

## 微分体入門—付値理論による線形常微分方程式の研究

慶應義塾大学環境情報学部 西岡啓二 (Keiji Nishioka)  
Faculty of Environment and Information Studies,  
Keio University

### A. 微分方程式

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

は、 $F$  が  $y, y', \dots, y^{(n)}$  に関して多項式で、係数がある領域における  $x$  の正則関数であるとき、代数的微分方程式といわれる (Ritt による設定)。一般に解は  $x = x_0$  において初期値  $y = c_1, y' = c_2, \dots, y^{(n-1)} = c_n$  によって決定される。

$$y = \varphi(x, c_1, c_2, \dots, c_{n-1})$$

したがって、一般的な解は  $n + 1$  変数  $x, c_1, c_2, \dots, c_n$  の関数とみることができ  
る。  $c_1, c_2, \dots, c_n$  による解の表示を明示的に得ることが求積法のひとつの目的  
である。

例 もっとも簡単な例は

$$y' = 0$$

この解を定数という。一般的な解は任意定数とよばれる。

$$y' = a$$

この解を  $a$  の不定積分という。  $y_1$  をもうひとつの解とすると  $c$  を積分定数と  
して  $y = y_1 + c$  と書ける。

$$y' = ay$$

この解を  $a$  の指数積分という。  $y_1$  をもうひとつの解とすると  $c$  を積分定数と  
して  $y = cy_1$  と書ける。

J. Liouville は有理関数から出発して、不定積分、指数積分をとる操作と代数的操作を有限回ほどこすことによって得られる関数を初等関数論の類似として議論した。楕円積分がそのパラメータに関してこの意味の関数ではないことを Liouville は証明した。同様の手法で Airy 関数が Liouville の関数でないことが示される (Kaplansky)。

例 (Clairaut 方程式)

$$F(y', y - xy') = 0$$

$F$  は  $\mathbb{C}$  上既約多項式。微分して

$$y'' F_1(y', y - xy') + (-xy'') F_2(y', y - xy') = 0$$

$F_i$  は第  $i$  変数に関する偏微分。これより一般的な解は  $y'' = 0$  をみtas。よって

$$y = cx + d$$

ここで  $c, d$  は定数で  $F(c, d) = 0$  をみtas。一般的解は直線叢である。この包絡線から一般的解に属さない解、特異解が得られる。特異解の研究は Darboux に始まる。Ritt は任意定数の概念によらない方法で解空間を研究した。

例 (Riccati 方程式)

$$y' = ay^2 + by + c$$

3 個のことなる解  $y_1, y_2, y_3$  を用いれば

$$\frac{y - y_2}{y - y_3} \cdot \frac{y_1 - y_3}{y_1 - y_2} = c \text{ (定数)}$$

を得る。したがって  $y$  は  $c$  の一次分数関数で表される。

例 (線形斉次微分方程式)

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0$$

の解は、 $y_1, y_2, \dots, y_n$  を定数体上線形独立な特殊解とするとき、

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

と表される。 $c_i$  は定数である。この簡単な性質から、楕円関数やパンルヴェ関数が線形方程式の解で代数的に表示できないことが証明される。

B. A で述べたことは関数の収束性などを考慮しない、形式的な議論であることが分かる。そこで Ritt にしたがって、微分体の概念を導入する。

この講演内容の詳細についてはつぎの著書を参照してもらいたい：  
西岡久美子著「微分体の理論」(共立出版)

体  $K$  は微分作用素  $D$  とともに考えるとき、微分体とよばれる。 $D$  はつぎをみたす内部演算である。

$$D(a+b) = Da + Db, \quad D(ab) = D(a)b + aDb \quad (a, b \in K)$$

以下微分体の標数は 0 とする。微分拡大体や微分部分体が期待通りに定義される。 $R/K$  とかけば、 $R$  が  $K$  の微分拡大体であることを示すものと約束する。微分拡大体  $R/K$  の元  $y$  に対して  $K\langle y \rangle$  は  $y$  を含む  $K$  の微分拡大体で最小のものを表す。このとき、 $y$  を  $K\langle y \rangle$  の生成元という。

微分体  $K$  の定数体  $C_K$  は  $K$  に属す定数全体からなる(微分)部分体である。

$$C_K = \{c \in K \mid Dc = 0\}$$

変数  $Y_0, Y_1, \dots, Y_n$  に関する  $K$  上多項式

$$F = \sum_I a_I Y^I, \quad I = (i_j)_{0 \leq j \leq n}, \quad Y^I = \prod Y_j^{i_j} \quad (a_j \in K)$$

は  $K[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$  と書かれ、 $K$  上代数になる。 $Y = Y_0, Y_j = D^j Y$  と約束し

$$K\{Y\} = K[Y_0, Y_1, \dots] = \bigcup_{n=0}^{\infty} K[Y_0, Y_1, \dots, Y_n]$$

とすれば、 $K\{Y\}$  は  $K$  上代数であり、微分作用素  $D$  を内部演算とする。 $K\{Y\}$  は  $K$  上微分多項式環とよばれ、そこに属す多項式は  $K$  上微分多項式とよばれる。

$$F \in K[Y_0, Y_1, \dots, Y_n] \setminus K[Y_0, Y_1, \dots, Y_{n-1}] \quad (n \geq 1)$$

であるとき、 $F$  の階数は  $n$  であるといわれ、 $n = \text{ord}_Y F$  と書く。0 でない  $K$  の元の階数は 0 と約束する。

$F = \sum_I a_I Y^I \in K\{Y\}$  とする。ある微分拡大体  $R/K$  で、ある  $y \in R$  が

$$F(y) = \sum_I a_I y^I = 0$$

をみたすとき、 $y$  を (代数的微分) 方程式  $F = 0$  の解という。 $F$  は多項式として既約であるとする。もし、 $y$  が  $\text{ord}_Y F$  より低い階数のどの方程式もみたさないならば、 $y$  を  $F = 0$  の一般解 (の生成解) という。

一般解はいつでも存在する。簡単のため 1 階微分方程式  $F = 0$  の場合を考えよう。 $F(y, z) = 0$  によって  $K$  上 1 変数代数関数体  $K(y, z)$  をつくる。微分作用素  $D: K(y) \rightarrow K(y, z)$  を  $Dy = z$  によって定義する。 $K(y, z)$  は  $K(y)$  上代数的であるから  $D$  は  $K(y, z)$  にまで一意的に延長することができる。これによって  $K(y, z)/K$  が微分拡大体となる。 $y$  は  $F = 0$  の一般解である。

**C**  $R/K$  普通の意味の拡大体とする。つぎの条件をみたす  $\nu: R \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  を  $R/K$  の rank 1 の離散付値という。

- 1)  $\nu(ab) = \nu(a) + \nu(b)$  ( $a, b \in R$ )
- 2)  $\nu(a + b) \geq \min\{\nu(a), \nu(b)\}$  ( $a, b \in R$ )
- 3)  $\nu(a) = 0$  ( $a \in K$ ),  $\infty$  ( $a = 0$ )

$\nu(a) = 1$  なる元が  $R$  に存在するとき、 $\nu$  は正規化されているという。

$O = \{a \in R \mid \nu(a) \geq 0\}$  を  $R/K$  の付値環という。 $O \supset K$  である。

$P = \{a \in R \mid \nu(a) > 0\}$  は  $O$  の唯一の極大イデアルである。

$R/K$  を微分拡大体とする。 $R/K$  の付値環は一般に微分に関して閉じていない。 $R/K$  を 1 変数代数関数体とする。もし、すべての付値環  $O$  が微分に関して閉じている  $DO \subset O$  ならば、 $R/K$  は動く特異点をもたないといわれる (Matsuda による定義)。

$K$  が代数閉体で  $R/K$  は動く特異点をもたないと仮定する。このときつぎが成立する。 $R/K$  の種数を  $g$  によって表す。

- 1)  $g = 0$  のとき  $R = K\langle y \rangle$  と表される。 $y$  は  $K$  上 Riccati 方程式の解である。  
 2)  $g = 1$  のとき  $R = C_R$  または  $K\langle y \rangle$  と表される。 $y$  は  $K$  上方程式

$$(y')^2 = \lambda^2(4y^3 - g_2y - g_3) \quad (\lambda \in K^\times, g_2, g_3 \in C_K, g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0)$$

をみます。

- 3)  $g > 1$  のとき  $R = KC_R$  と表される。

3) は  $R$  が代数的に「解ける」ことを示している。

3) の逆が成り立つ。 $R = KC_R$  と表されるとき、 $R/K$  の付値環はすべて微分に関して閉じている。実際  $R = K(u, v)$  ( $u, v \in C_R$ ) とすれば、 $R$  はベキ級数体  $K((t))$  に埋め込まれる。 $t$  は

$$u = a + t^e \quad (a \in K) \quad \text{または} \quad t^{-e}$$

をみます。 $e$  は分岐指数である。 $u, v$  は  $C_K$  上代数的に従属しているから、 $e$  が 2 以上になるのは  $a \in C_K$  の場合だけである。関係式を微分すれば、 $Dt \in K[[t]]$  であることがわかる。

$R/K$  を微分拡大体とする。 $R/K$  が任意定数に関して有理的に依存しているとは、 $K$  のある微分拡大体  $E$  でつぎのようなものが存在するときをいう。

- 1)  $R, E$  は  $K$  上 free である。すなわち  $x_1, \dots, x_n \in R$  が  $K$  上代数的独立ならば、それらは  $E$  上でも代数的独立である。  
 2)  $ER = EC_{ER}$  すなわち  $ER$  は定数によって生成される。

$ER$  は  $E$  と  $R$  の合成体を示し、微分体であることに注意。 $R/K$  が 1 変数代数関数体であるとき、 $R/K$  が動く特異点をもたないということと、 $R/K$  が任意定数に有理的に依存しているということとは同値である。

Clairaut 方程式の一般解、Riccati 方程式の一般解、線形斉次方程式の一般解などで生成される微分拡大体は任意定数に有理的に依存している。

実際  $y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \dots + a_ny = 0$ ,  $y^{(k)} = D^ky$  を  $K$  上の線形斉次微分方程式としよう。 $y_{ij}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) を不定元とし、多項式環

$K[y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n]$  に微分構造を  $Dy_{ij} = y_{i,j+1}$  ( $1 \leq i, j \leq n$ ) および

$$Dy_{i,n+1} = -a_1 y_{in} - \cdots - a_n y_{i1} \quad (1 \leq i \leq n)$$

によって導入する。 $E = K(y_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n)$  とすれば  $E/K$  は微分拡大体であり、 $R = K\langle y \rangle$ ,  $E$  は  $K$  上 free である。そして  $ER = EC_{ER}$  を得る。

D C の考え方をを使って、つぎの Sperber の定理を証明しよう。

《 $y_1, y_2, \dots, y_n$  ( $n > 1$ ) はそれぞれ  $K$  上線形斉次微分方程式の非自明解で、 $y_1 = y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$  なる関係式を満足するとする。ここで  $m_i$  は正整数である。 $y_1$  が満足する  $K$  上線形斉次微分方程式の階数  $N$  は  $\min\{m_2, \dots, m_n\}$  以下とする。このとき  $Dy_i/y_i$  はすべて  $K$  上代数的である。》

ある  $z_j = Dy_j/y_j$  ( $2 \leq j \leq n$ ) が  $K$  上代数的でないとして矛盾をだす。 $y_i$  たちが生成する  $K$  の微分拡大体  $R = K\langle y_1, \dots, y_n \rangle$  は任意定数に有理的に依存する。 $E/K$  を  $R$ ,  $E$  が  $K$  上 free, そして  $ER = EC_{ER}$  が満たされるようにとる。 $C_{ER}$  は  $C_E$  上代数的独立な元  $c_1, \dots, c_r$  によって  $C_E(c_1, \dots, c_r)$  上代数的となる。

$$C_{ER} = C_E(c_1, \dots, c_r, d)$$

とする。 $z_j$  は  $E$  上代数的でないから、 $c_i$  を必要なら並べ替えて  $z_j$  は  $L = E(c_1, \dots, c_{r-1})$  上代数的でないとしてよい。定数  $d$  によって  $z_j \in L(c_r, d)$  であるから、 $L(c_r, d)/L$  のある付値  $\nu$  で  $\nu(z_j) < 0$  なるものが存在する。 $\nu$  に付随する付値環は微分に関して閉じている。 $\nu(t) = 1$  なる  $t \in R$  をとる。もし  $\nu(Dt) > 0$  ならば  $\nu(z_j) \geq 0$  となる。なぜなら  $y_j = t^k u$  ( $\nu(u) = 0$ ) とすれば  $\nu(z_j) \geq \min\{\nu(Dt/t), \nu(Du/u)\} \geq 0$  であるから。しかし、結果は仮定に反する。よって  $\nu(Dt) = 0$  を得る。この場合  $\nu(Du) = \nu(u) - 1$  ( $u \in R, \nu(u) \neq 0$ ) である。すると  $\nu(y_i) < 0$  ならば  $y_i$  は線形斉次微分方程式をみたしえない。故に  $\nu(y_i) \geq 0$  を得る。とくに  $\nu(z_j) < 0$  より  $\nu(y_j) > 0$  となる。また  $N \leq \nu(y_1)$  とすると  $\nu(D^k y_1) = \nu(y_1) - k$  であるから  $y_1$  は  $K$  上  $N$  階線形斉次微分方程式を満足

することはない。よって  $N > \nu(y_1)$  を得る。ところで  $y_1 = y_2^{m_2} \cdots y_n^{m_n}$  であるから

$$N > \nu(y_1) = m_2\nu(y_2) + \cdots + m_n\nu(y_n) \geq m_j\nu(y_j) \geq m_j$$

かくして  $N > \min\{m_2, \dots, m_n\}$  を得、矛盾となる。

### 参考文献

- [1] P.-F. Hsieh and Y. Sibuya: Basic theory of ordinary differential equations, Springer, New York, 1999
- [2] K. Nishioka: *Linear ordinary differential equations and Fermat equations*, Keio SFC Journal 7(2007), 126-129
- [3] M.F. Singer: *Algebraic relations among solutions of linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 295(1986), 753-763
- [4] S. Sperber: *On solutions of differential equations which satisfy certain algebraic relations*, Pacific J. Math. 124(1986), 249-256