで多くの研究がなされている排他過程 (exclusion process) の流体力学極限について、最近得た結果を報告する。第 2、3 章では、排他過程の最も代表的で単純な例である、対称単純排他過程 (Symmetric Simple Exclusion Process) と完全非対称排他過程 (Totally Asymmetric Simple Exclusion Process) についての先行結果を紹介する。第 4 章では、これら二つの例の中間物と考えられる、ランダムな方向反転を伴う排他過程を導入し、その流体力学極限についての結果を報告する。また極限方程式として得られる非線形拡散方程式の性質について得られた結果、数値シミュレーションにより得られた予想を報告する。さらに、本研究の今後の展望についても述べる。



格子気体モデルの流体力学極限のアイディア

## 2 対称単純排他過程 (Symmetric Simple Exclusion Process)

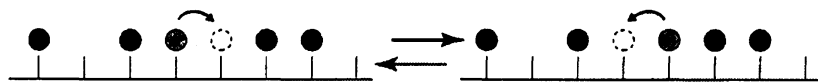
### 2.1 設定

$d$ 次元格子空間  $\mathbb{Z}^d$  上を互いに排他的な相互作用をしながら移動する粒子の系を考える。特に  $\mathbb{Z}^d$  の各点  $x$  には、粒子は高々一つしか存在できないものとする。この時、系の状態空間は  $\chi_N^d := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  となる。このように排他的な相互作用をする粒子の配置により与えられる相互作用粒子系は、総称して排他過程とよばれる。状態空間の元を、 $\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \chi_N^d$  で表す。すなわち、 $\eta_x$  は、状態  $\eta$  のときの場所  $x$  の粒子の数を表す。



$d = 1$  の粒子の配置 (状態空間の元) の例

### 2.2 時間発展規則



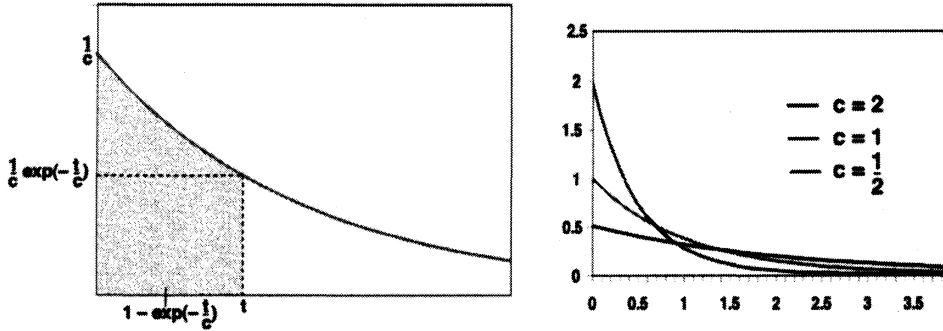
時間発展の様子：可逆である

対称単純排他過程の時間発展規則は、次のように説明される。ただし、より厳密な定義は 2.4 節で述べる。

- 各粒子は期待値 1 の指数分布に従う、独立な時計 (待ち時間) を持つ
- いずれかの粒子の時計が鳴ると、その粒子は隣接点の中から確率  $\frac{1}{2d}$  で行き先を一つ選ぶ
- 排他規則にしたがい、選んだ行き先に粒子がいなかった場合のみ粒子はそこに移動する
- 時計は全てリセットされ、次の (いずれかの粒子の) 時計が鳴るのを待つ

### 2.3 指数分布

ここで、指数分布の定義を述べておく。 $X$  を期待値  $c$  (頻度を表す指数は  $1/c$ ) の指数分布に従う確率変数とすると、その累積分布関数は  $P(X \leq t) = 1 - \exp(-\frac{t}{c})$ 、確率密度関数は  $P(X \in dt) = \frac{1}{c} \exp(-\frac{t}{c})$  である。



指数分布の確率密度関数のグラフ

## 2.4 時間発展の数学的な定義

この節では、対称単純排他過程の厳密な定義を述べる。状態空間は  $\chi_N^d = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$  であった。対称単純排他過程  $\eta(t)$  は  $\chi_N^d$  上のマルコフ過程で以下の生成作用素  $L_N$  により定まるものとして定義される。

$$(L_N f)(\eta) = \frac{1}{2d} \sum_{x, y \in \mathbb{Z}^d, |x-y|=1} 1_{\{(\eta_x, \eta_y) = (1, 0)\}} (f(\eta^{x, y}) - f(\eta))$$

ここで、 $f: \chi_N^d \rightarrow \mathbb{R}$ 、 $|x - y| := \sum_{i=1}^d |x_i - y_i|$ 、

$$\eta_z^{x, y} = \begin{cases} \eta_z & \text{if } z \neq x, y, \\ \eta_y & \text{if } z = x, \\ \eta_x & \text{if } z = y, \end{cases}$$

とする。このマルコフ過程がきちんと定義されることは [3] 等に述べられている。

## 2.5 不変測度の特徴づけ

流体力学極限の証明において、最初の重要なステップが不変測度の特徴づけである。単純対称排他過程は、粒子数、または粒子の密度を唯一つの保存量として持ち、これが平衡状態を特徴づけるマクロなパラメータとなる。実際、平行移動普遍的な不変測度は、粒子の密度  $\rho$  で特徴付けられたベルヌーイ測度の直積測度の重ね合わせとなる。

そこで、粒子の密度分布に関するマクロな時間発展方程式を導出するため、経験測度  $\pi_t^N$  をミクロな系に **diffusive scaling** でスケール変換を施した  $d$  次元トーラス上の粒子の密度分布として次のように定義する:

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N^d} \sum_{x \in \mathbb{T}_N^d} \eta_x(N^2 t) \delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$$

ここで、 $\mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$  は  $\mathbb{R}^d$  上の測度の集合とする。すなわち、 $\mathbb{R}^d$  上の粒子の密度分布を  $\mathbb{R}^d$  上の測度と考えている。

## 2.6 対称単純排他過程に対する流体力学極限

**Theorem 1.** ([1] 等)

ある可測関数  $\rho_0 : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$  が存在し、

$$\pi_0^N(du) \rightarrow \pi_0(du) = \rho_0(u)du \quad N \rightarrow \infty \quad \text{in prob}$$

であると仮定する。このとき、任意の時刻  $t > 0$  で、

$$\pi_t^N(du) \rightarrow \pi_t(du) = \rho(t, u)du \quad N \rightarrow \infty \quad \text{in prob}$$

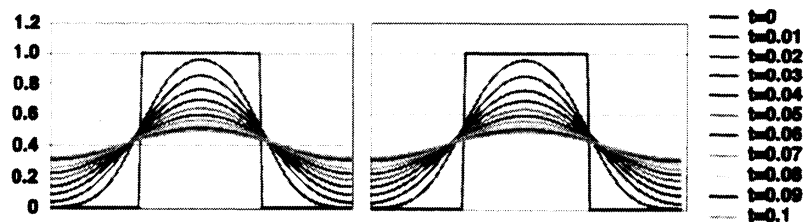
が成り立つ。ただし、 $\rho(t, u)$  は以下の熱方程式の一意解とする：

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, u) = \frac{1}{2d} \Delta \rho(t, u) \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

ここで、in prob は確率収束の意味である。すなわち、この定理は、初期時刻の経験測度の分布が、ある deterministic な関数を密度とする測度に収束していると仮定すると、時間発展したあとの経験測度も、ある deterministic な関数を密度とする測度に収束し、さらに、その関数は熱方程式の解となっている、ということを主張している。この定理の持つ重要な意義の一つは、ランダムなミクロな系から決定論的なマクロな時間発展を導出している点である。また、可逆なミクロな系から非可逆なマクロな時間発展を導出しているという点も重要な結果である。

## 2.7 数値シミュレーション

この節では、単純対称排他過程に対する流体力学極限の主張が成り立っていることを、数値シミュレーションにより確認する。以下の数値シミュレーションは、1次元トーラス  $\mathbb{T} = [0, 1)$  上で行った。ただし流体力学極限は、トーラス上でも成り立つことが知られている。



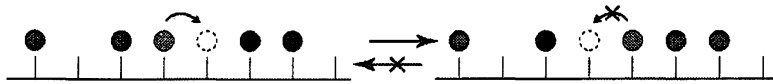
左の図は初期分布  $\rho_0(\cdot) = 1_{[0.3, 0.7]}(\cdot)$  に対する熱方程式の各時刻  $t$  での厳密解、右図は単純対称排他過程を  $N = 100$  で 500 万回シミュレーションした結果の、各時刻  $t$  での、各場所に粒子の存在した割合を表した図である。この結果から、経験測度の期待値が熱方程式の解で定まる測度に収束している様子がわかる。

### 3 モデル例 2：非対称単純排他過程

この章では、非対称単純排他過程の流体力学極限について知られている結果を簡単に述べる。ここで重要な点は、時空間変数に対するスケールリングが、対称単純排他過程とは異なることである。

#### 3.1 モデル

1次元格子空間  $\mathbb{Z}$  上を互いに排他的な相互作用をしながら移動する粒子の系を考える。すなわち、系の状態空間は  $\chi_N := \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$  となる。状態空間の元を、前章と同様に  $\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbb{Z}} \in \chi_N$  で表す。



時間発展の様子：非可逆である

非対称単純排他過程の時間発展規則は、次のように説明される：

- 各粒子は期待値 1 の指数分布に従う、独立な時計（待ち時間）を持つ
- いずれかの粒子の時計が鳴ると、その粒子は右隣に移動しようとする
- 排他規則にしたがい、右隣に粒子がいなかった場合のみ粒子はそこに移動する
- 時計は全てリセットされ、次の（いずれかの粒子の）時計が鳴るのを待つ

数学的には、非対称単純排他過程  $\eta(t)$  は  $\chi_N$  上のマルコフ過程で以下の生成作用素  $L_N$  により定まるものとして定義される。

$$(L_N f)(\eta) = \sum_{x \in \mathbb{Z}} 1_{\{(\eta_x, \eta_{x+1}) = (1, 0)\}} (f(\eta^{x, x+1}) - f(\eta))$$

ここで、 $f: \chi_N \rightarrow \mathbb{R}$ 、

$$\eta_z^{x, y} = \begin{cases} \eta_z & \text{if } z \neq x, y, \\ \eta_y & \text{if } z = x, \\ \eta_x & \text{if } z = y, \end{cases}$$

とする。このマルコフ過程がきちんと定義されることは [3] 等に述べられている。

#### 3.2 流体力学極限

非対称単純排他過程も、**粒子数**、または粒子の密度が唯一つの保存量となる。そこで、粒子の密度分布のマクロな時間発展方程式を導出することが目標となる。ここで、この系は、右方向への粒子の流れがあるため、マクロな現象をみるためのスケールリングが異なる。

$\pi_t^N$  をミクロな系に **hyperbolic scaling** でスケール変換を施した  $\mathbb{R}$  上の粒子の密度分布とする:

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_x(Nt) \delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$$

非対称単純排他過程については、解のクラスについての検討が必要となるが、ある条件のもとで、次のことが知られている ([4])。初期分布  $\pi_0^N(du)$  がある可測関数により与えられる  $\rho_0(u)du$  に確率収束するならば、任意の時刻  $t > 0$  で、 $\pi_t^N(du)$  は  $\rho(t, u)du$  に確率収束する。ただし、 $\rho(t, u)$  は次の Burgers 方程式の唯一つのエントロピー解とする:

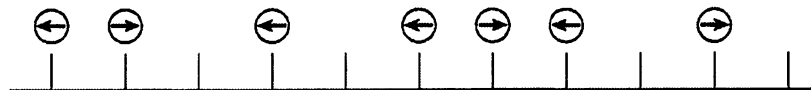
$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, u) = \partial_u \{ \rho(t, u)(1 - \rho(t, u)) \} \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

## 4 ランダムな方向反転を伴う単純排他過程

この章では、ランダムな方向反転を伴う単純排他過程を導入し、その流体力学極限と、その極限方程式の性質について述べる。また、数値シミュレーションから得られる予想とその意味についても述べる。

### 4.1 設定

本章では、境界条件についての問題を避けるため、トーラス上での粒子系を考える。 $\mathbb{T}_N := (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}) = \{0, 1, \dots, N-1\}$ : 1次元離散トーラスとする。各粒子は  $+1$  または  $-1$  の速度を持つものとする。これは、粒子の移動の向きを表すものである。また粒子同士は排他的な相互作用をするものとする。このとき、状態空間は、 $\chi_N := \{1, 0, -1\}^{\mathbb{T}_N}$  で与えられる。状態空間の元を  $\omega = (\omega_x)_{x \in \mathbb{T}_N} \in \chi_N$  で表すこととする。



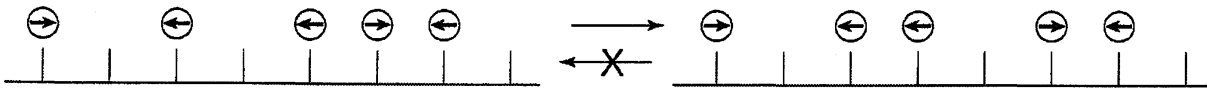
速度を持った粒子の配置の例

ここで、 $\eta_x := (\omega_x)^2$  とする。 $\eta = (\eta_x)_{x \in \mathbb{T}_N} \in \{0, 1\}^{\mathbb{T}_N}$  は粒子の有無だけを表す配置となる。

### 4.2 時間発展規則

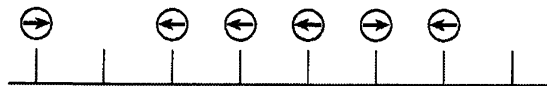
ランダムな方向反転を持つ排他過程の時間発展規則は次のように説明される:

- 各粒子は期待値 1 の指数分布に従う、独立な時計 (待ち時間) を持つ
- いずれかの粒子の時計が鳴ると、その粒子はその粒子が持つ速度の方向に移動しようとする
- 移動しようとした先に粒子がいなければ、粒子はそこに移動する



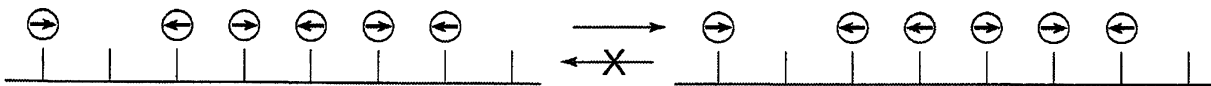
速度の向きに動いている例：非可逆

- 移動しようとした先に同じ速度の粒子がいれば移動はしない



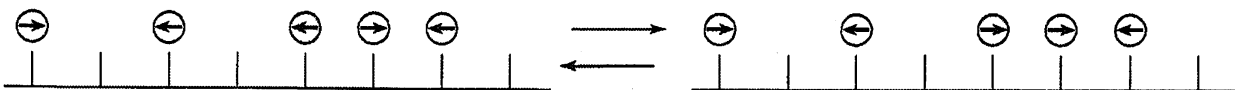
速度の向きの隣接点に同じ速度の粒子があるので動けない例

- 移動しようとした先に逆向きの速度の粒子がいれば両者は衝突して速度が入れ替わる



衝突して速度が入れ替わる例：逆向きの入れ替えは起きない（非可逆）

- 各粒子は期待値  $1/\gamma > 0$  (頻度は  $\gamma$ ) の指数分布に従う、独立な時計（待ち時間）を持つ。この時計が鳴ると、その粒子の速度は反転する。この時計は、移動に関するものとも独立である。（外部要因）



速度の反転の例：どちらの向きからも逆向きに変わる（可逆）

- 時計は全てリセットされ、次の（いずれかの粒子の）時計が鳴るのを待つ

### 4.3 時間発展の数学的な定義

この節では、ランダムな方向反転を伴う排他過程の厳密な定義を述べる。状態空間は  $\chi_N := \{1, 0, -1\}^{\mathbb{T}^N}$  であった。ランダムな方向反転を伴う排他過程  $\omega(t)$  は  $\chi_N$  上のマルコフ過程で以下

の生成作用素  $L_N$  により定まるものとして定義される。

$$(L_N f)(\omega) = \sum_{x \in T_N} 1_{\{\omega_x=1\}} (f(\omega^{x,x+1}) - f(\omega)) \\ + \sum_{x \in T_N} 1_{\{\omega_x=-1\}} (f(\omega^{x,x-1}) - f(\omega)) + \gamma \sum_{x \in T_N} (f(\omega^x) - f(\omega))$$

ただし、

$$\omega_z^{x,y} = \begin{cases} \omega_z & \text{if } z \neq x, y, \\ \omega_y & \text{if } z = x, \\ \omega_x & \text{if } z = y, \end{cases} \quad \omega_z^x = \begin{cases} \omega_z & \text{if } z \neq x, \\ -\omega_x & \text{if } z = x, \end{cases}$$

とする。

#### 4.4 3つのモデルの比較

この節では、これまでに導入した3つの過程の関係性（全て1次元で考える）について述べる。

まず、これら3つの過程は、排他的な相互作用のもとで、期待値1の指数分布に従う待ち時間のあとに移動する、という点で共通である。物理的には、動きやすさ（質量）が等しい粒子であると解釈できる。一方、移動の向き（速度）については、異なっている。対称単純排他過程では、各粒子は常に左右どちらかに確率1/2で動く。すなわち、各粒子に進行方向はない。これは、 $\gamma = \infty$ とした場合のランダムな方向反転を伴う排他過程に対応している。実際、 $\gamma = \infty$ とすると、各粒子は無限に頻繁に向きを変えるため、各粒子の速度の向きがわからない状態、すなわち常に左右に等しい確率で移動している状態であると考えられる。一方、非対称単純排他過程では、各粒子は常に右に動く。すなわち、全ての粒子は同じ向きの速度を持ち、その速度は変わらない、ということである。これは、 $\gamma = 0$ として、全ての粒子が同じ速度を持つ初期状態のもとのランダムな方向反転を伴う排他過程に対応する。最後に、( $\gamma > 0$ の場合の)ランダムな方向反転を伴う排他過程では、各粒子はそれぞれ固有の速度を持ち、その速度は衝突や外部要因により時間とともに変化する。

このように、それぞれの粒子の速度に関して3つの過程を比較すると、気体や流体のミクロな系のモデルとしては、ランダムな方向反転を伴う排他過程が最も現実的なものと考えられる。

まとめると、これら3つの過程の関係は以下のようなものである：

- 対称単純排他過程  
期待値1のランダムな待ち時間のあと、左右どちらかに等確率に進む：各粒子に進行方向はない ( $\gamma = \infty$ )
- 非対称単純排他過程  
期待値1のランダムな待ち時間のあと、必ず右に進む：全ての粒子が常に同じ進行方向 ( $\gamma = 0$ 、全ての粒子の初期速度が揃っている)
- ランダムな方向反転を伴う単純排他過程  
期待値1のランダムな待ち時間のあと、その粒子の進行方向に進む。各粒子の進行方向は衝突や外部要因により変化する ( $\gamma > 0$ )



#### 4.5 不変測度の特徴づけ

対称単純排他過程の場合と同様、まず不変測度の特徴づける。ランダムな方向反転を伴う排他過程においても、粒子数  $(\sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta_x)$  が唯一の保存量となる。外部要因を考慮しているため粒子の速度の和は保存されない。

粒子の密度  $\rho$  で特徴づけられる不変測度  $\nu_\rho$  は、各  $x \in \mathbb{T}_N$  に対し  $\nu_\rho(\omega_x = 1) = \nu_\rho(\omega_x = -1) = \rho/2$ 、 $\nu_\rho(\omega_x = 0) = 1 - \rho$  で与えられる直積測度となる。特に各不変測度（定常状態）のもとで、各粒子は等しい確率で速度  $+1$  または  $-1$  を持つ。すなわち、任意の局所平衡状態のもとで粒子の密度の流れはないため、**Diffusive scaling** での極限を考える。

$$\pi_t^N(du) = \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{T}_N} \eta_x(N^2 t) \delta_{\frac{x}{N}}(du) \in \mathcal{M}(\mathbb{T} := [0, 1])$$

特に、局所平衡状態では、粒子は”平均的に”左右に確率  $1/2$  で動くため、対称単純排他過程と同じようにふるまうようにみえる。このことから、マクロにも対称単純排他過程と同様に粒子の密度が熱方程式

$$\partial_t \rho(t, u) = \frac{1}{2} \Delta \rho(t, u)$$

に従って発展する、ということが推測される。しかし、実際には、ミクロな系の違い、すなわち各粒子がそれぞれ速度を持っていることが、マクロな時間発展にも影響していることが、流体力学極限の結果からわかる。

#### 4.6 流体力学極限

この節では、流体力学極限の結果を述べる。

**Theorem 2.** ([5]) ある可測関数  $\rho_0 : \mathbb{T} \rightarrow [0, 1]$  が存在し、

$$\pi_0^N(du) \rightarrow \pi_0(du) = \rho_0(u) du \quad N \rightarrow \infty \quad \text{in prob}$$

であるとする。このとき、任意の時刻  $t > 0$  で、

$$\pi_t^N(du) \rightarrow \pi_t(du) = \rho(t, u) du \quad N \rightarrow \infty \quad \text{in prob}$$

が成り立つ。ただし、 $\rho(t, u)$  は以下の非線形拡散方程式の一解とする：

$$\begin{cases} \partial_t \rho(t, u) = \partial_u \{ D^\gamma(\rho(t, u)) \partial_u \rho(t, u) \} \\ \rho(0, \cdot) = \rho_0(\cdot) \end{cases}$$

ただし、拡散係数  $D^\gamma(\rho)$  は変分公式により与えられる。

この拡散係数は、物理的には各密度での拡散のスピードを表す。これが、密度によらない定数のとき、拡散方程式は熱方程式となる。

#### 4.7 拡散係数 $D^\gamma(\rho)$ の性質

この節では、拡散係数を与える変分公式の評価について得られた結果を述べる。一般には、非勾配型の系に対する Diffusive scaling の流体力学極限の極限方程式に現れる拡散係数は変分公式で与えられ、その具体的な挙動についてはあまり知られていない。しかし、ここでは、この拡散係数が、密度  $\rho$  および外部要因の強さ  $\gamma$  にどのように依存しているのかを知ることが重要であると考え、その挙動を調べた。以下が、得られた結果である：

- 任意の  $\rho$  と  $\gamma$  に対し  $D^\gamma(\rho) > \frac{1}{2}$

このことから、密度、外部要因の強さに関わらず、対称単純排他過程に比べ、拡散が速く進むことがわかる。

- $\frac{1}{2} + \frac{1-\rho}{2\gamma} \leq D^\gamma(\rho) \leq \frac{1}{2} + \frac{2-\rho}{4\gamma}$

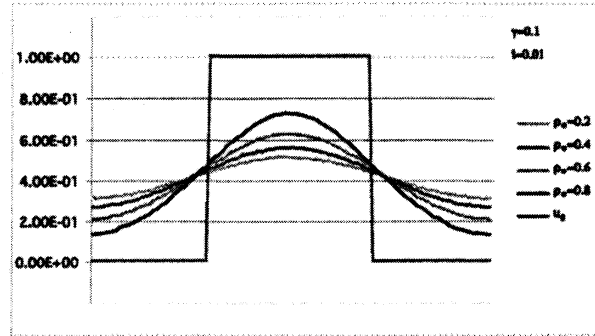
このことから、 $D^\gamma(\rho)$  は  $\rho$  について定数関数でないことがわかる。すなわち、得られた極限方程式は非線形拡散方程式である。また、 $D^\gamma(0) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\gamma}$  であることが得られる。特に、対称単純排他過程の拡散係数との差は方向反転の待ち時間の期待値に比例することがわかる。この密度 0 での拡散係数は、Z 上を動く一粒子の動きを Diffusive scaling でスケールリングして得られるブラウン運動の時刻 1 での分散に一致する。さらに、 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} D^\gamma(\rho) = \infty$  for  $\rho \in [0, 1)$ 、 $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} D^\gamma(\rho) = \frac{1}{2}$  for  $\rho \in [0, 1]$  となることもわかる。ここで、 $\gamma$  が 0 に近づく時、ミクロな系は非対称単純排他過程に近づくため、Diffusive scaling のもとでは、粒子の動きが非常に速くなり、極限では拡散係数が無限大になっている、と説明できる。一方、 $\gamma$  が  $\infty$  に近づく時、ミクロな系は対称単純排他過程に近づくため、拡散係数も、対称単純排他過程の拡散係数である、定数  $1/2$  に近づく、と説明できる。

#### 4.8 数値シミュレーションによる予想

この節では、数値シミュレーションから得られた、物理的に重要な二つの予想を述べる。

- 予想 1 :  $D^\gamma(\rho)$  は  $\rho$  の関数として単調減少

以下は、次のようなシミュレーションの結果である。まず、 $u_0(\cdot) = 1_{[0.3, 0.7]}(\cdot)$ 、 $\rho^*$  を任意の密度とする。初期分布  $\rho_0(\cdot) = \frac{1}{10}u_0(\cdot) + \rho^*$  のもとで、時刻  $t$  での分布  $\rho_t(\cdot)$  をシミュレーションにより求める。次に  $\rho_t(\cdot) = \frac{1}{10}u_t(\cdot) + \rho^*$  の式で、 $u_t$  を計算する。これを  $\rho^* = 0, 2, 4, 6, 8$  について行い、 $u_t$  のグラフを描いたものが以下の図である。これは、各密度の近くで拡散係数は定数に近いと考えられることから、それぞれの密度の近くでの拡散の様子を正規化して比べたものとなる。この図から、密度が小さくなると、拡散が速くなっていることがわかる。実際には、このシミュレーションは、様々な初期分布、密度によって行った。

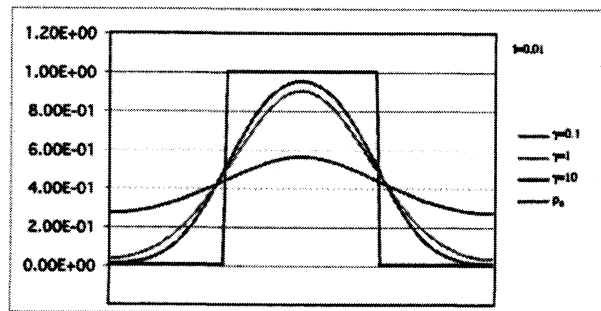


$u_t$  のグラフ

この予想は、物理的に非常に重要な意義を持つ。密度が低くなれば、粒子の動ける部分が大きくなり、結果的に拡散が速くなることは自然に予想されることであり、実際の現象としても知られていることであるが、これは対称単純排他過程のようなモデルからは説明できなかった。すなわち、ミクロなモデルの時間発展規則にあらかじめ密度に依存して粒子の移動が速くなるような要素がないモデルからの導出が行われたことが、非常に重要な点である。各粒子が固有の速度を持つ、という要素を加えたことによって、対称単純排他過程とは異なるマクロな性質が現れたのである。

- 予想2： $D^\gamma(\rho)$  は  $\gamma$  の関数として単調減少

以下の図は、初期分布  $\rho_0(\cdot) = 1_{[0.3, 0.7]}(\cdot)$  のもとの、 $\gamma = 0.1, 1, 10$  の場合の時刻 0.1 での密度分布をシミュレーションにより得たものである。このシミュレーションも、実際は、より様々な初期分布、 $\gamma$  で行っている。



この結果から明らかなように、 $\gamma$  が大きくなるほど、拡散は遅くなる。これは、ミクロな系のモデルからも容易に想像されることである。すなわち、外部要因が強く働くことで、粒子は頻繁に速度を変え、その結果遠くまで進むのに時間がかかることになる。

## 4.9 まとめ

この節では、ランダムな方向反転を伴う排他過程の流体力学極限の研究により得られた結果の意義を、箇条書きにしてまとめる。

- 平衡状態の”期待値”には現れない方向反転の効果が、マクロなレベルにも現れることを示

した

- 変分公式で与えられる拡散係数のふるまいについて一定の評価式を得た
- 拡散係数の  $\gamma$  に関する漸近的なふるまいが、ミクロな系の漸近的なふるまいと一致することを示した
- シミュレーションによって密度の関数としての拡散係数のふるまいについて、興味深い予想を得た

#### 4.10 今後の展望と課題

本研究の今後の課題としては、次のようなものがある。

- シミュレーションから得られた予想を厳密に証明するための、拡散係数の評価の新しい手法の確立
- 高次元への拡張。特に、 $\rho = 1$  での拡散係数の  $\gamma \rightarrow 0$  での漸近的なふるまいが、次元によりことなることが予想される。この結果と非対称単純排他過程の揺らぎの性質との関連が興味深いテーマである。(参考 [6],[2])

#### 参考文献

- [1] A. DE MASI, N. IANIRO, A. PELLEGRINOTTI AND E. PRESUTTI, *A survey of the hydrodynamical behavior of many particle systems. Nonequilibrium Phenomena, II: From Stochastics to Hydrodynamics*, edited by J.L. Lebowitz and E.W. Montroll, Studies in Statistical Mechanics, Vol. 11. North-holland, Amsterdam, (1984), 123–294.
- [2] C. LANDIM, J. QUASTEL, M. SALMHOFER AND H.T. YAU, *Superdiffusivity of asymmetric exclusion processes in dimension one and two*, *Comm. Math. Phys.*, **244** (2004), 455–481.
- [3] T.M. LIGGETT, *Interacting Particle Systems*, 1985, Springer.
- [4] F. REZAKHANLOU, *Hydrodynamic limit for attractive particle systems on  $\mathbb{Z}^d$* , *Comm. Math. Phys.*, **140** (1991), 417–448.
- [5] M. SASADA, *Hydrodynamic limit for exclusion processes with velocity*, submitted.
- [6] M. SASADA, *Hydrodynamic limit for exclusion processes with velocity in random environment*, in preparation.