

1 次元 Schrödinger 方程式の完全 WKB 解析 — WKB 解の Borel 変換の特異点について —

京都大学数理解析研究所 竹井義次 (TAKEI, Yoshitsugu)
Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University

0 Introduction

今回の講演にあたって、研究代表者の金井政宏さんからの依頼は、「完全 WKB 解析の入門から話して欲しい」ということだった。河合隆裕さんとの共著 [KT] が 2008 年に単行本化されたこともあり、[KT] の内容をそのまま説明するのも意味があるのかどうか疑わしく、多少躊躇を覚えたが、最近の進展も含めて話をしてみようという気になり、結局お引き受けすることにした。

実際に [KT] を読んで頂ければわかるように、完全 WKB 解析において先駆的かつ本質的な仕事をした Voros ([V]) のスタイルを踏襲しながら、それをより数学的な枠組の中で論じるという立場で [KT] は書かれている。その一方で、WKB 解の Borel 総和可能性といった完全 WKB 解析の基礎的な部分に関しては、[KT] は Ecalle ([E1, E2]) や Pham 達 ([CNP, DDP, DP]) の仕事に依拠している。[KT] を執筆した 1990 年代の後半、Pham が近いうちに完全 WKB 解析の基礎付けについての論文をまとめると約束していたという事情もあってこのような形になったのだが、残念ながら Pham のこの約束は果たされなかった。基礎付けが中途半端な形のまま取り残されている完全 WKB 解析の現状を何とかするべく、最近再び WKB 解の Borel 総和可能性や (Ecalle の意味での) resurgence 性が議論されるようになってきた。(例えば [FS]. そこで用いられるのは [DLS] や [CDK] といった伝統的な漸近解析の手法である。) 我々の周辺でも、神戸大学の小池達也さんを中心として、完全 WKB 解析の基礎付けの整備についての議論がいろいろとなされつつある。

[KT] の「今後の方向と課題」の章でも述べたことだが、WKB 解の Borel 総和可能性を論じる際の一つの困難は、WKB 解の Borel 変換の特異点の構造が複雑な点にある。最近の研究の進展により、こうした WKB 解の Borel 変換の特異点の構造を ([KT] の出版当時と比べて) より明確に議論することが可能になってきた。そこで本稿では、(完全 WKB 解析の基礎付けを完全な形で与えることはまだ難しいけれども、) 一つの完全 WKB 解析への入門として、具体例に対する WKB 解の Borel 変換の特異点の解析を中心に据えて完全 WKB 解析の基礎を論じてみることにしたい。近い将来、完全 WKB 解析の基礎付けが達成されることを期待しつつ。

1 WKB solutions and their Borel transform

まず、記号や用語の準備を兼ねて、完全 WKB 解析を論じる際の基礎的な事柄をまとめておこう。本稿で論じるのは、次の 1 次元 (定常) Schrödinger 方程式である。

$$(1) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0,$$

ただし、独立変数 $x \in \mathbb{C}$ は複素数とし、ポテンシャル $Q(x)$ は簡単のため多項式、また $\eta > 0$ は大きなパラメータとする。

この方程式 (1) に対して、次の形の解を考える。

$$(2) \quad \psi(x, \eta) = \exp \int^x S(x, \eta) dx.$$

すると、 $S(x, \eta)$ は次の 1 階の非線型方程式 (Riccati 方程式) を満たさねばならない。

$$(3) \quad S^2 + \frac{dS}{dx} = \eta^2 Q(x).$$

今、未知函数 S に対して $S = \eta S_{-1}(x) + S_0(x) + \eta^{-1} S_1(x) + \dots$ という形の展開を仮定すれば、各係数 $S_j(x)$ は次の漸化式で順に定まっていくことが容易にわかる。

$$(4) \quad (S_{-1}(x))^2 = Q(x), \quad S_0(x) = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{-1},$$

$$(5) \quad S_{j+1}(x) = -\frac{1}{2S_{-1}(x)} \left(\sum_{k=0}^j S_k(x) S_{j-k}(x) + \frac{dS_j}{dx} \right) \quad (j \geq 0).$$

Remark 1. 実際には $S_{-1}(x) = \pm \sqrt{Q(x)}$ という符号の選び方に応じて二つの (3) の解 $S_{\pm}(x, \eta)$ が得られる。この符号の違いは、今の場合 η に関して奇数次の項にのみ現れるので、

$$(6) \quad \begin{aligned} S_{\pm} &= \pm \eta S_{-1}(x) + S_0(x) \pm \eta^{-1} S_1(x) + \dots \\ &= \pm S_{\text{odd}} + S_{\text{even}} \end{aligned}$$

と表すことができる。すると、方程式 (3) の両辺の奇数次部分を比較することにより次が得られる。

$$(7) \quad S_{\text{even}} = -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} \log S_{\text{odd}}.$$

Definition 1. こうして得られる Schrödinger 方程式 (1) の解

$$(8) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int_{x_0}^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

(x_0 は勝手に選んだ定点) を、(1) の WKB 解と呼ぶ。

WKB 解 (8) を (指数項を除いて) η^{-1} の巾級数に展開する.

$$(9) \quad \psi_{\pm}(x, \eta) = e^{\pm \eta s(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(x) \eta^{-(n+1/2)} \quad \left(\text{ただし } s(x) = \int_{x_0}^x \sqrt{Q(x)} dx \right).$$

上で見たように WKB 解の構成は難しくないが, その代わりにこの級数 (9) は残念ながらほとんどの場合に収束しない.

Remark 2. より詳しく, 漸化式 (5) を利用することにより, $\{x \in \mathbb{C} \mid Q(x) \neq 0\}$ 内の任意のコンパクト集合 K 上で次の評価が成り立つことが証明できる.

$$(10) \quad |\psi_{\pm, n}(x)| \leq C^{n+1} n! \quad (\text{ただし } C \text{ は } n \text{ に依らない正の定数}).$$

そこで完全 WKB 解析では, WKB 解 (8) または (9) に対して, (大きなパラメータ η に関する) いわゆる “Borel 総和法” を用いて解析的な意味づけを与える.

Definition 2. (Borel 総和法)

WKB 解 (9) に対して, 次式で定義される (x をパラメータとして含む) $y \pm s(x)$ の巾級数 $\psi_{\pm, B}(x, y)$ を $\psi_{\pm}(x, \eta)$ の Borel 変換と呼ぶ.

$$(11) \quad \psi_{\pm, B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm, n}(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y \pm s(x))^{n-1/2}.$$

さらに, $\psi_{\pm, B}(x, y)$ の Laplace 変換

$$(12) \quad \Psi_{\pm}(x, \eta) = \int_{\mp s(x)}^{\infty} e^{-y\eta} \psi_{\pm, B}(x, y) dy$$

が well-defined である (すなわち, $\psi_{\pm, B}(x, y)$ が次に述べる (12) の積分路に沿って解析接続できて, しかも $y \rightarrow \infty$ のとき y に関して指数型になる) とき, $\Psi_{\pm}(x, \eta)$ を $\psi_{\pm}(x, \eta)$ の Borel 和と呼ぶ. ただし (12) の積分路は, $y = \mp s(x)$ を始点として正の実軸に平行に無限遠点まで延びるものとする.

Remark 3. $Y(y)$ を Heaviside 関数 (すなわち, $y > 0$ のとき $Y(y) = 1$, $y < 0$ のとき $Y(y) = 0$), α を $\alpha > -1$ を満たす実の定数とすると, Laplace 変換により

$$(13) \quad y^{\alpha} Y(y) \xrightarrow{\text{Laplace transf}} \Gamma(\alpha+1) \eta^{-(\alpha+1)}$$

となることは容易にわかる. 従って, Borel 変換 (11) とは, (η^{-1} の形式巾級数に formal に拡張したという意味での) 形式的な逆 Laplace 変換に他ならない.

完全 WKB 解析とは, 一言で言えば, WKB 解の Borel 和を用いて Schrödinger 方程式 (1) の解の大域的性質を調べる方法である.

Remark 3 が示唆するように Borel 総和法は非常に自然な総和法である. 実際, 例えば収束する級数に Borel 総和法を適用すれば, その Borel 変換が y の指数型の整関数となり, さらにその Borel 和は元の収束級数に一致することが証明できる.

この Borel 総和法を WKB 解に適用すれば, (10) という形の評価式により, Borel 変換 $\psi_{\pm,B}$ は ($y = \mp s(x)$ において) 収束し y の解析関数を定める. (ここでは x はパラメータと見なしていることに注意.) ところが, $\psi_{\pm}(x, \eta)$ は一般には収束級数ではないので, $\psi_{\pm,B}$ はどこかに特異点を持つことになる. 言い換えれば, Borel 変換という‘装置’により, WKB 解 ψ_{\pm} の発散の問題が $\psi_{\pm,B}$ の特異点の問題に置き換えられた訳である.

多少過ぎた表現になるかもしれないが, 完全 WKB 解析の中心課題はこの $\psi_{\pm,B}$ の特異点の解析にあると言ってもそれほど過言ではない. 方程式 (1) の解の大域的性質に関する情報が, $\psi_{\pm,B}$ の特異点にすべて隠されている. 以下では, $\psi_{\pm,B}$ がどのような特異点をもっているかを見ていくことにしよう.

2 Movable singularity and one turning point problem

まず, [KT] でも論じられている次の例を考えよう.

Example 1. (Airy 方程式)

$$(14) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 x \right) \psi = 0.$$

こうした $Q(x) = x$ の場合の Schrödinger 方程式を Airy の方程式と呼ぶ. この Airy 方程式の ($x_0 = 0$ と選んだ) WKB 解

$$(15) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \left(\pm \int_0^x S_{\text{odd}} dx \right)$$

の Borel 変換 $\psi_{\pm,B}(x, y)$ の特異点を調べる.

漸化式 (4), (5) により, 対応する Riccati 方程式の巾級数解 (6) の各係数 S_j は, c_j を定数として $S_j = c_j x^{-1-(3/2)j}$ ($j = -1, 0, 1, \dots$) の形をしていることが帰納的に証明できる. 従って, WKB 解 (15) の各係数 $\psi_{\pm,n}$ も, $\psi_{\pm,n} = d_n x^{-1/4-(3/2)n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$, ただし d_n は定数) の形であることがわかる. よって, その Borel 変換 $\psi_{\pm,B}(x, y)$ は, $t = yx^{-3/2}$ の適当な 1 変数関数 $h_{\pm}(t)$ を用いて

$$(16) \quad \psi_{\pm,B}(x, y) = x^{-1} h_{\pm}(t) \quad \left(\text{ただし } t = \frac{y}{x^{3/2}} \right)$$

と表される. 他方, ψ_{\pm} が (14) の解であるから, その Borel 変換 $\psi_{\pm,B}$ は ((14) を逆 Laplace 変換した) 次の偏微分方程式を満たすことが確かめられる.

$$(17) \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi_{\pm,B} = 0.$$

この微分方程式 (17) の解が (16) の形をしているということから, $h_{\pm}(t)$ に対する次の常微分方程式が導かれる.

$$(18) \quad \left(1 - \frac{9}{4} t^2 \right) \frac{d^2 h_{\pm}}{dt^2} - \frac{27}{4} t \frac{dh_{\pm}}{dt} - 2h_{\pm} = 0.$$

この微分方程式 (18) は ($s = 3yx^{-3/2}/4 + 1/2$ と変数変換すれば) 有名な超幾何微分方程式であり, 従って Borel 変換 $\psi_{\pm, B}$ は Gauss の超幾何函数 $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$ を用いて次のように表される.

$$(19) \quad \psi_{+, B}(x, y) = Cx^{-1}s^{-1/2}F(1/6, 5/6, 1/2; s),$$

$$(20) \quad \psi_{-, B}(x, y) = Cx^{-1}(1-s)^{-1/2}F(1/6, 5/6, 1/2; 1-s),$$

ただし

$$(21) \quad C = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{\pi}}, \quad s = \frac{3}{4} \frac{y}{x^{3/2}} + \frac{1}{2}.$$

(定数 C の値は, Borel 変換の定義式 (11) と超幾何函数による表示とを比較することにより定まる.)

Airy 方程式 (14) の WKB 解 (15) の Borel 変換は, こうして超幾何函数を用いて明示的に表される. この具体的な表示 (19), (20) を用いれば, 例えば $\psi_{+, B}(x, y)$ や Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ が次のような性質 (1°) ~ (4°) をもつことが確かめられる.

(1°) $\psi_{+, B}(x, y)$ は, 基点となる特異点 $y = -\frac{2}{3}x^{3/2}$ に加えて $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ にも特異点をもつ. この特異点 $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ は (基点となる特異点との相対位置がパラメータ x により変化するので) “movable singularity” と呼ばれる.

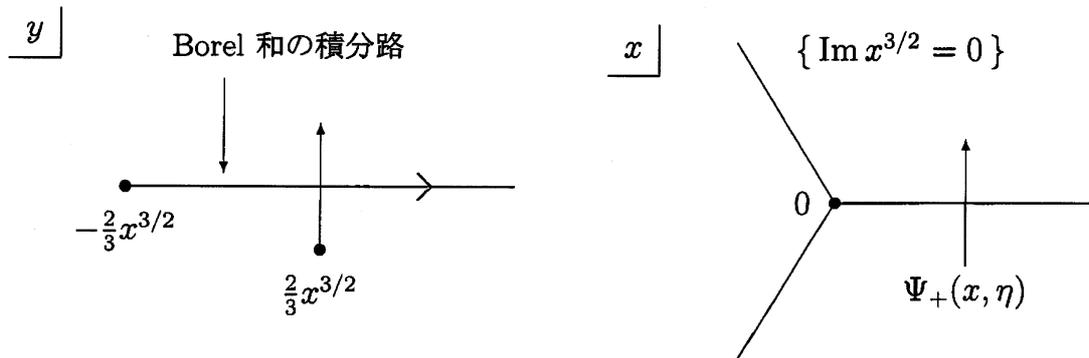


Figure 1 : $\psi_{+, B}$ の movable singularity と集合 $\{\text{Im } x^{3/2} = 0\}$.

(2°) Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ は x が集合 $\{\text{Im } x^{3/2} = 0\}$ に含まれないとき well-defined である. 他方, $\{\text{Im } x^{3/2} = 0\}$ においては, (1°) の movable singularity が Borel 和の積分路にぶつかるため, Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ は定義されない.

(3°) (2°) の集合 $\{\text{Im } x^{3/2} = 0\}$ は x 平面内の原点 $x = 0$ を通る 3 本の半直線であるが, 例えばそのうちの 1 本である正の実軸 \mathbb{R}_+ を横切って Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ を (第 4 象限から第 1 象限へ) 解析接続するとき, $\Psi_+(x, \eta)$ は Figure 2 に示された二つの積分路 Γ_0 と Γ_1 に沿う $\psi_{+, B}(x, y)$ の Laplace 積分の和に変形される.

(3°) の二つの積分のうち, Γ_0 に沿う積分は定義により (第 1 象限における) Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ である. 他方, Γ_1 に沿う積分については次が成り立つ.

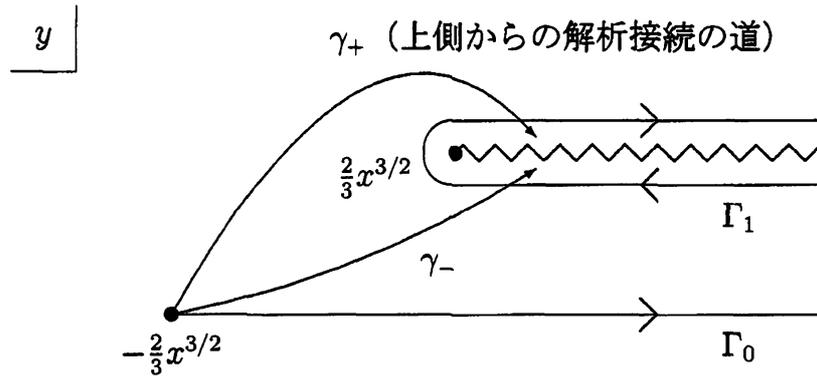


Figure 2 : 積分路 Γ_0 と Γ_1 (波線は多価関数 $\psi_{+,B}(x,y)$ を定義するためのカットを表す).

Proposition 1. (Cf. [KT, (2.46)])

$$(22) \quad \Delta_{y=(2/3)x^{3/2}} \psi_{+,B}(x,y) := ((\gamma_+)_* - (\gamma_-)_*) \psi_{+,B}(x,y)$$

を $\psi_{+,B}(x,y)$ の movable singularity $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ における discontinuity, すなわち $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$ から右方向に引いたカットへの上側からの解析接続 $(\gamma_+)_* \psi_{+,B}(x,y)$ と下側からの解析接続 $(\gamma_-)_* \psi_{+,B}(x,y)$ の差 (解析接続の道 γ_{\pm} については Figure 2 を参照) とするとき,

$$(23) \quad \Delta_{y=(2/3)x^{3/2}} \psi_{+,B}(x,y) = i\psi_{-,B}(x,y)$$

が成立する.

この Proposition 1 より次が得られる.

(4°) \mathbb{R}_+ を横切って (第 4 象限から第 1 象限へ) Ψ_+ を解析接続すれば, Ψ_+ は

$$(24) \quad \Psi_+ \rightsquigarrow \Psi_+ + i\Psi_-$$

と変化する (WKB 解の Borel 和 に対する Stokes 現象). このような公式 (24) を Ψ_+ に関する “接続公式 (connection formula)” と呼ぶ.

もう一つ, WKB 解の Borel 変換が明示的に求まる例を挙げよう.

Example 2. (退化した Weber 方程式)

$$(25) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \left(\frac{x^2}{4} - \eta^{-1}\kappa \right) \right) \psi = 0 \quad (\text{ただし } \kappa \text{ は整数でない定数}).$$

この例の場合, ポテンシャルが η に関して (-1) 次の項を含むために,

$$(26) \quad S_{\pm} = \pm \eta \frac{x}{2} + \left(-\frac{1}{2x} \mp \frac{\kappa}{x} \right) + \dots$$

というように, $S_{\pm} = \pm S_{\text{odd}} + S_{\text{even}}$ の奇部分 S_{odd} は η に関して偶数次の項も含んでくる. 特に S_{odd} の 0 次の項が $-\kappa/x$ で与えられることに注意して, 以下では次のように正規化された (25) の WKB 解 $\psi_{\pm}(x, \eta)$ を考える.

$$(27) \quad \psi_{\pm}(x, \eta) = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} (\eta^{1/2} x)^{\mp \kappa} \exp \pm \left(\eta \int_0^x S_{-1} dx + \int_{\infty}^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1} + \frac{\kappa}{x}) dx \right).$$

このとき, Example 1 と同様の議論により, WKB 解 (27) の Borel 変換 $\psi_{\pm, B}(x, y)$ は超幾何関数を用いて次のように表されることがわかる (詳しくは [T1, Section 3] を参照).

$$(28) \quad \psi_{+, B}(x, y) = C_+ x^{-3/2} s^{\nu_+} F \left(\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{2}, \frac{3}{4} + \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\kappa}{2}; s \right),$$

$$(29) \quad \psi_{-, B}(x, y) = C_- x^{-3/2} (1-s)^{\nu_-} F \left(\frac{1}{4} - \frac{\kappa}{2}, \frac{3}{4} - \frac{\kappa}{2}, \frac{1}{2} - \frac{\kappa}{2}; 1-s \right),$$

ただし

$$(30) \quad C_{\pm} = \frac{2^{1 \mp \kappa/2}}{\Gamma((1 \pm \kappa)/2)}, \quad \nu_{\pm} = \frac{-1 \pm \kappa}{2}, \quad s = \frac{2y}{x^2} + \frac{1}{2}.$$

この表示式 (28), (29) から, Example 1 と同様に, $\psi_{+, B}(x, y)$ は基点となる特異点 $y = -x^2/4$ に加えて $y = x^2/4$ に movable singularity をもつことがわかる. 従って, Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ は x が集合 $\{\text{Im } x^2 = 0\}$ に含まれないとき well-defined である. さらに, 例えば $\{\text{Im } x^2 = 0\}$ のうちの 1 本である \mathbb{R}_+ を横切ったときの Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ の解析接続に関しては, 次の Proposition 2 が成り立つ.

Proposition 2. (Cf. [T1, (3.25)])

$\psi_{+, B}(x, y)$ の movable singularity $y = x^2/4$ における discontinuity に関して, 次が成立する.

$$(31) \quad \Delta_{y=x^2/4} \psi_{+, B}(x, y) = \frac{i\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\kappa + 1/2)} \psi_{-, B}(x, y).$$

上記 Example 1, 2 のいずれについても, WKB 解の Borel 変換 $\psi_{+, B}(x, y)$ はそれぞれ movable singularity $y = (2/3)x^{3/2}$, $y = x^2/4$ をもつ. こうした movable singularity のために, Borel 和 $\Psi_+(x, \eta)$ は Example 1 の場合は $\{\text{Im } x^{3/2} = 0\}$, Example 2 の場合は $\{\text{Im } x^2 = 0\}$ において well-defined とはならない. Borel 和が定義されないこれらの集合がそれぞれ

$$(32) \quad \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \int_0^x \sqrt{x} dx = 0 \right\}, \quad \left\{ x \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \int_0^x \sqrt{x^2} dx = 0 \right\}$$

と表されることに注意して, 一般の Schrödinger 方程式 (1) に対して次の定義を導入する.

Definition 3. (変わり点, Stokes 曲線)

(i) $Q(x)$ の零点を, 微分方程式 (1) の “変わり点 (turning point)” と呼ぶ. 特に $Q(x)$ の単純零点を単純変わり点, 2位の零点を2重変わり点という.

(ii) a を変わり点として, 次式で定義される a から延びる実1次元曲線を (1) の “Stokes 曲線 (Stokes curve)” と呼ぶ.

$$(33) \quad \operatorname{Im} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx = 0.$$

つまり, Example 1 の場合は $x = 0$ が単純変わり点でそこから延びる3本の半直線 $\{\operatorname{Im} x^{3/2} = 0\}$ が Stokes 曲線, Example 2 の場合は $x = 0$ が2重変わり点でそこから延びる4本の半直線 $\{\operatorname{Im} x^2 = 0\}$ が Stokes 曲線である. (Example 2 の方程式 (25) のようにポテンシャルが η^{-1} に関して高次の項を含む場合は, ポテンシャルの η^{-1} に関する0次部分を $Q(x)$ として変わり点や Stokes 曲線を定義する.)

一般の Schrödinger 方程式 (1) の場合も, WKB 解の Borel 変換は movable singularity をもち, そのため WKB 解の Borel 和は Stokes 曲線上では定義されない. WKB 解の Borel 変換が movable singularity をもつことを保証するのが次の定理である.

Theorem 3. (Voros [V])

$x = a$ を方程式 (1) の単純変わり点, ψ_{\pm} を

$$(34) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_a^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

と正規化された (1) の WKB 解とすると, $x = a$ の近傍で次が成立する.

(i) ψ_+ の Borel 変換 $\psi_{+,B}$ は

$$(35) \quad y = \pm s(x) := \pm \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx$$

に特異点をもつ. 特に $y = s(x)$ が movable singularity である. (ψ_- の Borel 変換 $\psi_{-,B}$ についても同様である.)

(ii) $\psi_{+,B}$ の movable singularity $y = s(x)$ において, 次式が成り立つ.

$$(36) \quad \Delta_{y=s(x)} \psi_{+,B}(x, y) = i\psi_{-,B}(x, y).$$

(iii) $x = a$ から延びる Stokes 曲線を横切つて ψ_{\pm} の Borel 和 Ψ_{\pm} を解析接続するとき, 次の接続公式が成り立つ.

$$(37) \quad \Psi_+ \rightsquigarrow \Psi_+ + i\Psi_-, \quad \Psi_- \rightsquigarrow \Psi_-.$$

ただし, 当該の Stokes 曲線上では $\operatorname{Re} \int_a^x \sqrt{Q(x)} dx > 0$ が成立する (換言すれば, Ψ_+ の方が Ψ_- に対して指数的に大きい) ものとし, また Stokes 曲線は (変わり点 $x = a$ から見て) 正の向き, すなわち反時計回りに横切るものとする.

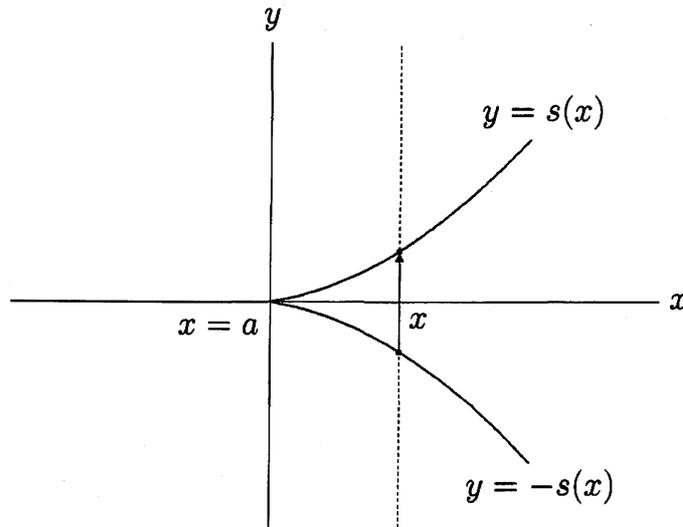


Figure 3: 単純変わり点 $x = a$ の近傍における $\psi_{+,B}(x, y)$ の singularity locus.

Remark 4. 元々 Voros は, WKB 解が Borel 総和可能であると仮定した上で, 非常に巧妙な議論を用いて Theorem 3, (iii) を導出した. それに対して [KT] の 2 章では, Airy 方程式への変換論に基づくより数学的に厳密な Theorem 3, (i), (ii) の証明が与えられている.

Remark 5. Stokes 曲線を図示した後, それに従って上記の Theorem 3, 特に接続公式 (37) を繰り返し用いれば, 例えば (1) の形をした Fuchs 型方程式のモノドロミー群を具体的に計算することができる. モノドロミー群の具体的計算については, [KT] の 3 章あるいは [AKT1] を参照.

3 Fixed singularity and two turning points problem

前節では, 2 つの具体例を通して, Schrödinger 方程式 (1) の WKB 解の Borel 変換が movable singularity をもつことを見た. そこで扱った Example 1, Example 2 はいずれも, 変わり点を一つしかもたないような簡単な例であった. 一般の方程式 (1) の場合, (ポテンシャル $Q(x)$ の次数に応じて) 複数個の変わり点をもつのが普通である. それでは, (1) が複数個の変わり点をもつ場合には, WKB 解の Borel 変換の特異点の構造はどうなるだろうか? 本節では, [AKT2] や [T2] で論じられた例を通してこの問題を考察しよう.

Example 3. (Weber 方程式)

$$(38) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \left(\lambda - \frac{x^2}{4} \right) \right) \psi = 0 \quad (\text{ただし } \lambda \neq 0 \text{ は定数}).$$

この方程式 (38) は 2 個の変わり点 $x = \pm 2\sqrt{\lambda}$ をもち、その Stokes 曲線の概形は ($\lambda > 0$ の場合) Figure 4 のようになる。

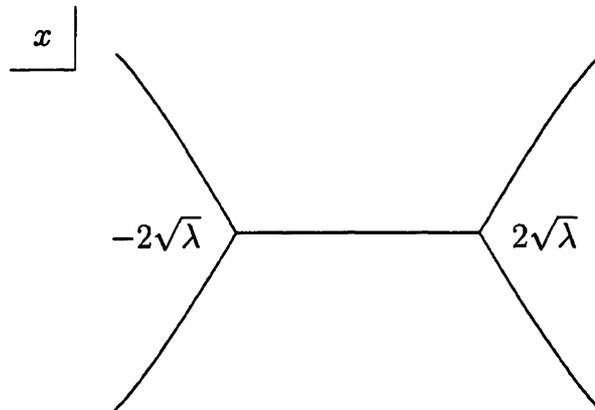


Figure 4 : 方程式 (38) の Stokes 曲線 ($\lambda > 0$ の場合) .

ここで、2 個の変わり点はいずれも単純変わり点であることに注意しよう。すると、各変わり点 $x = \pm 2\sqrt{\lambda}$ の近傍では (Remark 4 で述べた Airy 方程式への変換論を用いることにより) Theorem 3 が成立する。特に、例えば

$$(39) \quad \psi_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp\left(\pm \int_{2\sqrt{\lambda}}^x S_{\text{odd}} dx\right)$$

と正規化された (38) の WKB 解 ψ_{\pm} を考えると、 $x = 2\sqrt{\lambda}$ において Theorem 3 を用いることにより、その点の近くで ψ_{+} の Borel 変換 $\psi_{+,B}$ は Figure 3 に示されたような cusp 状の特異点

$$(40) \quad y = \pm s(x), \quad \text{ただし } s(x) = \int_{2\sqrt{\lambda}}^x \sqrt{\lambda - x^2/4} dx$$

をもつことになる。実は、この二つの特異点 $y = \pm s(x)$ は $x = 2\sqrt{\lambda}$ から自然に $x = -2\sqrt{\lambda}$ まで延びて、 $x = -2\sqrt{\lambda}$ もまた単純変わり点であるが故に (再び Theorem 3 により) そこでまた cusp を形成する。こうして $x = -2\sqrt{\lambda}$ でも cusp が形成されれば、そこで跳ね返った特異点はもう一度 $x = 2\sqrt{\lambda}$ まで延びてきて、最終的には Figure 5 に図示されたようないわば‘縄梯子’状の特異点集合が現れることが期待される。(さらに、この Figure 5 より、特に x を固定した場合の (y 平面内の) ψ_{+} の Borel 変換 $\psi_{+,B}(x,y)$ の特異点集合は Figure 6 のようになる。)

Remark 6. 次の公式により、Figure 5 の‘縄梯子’の幅は $2\pi\lambda$ となる。

$$(41) \quad 2 \int_{-2\sqrt{\lambda}}^{2\sqrt{\lambda}} \sqrt{\lambda - \frac{x^2}{4}} dx = 2\pi\lambda.$$

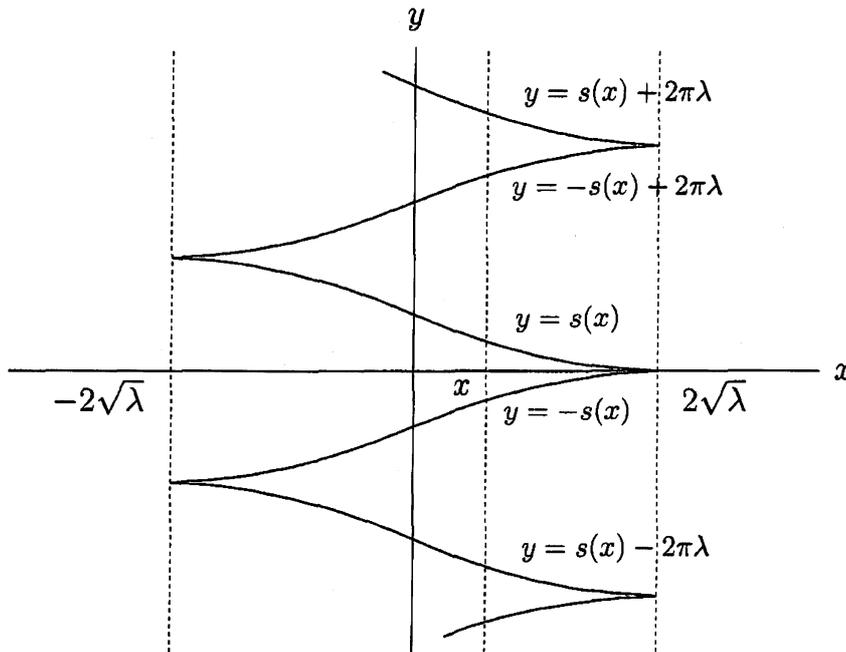


Figure 5 : 方程式 (38) の $\psi_{+,B}(x, y)$ の singularity locus.

$\psi_{+,B}(x, y)$ の基点となる特異点 $y = -s(x)$ から見て, 今回新たに現れた (可算無限個の) 特異点 $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ ($m \in \mathbb{Z}$) は, その相対的位置が (x を動かしても) 変化しない. そこで, 前節で論じた movable singularity $y = s(x)$ に対して, これらの特異点を WKB 解の (Borel 変換の) “fixed singularity” と呼ぶ.

以上のやや heuristic な議論は, $\psi_{+,B}$ が満たす偏微分方程式に対する特異性伝播の理論を用いることで正当化することも可能であるが, ここでは $\psi_{+,B}$ の特異点の構造をより直接的に捉えられる [AKT2] や [T2] の議論を利用して, 方程式 (38) の WKB 解が fixed singularity をもつことを見ていくことにしよう.

以下, 定数 λ は $\lambda > 0$ を満たすものと仮定する. まず, (39) のように正規化された (38) の WKB 解 ψ_{\pm} を, 次のように分解する.

$$(42) \quad \psi_{\pm} = \psi_{\pm}^{(\infty)} \exp \left(\pm \int_{2\sqrt{\lambda}}^{\infty} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \right),$$

ここで

$$(43) \quad \psi_{\pm}^{(\infty)} = \frac{1}{\sqrt{S_{\text{odd}}}} \exp \pm \left(\eta \int_{2\sqrt{\lambda}}^x S_{-1} dx + \int_{\infty}^x (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx \right)$$

は $x = \infty$ で正規化された (38) の WKB 解である. このとき, 例えば [DP] で示されているように, $x = \infty$ で正規化された WKB 解 (43) の Borel 変換 $\psi_{\pm,B}^{(\infty)}$ の特異点の構造は (そのリーマン面の第 1 シート上では) 比較的単純である.

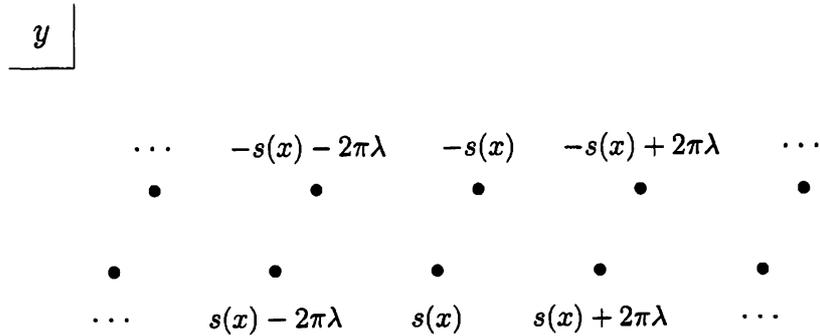


Figure 6 : 方程式 (38) の $\psi_{+,B}(x, y)$ の (y 平面内での) 特異点集合.

Proposition 4. (Cf. [DP, Theorem 1.2.2(c)])

$\psi_{+,B}^{(\infty)}(x, y)$ は, (x が Stokes 曲線上にのっておらず, さらに ∞ と x を結ぶ (43) の積分路が Stokes 曲線と交わらない限り)

$$(44) \quad \Gamma := \{y \in \mathbb{C} \mid y = -s(x) + \rho, \rho > 0\}$$

に特異点をもたない.

従って, もし実際に $\psi_{\pm,B}$ が fixed singularity をもつとすると, それは ψ_{\pm} の分解式 (42) の右辺の第 2 因子に由来することになる. この (42) の右辺の第 2 因子 (いわゆる “Voros 係数”) については, 次のような具体的な表示式が存在する.

Proposition 5.

$$(45) \quad 2 \int_{2\sqrt{\lambda}}^{\infty} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n} - 1}{2n(2n-1)} B_{2n} (i\eta\lambda)^{1-2n},$$

ただし B_{2n} は次式で定義される Bernoulli 数である.

$$(46) \quad \frac{w}{e^w - 1} = 1 - \frac{w}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} w^{2n}.$$

WKB 解 (39) の Borel 変換が fixed singularity をもつことを厳密に示すには, この Proposition 5 が鍵となる. そこで, [T2] の方法に基づく Proposition 5 の証明の概略を述べよう.

Outline of proof of Proposition 5. $\sigma = i\eta\lambda$ とし, (45) の右辺を $F(\sigma)$ とおく. すなわち,

$$(47) \quad F(\sigma) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{1-2n} - 1}{2n(2n-1)} B_{2n} \sigma^{1-2n}.$$

次の Lemma 1 が示すように, $F(\sigma)$ はある差分方程式の解として特徴付けられる.

Lemma 1. $F(\sigma)$ は次の差分方程式の一意的な形式解である.

$$(48) \quad F(\sigma + 1) - F(\sigma) = 1 + \log \left(1 + \frac{1}{2\sigma} \right) - (\sigma + 1) \log \left(1 + \frac{1}{\sigma} \right).$$

従って, (45) の左辺がこの差分方程式を満すことを確かめれば良い. その鍵となるのが次の Lemma 2 である.

Lemma 2. $S_{\pm} = S_{\pm}(x, \lambda)$ を Weber 方程式 (38) に付随する Riccati 方程式の二つの解とすると, 次が成り立つ.

$$(49) \quad S_+(x, \lambda - \eta^{-1}i) - S_+(x, \lambda) = \frac{d}{dx} \log \left(\eta^{-1} S_+(x, \lambda) - i \frac{x}{2} \right).$$

Proof of Lemma 2. Weber 方程式 (38) を調和振動子の方程式と考えて, そのいわゆる生成作用素を

$$(50) \quad C := \eta^{-1} \frac{d}{dx} - i \frac{x}{2}$$

とおく. 生成作用素の性質から, (38) の WKB 解 ψ_+ (ここでは, 簡単のため WKB 解は $\psi_+ = \exp \int^x S_+(x, \lambda) dx$ という形をしているものとする) に C を作用させた $C\psi_+$ は, (38) の λ を $-\eta^{-1}i$ だけシフトした

$$(51) \quad \left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 \left(\lambda - \eta^{-1}i - \frac{x^2}{4} \right) \right) \psi = 0$$

の WKB 解となることが確かめられる. すなわち, $C(\eta)$ を x には依存しない η^{-1} の適当な無限級数として,

$$(52) \quad C\psi_+ = C(\eta) \exp \left(\int^x S_+(x, \lambda - \eta^{-1}i) dx \right)$$

が成り立つ. この (52) の両辺の対数微分を取れば, (49) が得られる. \square

この Lemma 2 を用いれば, $S_+(x, \lambda)$ の λ を $-\eta^{-1}i$ だけシフトしたときにどれ位の差が生じるかが計算できる. 特に (49) の右辺が対数微分の形をしているので, (45) の左辺が λ を $-\eta^{-1}i$ だけシフトしたときにどのように変化するかを調べる際には非常に都合が良い. 実際に (49) を用いてこの変化を具体的に調べれば, (45) の左辺が差分方程式 (48) を満すことが確かめられる (計算の詳細については [T2, §1] を参照). \square

Proposition 5 を利用して, WKB 解 (39) の Borel 変換が実際に fixed singularity をもつことを確かめよう. 等式 (45) の左辺 (の半分) を ϕ とおく. すなわち,

$$(53) \quad \phi = \phi(\eta) = \int_{2\sqrt{\lambda}}^{\infty} (S_{\text{odd}} - \eta S_{-1}) dx.$$

すると, Proposition 5 によりその Borel 変換は具体的に計算できて,

$$(54) \quad \phi_B(y) = \frac{1}{4y} \left(\frac{1}{e^{y/(2i\lambda)} - 1} + \frac{1}{e^{y/(2i\lambda)} + 1} - \frac{2i\lambda}{y} \right)$$

となる. この具体的表示式から容易にわかるように, $\phi_B(y)$ は次の性質をもつ.

- 一価な解析関数,
- $y = 2m\pi\lambda$ (ただし $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) に 1 位の極をもつ,
- そこでの留数は $\frac{1}{2\pi i} \frac{(-1)^{m-1}}{2m}$ に等しい.

他方, Proposition 4 から $x = \infty$ で正規化された WKB 解の Borel 変換 $\psi_{+,B}^{(\infty)}$ は Γ (Γ の定義は (44) を参照) 上に特異点をもたないので, 分解式 (42) により, WKB 解 (39) の Borel 変換 $\psi_{+,B}(x, y)$ は $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ ($m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$) に特異点をもつことが証明できる. しかも, 上で述べた $\phi_B(y)$ の性質を用いれば, $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ における $\psi_{+,B}(x, y)$ の Ecalle の意味での alien derivative も具体的に計算できて,

$$(55) \quad \Delta_{y=-s(x)+2m\pi\lambda} \psi_{+,B}(x, y) = \frac{(-1)^m}{2m} \psi_{+,B}(x, y - 2m\pi\lambda)$$

となる. 議論の詳細は [AKT2] や [T2] を参照されたい. こうして, $\phi_B(y)$ が $y = 2m\pi\lambda$ に特異点 (極) をもつことの直接の帰結として, (38) の WKB 解 (39) の Borel 変換 $\psi_{+,B}(x, y)$ が $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ に fixed singularity をもつことが確かめられた.

Remark 7. Ecalle の alien derivative の定義を復習しておく. 一言でいえば, $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ における $\psi_{+,B}(x, y)$ の alien derivative とは, 基点 $y = -s(x)$ から可算個並んだ特異点を避けながら $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ の少し先まで延びるすべての path に沿う $\psi_{+,B}(x, y)$ の解析接続を考え, それらに (path に応じて定まる) 適当な weight を掛けて足し合わせたものである. より正確には, 例えば Figure 7 に示された解析接続の path を今 $\gamma = \gamma_- \cdots \gamma_+ \gamma_- \gamma_- \gamma_+$ と表し (Figure 7 では k 番目の特異点 $y = -s(x) + 2k\pi\lambda$ を単に “ k ” というラベルで表していることに注意), それに沿う $\psi_{+,B}$ の解析接続を $(\gamma_-)_* \cdots (\gamma_+)_* (\gamma_-)_* (\gamma_-)_* (\gamma_+)_* \psi_{+,B}$ で表すことにすれば, $y = -s(x) + 2m\pi\lambda$ における $\psi_{+,B}$ の alien derivative は次式で定義される.

$$(56) \quad \Delta_{y=-s(x)+2m\pi\lambda} \psi_{+,B} := \sum_{\substack{\epsilon_j = \pm 1 \\ 1 \leq j \leq m-1}} \frac{p_+! p_-!}{m!} ((\gamma_+)_* - (\gamma_-)_*) (\gamma_{\epsilon_{m-1}})_* \cdots (\gamma_{\epsilon_1})_* \psi_{+,B},$$

ただし p_+ および p_- は, それぞれ $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{m-1}$ の中に含まれる $+1$ および -1 の個数を表す, すなわち

$$(57) \quad p_{\pm} = \#\{j \mid 1 \leq j \leq m-1, \epsilon_j = \pm 1\}.$$

従って, 最も近い特異点 $y = -s(x) + 2\pi\lambda$ における alien derivative は, 前節に出てきた discontinuity (cf. (22)) に他ならない. Ecalle による alien calculus のより詳しい解説については, 例えば [S] を参照.

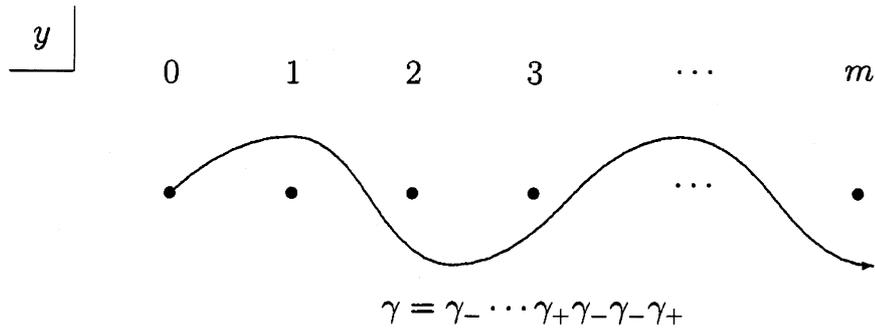


Figure 7: $\psi_{+,B}(x,y)$ の特異点 $y = -s(x) + 2k\pi\lambda$ と解析接続の path $\gamma = \gamma_- \cdots \gamma_+ \gamma_- \gamma_- \gamma_+$ (1 番目の特異点を上側から, 2 番目の特異点を下側から, ... と避けていく path であるということ, 右側から順に γ_+ , γ_- , ... という記号を並べて表している).

最後に, fixed singularity のもつ一つの意味について述べて本稿を終えよう. ここまで定数 λ は $\lambda > 0$ を満たすとして話を進めてきた. このとき, 上で見たように WKB 解 (39) の Borel 変換 $\psi_{+,B}$ の fixed singularity は, 基点となる特異点 $y = -s(x)$ から見て右側, つまり正の実軸の方向に並んでいる. この状況の下で, $\text{Im} \lambda$ (あるいは $\arg \lambda$) に小さな摂動を加えることを考える. 例えば, $\text{Im} \lambda < 0$ から正の実軸を横切って $\text{Im} \lambda > 0$ に λ を変化させてみよう. すると, Weber 方程式 (38) の Stokes 曲線の概形は (Figure 4 が摂動を受けて) Figure 8 のように変化するが, それに伴って $\psi_{+,B}$ の fixed singularity の並ぶ方向も ($y = -s(x)$ から見て) 右下から右上へと移動する. ここで Borel 和の定義式 (12) を思い出せば, こ

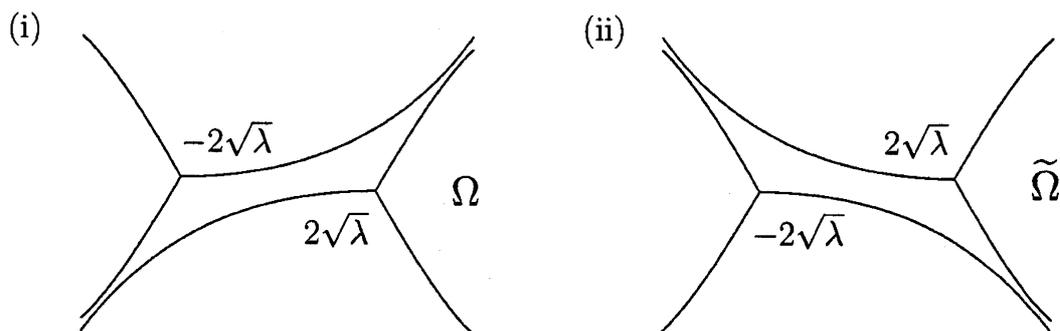


Figure 8: (i) $\text{Im} \lambda < 0$, および (ii) $\text{Im} \lambda > 0$ の場合の方程式 (38) の Stokes 曲線.

れは WKB 解 ψ_+ の Borel 和 Ψ_+ にも何らかの変化が起きることを意味している (これもまた一種の Stokes 現象と考えられる). Voros 係数の具体的表示式を与えた Proposition 5 を用いれば, この WKB 解の Borel 和の変化も明示的に表すこと

ができる。実際、例えば $\text{Im } \lambda < 0$ のときの Figure 8, (i) に示した領域 Ω における WKB 解 (39) の Borel 和を Ψ_+ , $\text{Im } \lambda > 0$ のときの Figure 8, (ii) の対応する領域 $\tilde{\Omega}$ における同じ WKB 解 (39) の Borel 和を $\tilde{\Psi}_+$ と表せば、 Ψ_+ と $\tilde{\Psi}_+$ の間に次の関係式が成立する。

$$(58) \quad \Psi_+ = (1 + e^{-2\pi\lambda\eta})^{1/2} \tilde{\Psi}_+.$$

これはまた、 $\psi_{+,B}(x, y)$ の alien derivative に対する関係式 (55) を Borel 和 Ψ_+ に対する関係式に翻訳したものと見なすことができる。関係式 (58) の導出について、詳しくは [T2, §2] を参照。このように、movable singularity が Stokes 曲線を横切ったときに起こる WKB 解の Borel 和の Stokes 現象と密接に関係していたのと同様に、fixed singularity は (ポテンシャルの係数といった) パラメータを変化させたときに起こる WKB 解の Borel 和の Stokes 現象と深く関わっている。

Remark 8. Weber 方程式への変換論を用いることにより、一般のポテンシャルに対する 2 点単純変わり点問題 (two simple turning points problem) についても関係式 (55) や (58) を (多少の修正の下に) 示すことができる。詳しくは [AKT2] を参照。

4 Future problems

以上見てきたように、Schrödinger 方程式の WKB 解の Borel 変換は一般に movable singularity と fixed singularity という 2 種類の特異点をもっており、それぞれが WKB 解の Borel 和の 2 種類の Stokes 現象と密接に関係している。入門的な解説として本稿では、簡単な例の解析を通じてこのあたりの状況を確かめてきた。より一般の (次数の大きい) ポテンシャルをもった Schrödinger 方程式の場合は、多数の変わり点が存在するためより多くの movable singularity や fixed singularity が現れ、WKB 解の Borel 変換の特異点の構造は非常に複雑になる。WKB 解の Borel 総和可能性や resurgence 性を証明するためには、こうした複雑な Borel 変換の特異点やその alien derivative の構造を如何に上手に扱うかが一つの鍵となる。完全 WKB 解析の大きな特徴であるモノドロミー群や Stokes 現象を非常に具体的に扱えるという点を生かすためにも、WKB 解の Borel 変換の特異点の構造をうまく扱える枠組を与えることが望まれる。

さらに、Schrödinger 方程式の場合の解析を、高階の線型方程式や非線型の Painlevé 方程式に拡張することも重要な問題である。これらの方程式に対する形式的なレベルでの Stokes 現象の解析はかなり進展したが、Borel 変換の特異点の構造の解明はまだまだ不十分である。こうしたより挑戦的な問題の解決に向けて、若い人達の活躍を期待したい。

References

- [AKT1] 青木貴史, 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学 — exact WKB analysis について —, 数学, 45(1993), 299–315.

- [AKT2] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: The Bender-Wu analysis and the Voros theory. II, *Adv. Stud. Pure Math.*, Vol. 54, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2009, pp. 19–94.
- [CNP] B. Candelpergher, J.C. Nosmas and F. Pham: *Approche de la résurgence*, Hermann, Paris, 1993.
- [CDK] O. Costin, L. Dupaigne and M.D. Kruskal: Borel summation of adiabatic invariants, *Nonlinearity*, **17**(2004), 1509–1519.
- [DDP] E. Delabaere, H. Dillinger and F. Pham: Résurgence de Voros et périodes des courbes hyperelliptiques, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **43**(1993), 163–199.
- [DP] E. Delabaere and F. Pham: Resurgent methods in semi-classical asymptotics, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **71**(1999), 1–94.
- [DLS] T.M. Dunster, D.A. Lutz and R. Schäfke: Convergent Liouville-Green expansions for second-order linear differential equations, with an application to Bessel functions, *Proc. Roy. Soc. London, Ser. A*, **440**(1993), 37–54.
- [E1] J. Ecalle: Les fonctions résurgentes, Tome I, II, III, *Publ. Math. d’Orsay*, Univ. Paris-Sud, 1981 (Tome I, II), 1985 (Tome III).
- [E2] ———: Weighted products and parametric resurgence, *Analyse algébrique des perturbations singulières. I*, Hermann, Paris, 1994, pp. 7–49.
- [FS] A. Fruchard and R. Schäfke: On the parametric resurgence for a certain Schrödinger equation, preprint, 2010.
- [KT] 河合隆裕, 竹井義次: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008 (1998年刊行の講座版の単行本化) .
- [S] D. Sauzin: Resurgent functions and splitting problems, 数理解析研究所講究録, No. 1493, 2006, pp. 48–117.
- [T1] Y. Takei: An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271–296.
- [T2] ———: Sato’s conjecture for the Weber equation and transformation theory for Schrödinger equations with a merging pair of turning points, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B10**(2008), 205–224.
- [V] A. Voros: The return of the quartic oscillator. The complex WKB method, *Ann. Inst. H. Poincaré*, **39**(1983), 211–338.