数理解析研究所講究録
第 1768 巻 2011 年 38-54

Heterodimensional tangencies leading to hyperbolic sets and wild hyperbolic strange attractors

首都大学東京　西澤　由輔[1]　(Yusuke Nishizawa)
Department of Mathematics and Information Sciences,
Tokyo Metropolitan University

1　導入

この論説では，図 1 のように，サドル型不動点 p と q に同伴するヘテロ次元接触 r を含むヘテロ次元サイクルをもつ 3 次元多様体上の C^1 微分同相写像 φ について，最近得られた結果を報告する．ここで，p は $\mathrm{Index}(p)=1$ をみたし，q は $\mathrm{Index}(q)=2$ をみたすものとする．

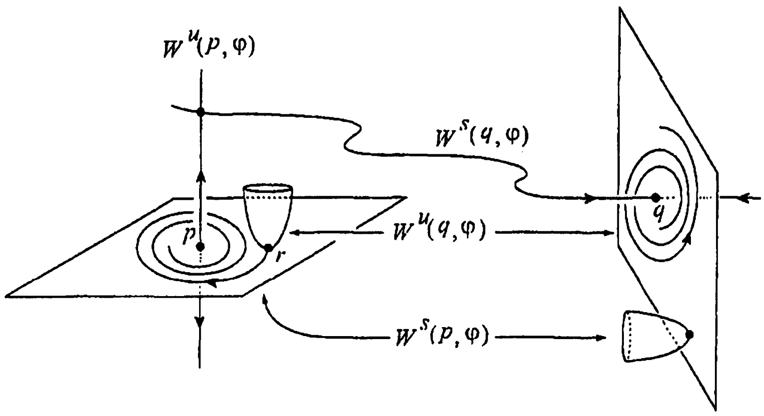

図 1: ヘテロ次元接触 r を含むヘテロ次元サイクル．

φ が p と q に同伴する**ヘテロクリニックサイクル**をもつとは，

$$W^s(p,\varphi)\cap W^u(q,\varphi)\neq\emptyset \text{ かつ } W^u(p,\varphi)\cap W^s(q,\varphi)\neq\emptyset$$

をみたすことをいう．このヘテロクリニックサイクルが $\mathrm{Index}(p)\neq\mathrm{Index}(q)$ をみたすとき，**ヘテロ次元サイクル**という．特に，$\mathrm{Index}(p)=\mathrm{Index}(q)+1$ をみたすとき **co-index one サイクル**という．また，ヘテロクリニック点 $r\in W^s(q,\varphi)\cap W^u(p,\varphi)$ が

$$T_rW^s(q,\ \varphi)+T_rW^u(p\ \varphi)\neq T_rM \quad \text{かつ}$$

$$\dim(T_rW^s(q,\ \varphi))+\dim(T_rW^u(p,\ \varphi))>\dim(M)$$

をみたすとき，この r を $W^s(q,\varphi)$ と $W^u(p,\varphi)$ の**ヘテロ次元接触**という．

ヘテロ次元サイクルはホモクリニック接触と同様に 1970 年代に Newhouse や Palis 等によって導入された概念であり，ホモクリニック接触とは異なる力学系である．これに関して，近年では Bonatti や Diaz 達 [6, 2, 4, 1, 3, 5] によって様々な結果が得られている．

[1] 日本学術振興会特別研究員 PD

ワイルドな双曲型ストレンジアトラクターについては，Turaev-Silnikov [22, 23] や Gonchenko 達 [11, 12] によって研究されている．特に，[11] では，図 2 のように 2 次のヘテロクリニック接触を含むヘテロクリニックサイクルをもつ 3 次元微分同相写像から，ワイルドな双曲型ストレンジアトラクターの存在を導いている．図 2 の $\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}$ の 3 つのパラメータについては後で説明を加える．ここで，φ のアトラクター Λ が**ワイルドな双曲型**であるとは，次の条件をみたすときをいう．

(W1) Λ はホモクリニック接触をもつ．

(W2) C^2 位相で Λ に近いすべてのアトラクターは安定周期軌道をもたない．

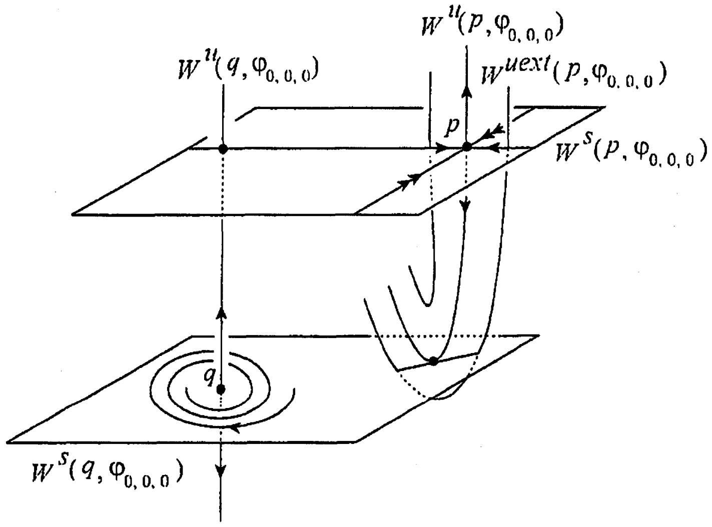

図 2: 2 次のヘテロクリニック接触を含むヘテロクリニックサイクル．

次に先行研究について述べる．一つは，Gavrilov-Silnikov [9, 10]，Homburg-Weiss [15]，Li [16]，Rios [20] 等によるホモクリニック接触を含む微分同相写像に関して，ホモクリニック接触のいくらでも近くに双曲型不変集合の存在を示した先行研究である．彼等は，図 3 のように，2 次元のホモクリニック接触を含む微分同相写像を考え，ホモクリニック接触に近いところに boxB_n や B をとり，不安定多様体 $W^u(p)$ に沿って再び boxB_n や B と交わる状況下で馬蹄の存在を示している．このとき，B_n や B の縦方向の厚さ等は安定多様体，不安定多様体の固有値や box が戻ってくる反復の回数に依存することに注意する．また，Gonchenko-Gonchenko-Tatjer [8]，Nishizawa [17]，Rayskin [19] 等は，一般次元への拡張を考えている．この論説で述べる研究では，先行研究で扱うホモクリニック接触ではなく，ヘテロ次元接触の近くでの双曲型不変集合の構成を考える．

もう一つは，Gonchenko-Silnikov-Turaev [11] によるワイルドな双曲型ストレンジアトラクターの研究である．彼等は，次の条件 (C1) から (C4) をみたし，向きを保つ C^4 微分同相写像の 3 パラメータ族 $\{\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}\}$ を考え，ワイルドな双曲型ストレンジアトラクターの存在を示している．

(C1) $\varphi_{0,0,0}$ は二つの不動点 p と q をもち，q は multipliers$(\lambda e^{i\theta\pi}, \lambda e^{-i\theta\pi}, \gamma_1)$ をもち，p は real multipliers$(\lambda_1, \lambda_2, \gamma_2)$ をもつ．ここで，$0 < \lambda < 1 < \gamma_1, \theta \in (0,1), 0 < |\lambda_2| < |\lambda_1| < 1 < |\gamma_2|$ である．

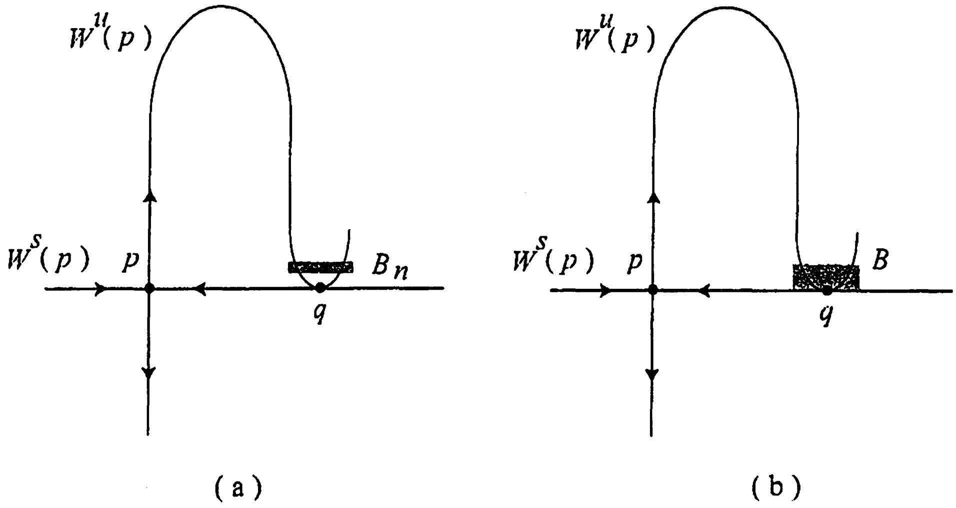

図 3: ホモクリニック接触 q と box B_n と box B.

(C2) 不動点に関する $\varphi_{0,0,0}$ のヤコビアンの絶対値は一方が 1 より小さく，もう一方は 1 より大きい.

(C3) 不安定多様体 $W^u(q, \varphi_{0,0,0})$ と安定多様体 $W^s(p, \varphi_{0,0,0})$ は横断的に交わる．不安定多様体 $W^u(p, \varphi_{0,0,0})$ と安定多様体 $W^s(q, \varphi_{0,0,0})$ は 2 次のホモクリニック接触をもつ.

(C4) Extended 不安定多様体 $W^{uext}(p, \varphi_{0,0,0})$ ([21] を参照) は安定多様体 $W^s(q, \varphi_{0,0,0})$ と横断的に交わる（局所 extended 多様体 $W^{uext}_{\mathrm{loc}}(p, \varphi_{0,0,0})$ は $\varphi_{0,0,0}$-不変の $W^u_{\mathrm{loc}}(P, \varphi_{0,0,0})$ を含み，λ_1 と λ_2 の固有空間に接する 2 次元曲面である）.

図 2 がこれらの条件をみたす $\varphi_{0,0,0}$ の状況である．パラメータ $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ についての詳細は，[11] を参照してほしい．簡潔に述べると，一番目のパラメータ ϵ_1 は，不安定多様体 $W^u(p, \varphi_{0,0,0})$ と安定多様体 $W^s(q, \varphi_{0,0,0})$ のヘテロクリニック 2 次の接触に関するパラメータであり，$\epsilon_1 = 0$ のときに接触をもち，$\epsilon_1 \neq 0$ のときは接触をもたないようなパラメータである．2 番目のパラメータ ϵ_2 は，[7] で導入されたパラメータで q の複素固有値の回転に関するパラメータであり，3 番目のパラメータ ϵ_3 は，二つの固有値のヤコビアンの絶対値に関するパラメータである.

このような C^4 微分同相写像の 3 パラメータ族 $\{\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}\}$ に関して，Gonchenko-Silnikov-Turaev は次のような定理を証明している.

定理 1(Gonchenko-Silnikov-Turaev [11]). 3 パラメータ族 $\{\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}\}$ を上の条件 (C1) から (C4) をみたすものとする．このとき，パラメータ空間の中の $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (0, 0, 0)$ の任意の近傍に対して，$\varphi_{\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3}$ が無限個のワイルドな双曲型ストレンジアトラクターをもつように $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ が稠密となるような開領域 $\mathcal{N}$（ニューハウス領域）が存在する.

この先行研究はヘテロクリニックサイクルに関する結果であるが，この論説で述べる研究では，ヘテロ次元サイクルからでもワイルドな双曲型アトラクターが導かれることを考える．また，ヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつ 3 次元多様体上の微分同相写像とストレンジアトラクターの先行研究については，Kiriki-Nishizawa-Soma [13] がある．主定理は以下の通りである.

定理 2(Nishizawa [18]). M を 3 次元多様体とし，φ をサドル型不動点 p と q に同伴するヘテロ次元サイクルをもつ M 上の C^1 微分同相写像で次をみたすものとする．ただし，p と q は $\mathrm{Index}(p)=1$，$\mathrm{Index}(q)=2$ をみたすとする．

(1) p は multipliers $(\sigma_s e^{\pi\theta i}, \sigma_s e^{-\pi\theta i}, \sigma_u)$ をもち，q は multipliers $(\lambda_s, \lambda_u e^{\pi\tilde{\theta} i}, \lambda_u e^{-\pi\tilde{\theta} i})$ をもつ．ただし，$0<\sigma_s<1<\sigma_u<1/\sigma_s$，$\theta\in(0,1)$ かつ $0<\lambda_s<1<\lambda_u, \tilde{\theta}\in(0,1)$, $\lambda_u^2\lambda_s\geq 1$ とする．

(2) φ は局所安定多様体 $W^s_{\mathrm{loc}}(p,\varphi)$ 上に heterodimensional tangency r をもつ．

このとき，M 上の C^1 微分同相写像の 1 パラメータ族 $\{\psi_\mu\}_{\mu\in[0,\delta']}$ が次の条件をみたすように存在する．

(1) ψ_0 は C^1 位相で φ にいくらでも近く，ヘテロ次元接触 r_{ψ_0} を含むヘテロ次元サイクルをもつ．ここで，r_{ψ_0} はヘテロ次元接触 r の continuation である．

(2) 任意の整数 $N>0$ に対して，ある整数 $n\geq N$ と領域 B_n と $0\leq\delta_1<\delta_2$ となる δ_1,δ_2 が次の条件をみたすように存在する．

$$\text{任意の}\mu\in[\delta_1,\delta_2]\text{ に対して},\Lambda_{n,\mu}=\bigcap_{i=-\infty}^{\infty}\psi_\mu^{in}(B_n)\text{ は双曲型不変集合.}$$

(3) もし $\delta_1=0$ かつ $\mu=0$ で $\Lambda_{n,0}$ が双曲型不変集合となるならば，$\Lambda_{n,0}$ はヘテロ次元接触 r_{ψ_0} のいくらでも近くに存在する．

図 1 が定理 2 の仮定の状況を表している．この定理 2 より，ヘテロ次元接触と双曲型不変集合が近くにある関係が分かるので，次の系を得ることができる．

系 3(Nishizawa [18]). M を 3 次元多様体とし，φ を定理 2 で与えられたヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつ M 上の C^1 微分同相写像とする．このとき，φ に C^1 位相でいくらでも近い C^1 微分同相写像 $\tilde{\varphi}$ と整数 $n>0$ が次の条件をみたすように存在する．

(1) $\tilde{\varphi}^n$ は二つの不動点 Q と R をもち，次の条件をみたす．Q は multipliers$(\lambda_s^n, \lambda_u^n e^{\pi\rho i}, \lambda_u^n e^{-\pi\rho i})$ をもつ．ただし $0<\lambda_s<1<\lambda_u$ かつ $\rho\in(0,1)$ である．R は real multipliers $(\alpha_s,\alpha_u,\alpha_{uu})$ をもつ．ただし $0<\alpha_s<1<\alpha_u<\alpha_{uu}$ である．

(2) R と Q に関する不変多様体は次の条件をみたす．

(a) $W^u(R,\tilde{\varphi}^n)$ と $W^s(Q,\tilde{\varphi}^n)$ は横断的に交わる．

(b) $W^s(R,\tilde{\varphi}^n)$ と $W^u(Q,\tilde{\varphi}^n)$ は接する．

系 3 は C^1 位相の世界の話であるが，いくらかの仮定を加えることによって，定理 1 を適用できるので，次の系が得られる．

系 4(Nishizawa [18]). M を 3 次元多様体とし，φ を定理 2 で与えられたヘテロ次元接触を含むヘテロ次元サイクルをもつ M 上の向きを保つ C^1 微分同相写像とする．さらに，$\lambda_u^2\lambda_s=1$ とする．このとき，φ に C^1 位相でいくらでも近い C^4 微分同相写像 $\tilde{\varphi}$ でワイルドな双曲型ストレンジアトラクターを無限個持つものが存在する．

2 証明の概略

ここでは，定理 2 の証明の概略について述べる．

2.1 C^1 微分同相写像の 1 パラメータ族 $\{\varphi_\mu\}$ の構成

定理 2 の φ はヘテロ次元接触 r を含むヘテロ次元サイクルをもつので，次の条件をみたす M 上の C^1 微分同相写像の 1 パラメータ族 $\{\psi_\mu\}_{\mu\in[0,\delta]}$ が構成できる．

(1) ψ_0 は C^1 位相で φ にいくらでも近く，ψ_0 は p と q の continuation$P$ と Q に同伴するヘテロ次元サイクルをもつ．

(2) P と Q の局所座標 $U(P)$ と $U(Q)$ が存在し，次の条件 (2.a) と (2.b) をみたす．

(2.a) 任意の $\mu\in[0,\delta]$ と $(x,y,z)\in U(P)$ に対して，$\psi_\mu(x,y,z)=(\mathcal{A}_\theta(x,y),\sigma_u z)$．ただし，$\mathcal{A}_\theta=\sigma_s\begin{pmatrix}\cos\pi\theta & -\sin\pi\theta\\ \sin\pi\theta & \cos\pi\theta\end{pmatrix}$ かつ $0<\sigma_s<1<\sigma_u$ であり，$\theta\in(0,1)$ は無理数である．

(2.b) 任意の $\mu\in[0,\delta]$ と $(x,y,z)\in U(Q)$ に対して，$\psi_\mu(x,y,z)=(\lambda_s x,\mathcal{B}_{\tilde{\theta}}(y,z))$．ただし，$\mathcal{B}_{\tilde{\theta}}=\lambda_s\begin{pmatrix}\cos\pi\tilde{\theta} & -\sin\pi\tilde{\theta}\\ \sin\pi\tilde{\theta} & \cos\pi\tilde{\theta}\end{pmatrix}$ かつ $0<\lambda_s<1<\lambda_u$ であり，$\tilde{\theta}\in(0,1)$ は無理数である．

(3) 擬横断点 $Y_P=(0,0,\tilde{z})\in W^u_{\rm loc}(P,\psi_0)\cap W^s(Q,\psi_0)$ が $U(P)$ 上に存在し，次の (3.a) から (3.d) の条件をみたす．

(3.a) 任意の $\mu\in[0,\delta]$ に対して，$Y_P=(0,0,\tilde{z})\in W^u_{\rm loc}(P,\psi_\mu)\cap W^s(Q,\psi_\mu)$．

(3.b) Y_P を含む $W^s(Q,\psi_\mu)\cap U(Y_P)$ の連結成分は P の局所座標 $U(P)$ の中で，x 軸と平行である．

(3.c) 整数 $l>0$ が存在して，

$$Y_Q=\psi_\mu^l(Y_P)=(\tilde{x},0,0)\in W^s_{\rm loc}(Q,\psi_\mu)\cap W^u(P,\psi_\mu).$$

(3.d) Y_P の近傍 $U(Y_P)\subset U(P)$ が存在して，

$$\mathfrak{T}^\pm=\psi_\mu^l:U(Y_P)\to\psi_\mu^l(U(Y_P))\subset U(Q)$$

はアフィン写像で

$$\mathfrak{T}^\pm(x,y,z)=\psi_\mu^l(x,y,z)=(\tau_s x,\pm y,\tau_u z)+(\tilde{x},0,-\tau_u\tilde{z})$$

となる．ただし，τ_s かつ τ_u は定数で $0<|\tau_s|<1<|\tau_u|$ をみたす．

(4) 二つの円盤 $D^s_\mu\subset W^s_{\rm loc}(P,\psi_\mu)$ (resp. $\tilde{D}^s_\mu\subset W^s_{\rm loc}(P,\psi_\mu)$) と $D^u_\mu\subset W^u(Q,\psi_\mu)\cap U(P)$ が存在して，次の (4.a) から (4.c) の条件をみたす．

(4.a) $D_0^s \cap D_0^u$ (resp. $D_0^s \cap \tilde{D}_0^u$) はヘテロ次元接触 $r_{\psi_0} = (x_P, 0, 0) \in U(P)$ を含む. ただし, r_{ψ_0} は r の continuation である.

(4.b) D_μ^u (resp. $\tilde{D}_\mu^u$) は $r_{\psi_\mu} = (x_P, 0, \mu)$ を含む.

(4.c) 任意の $\mu \in [0, \delta]$ と十分小さい $\epsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned} D_\mu^s &= \{(x, y, z) \in U(P) : (x - x_P)^2 + y^2 < \epsilon, z = 0\}, \\ D_\mu^u &= \{(x, y, z) \in U(P) : x_P - \epsilon < x < x_P + \epsilon, \\ &\qquad -\epsilon < y < \epsilon, z = (x - x_P)^2 + \mu\} \\ (\text{resp. } \tilde{D}_\mu^u &= \{(x, y, z) \in U(P) : x_P - \epsilon < x < x_P + \epsilon, \\ &\qquad -\epsilon < y < \epsilon, z = -(x - x_P)^2 + \mu\}). \end{aligned}$$

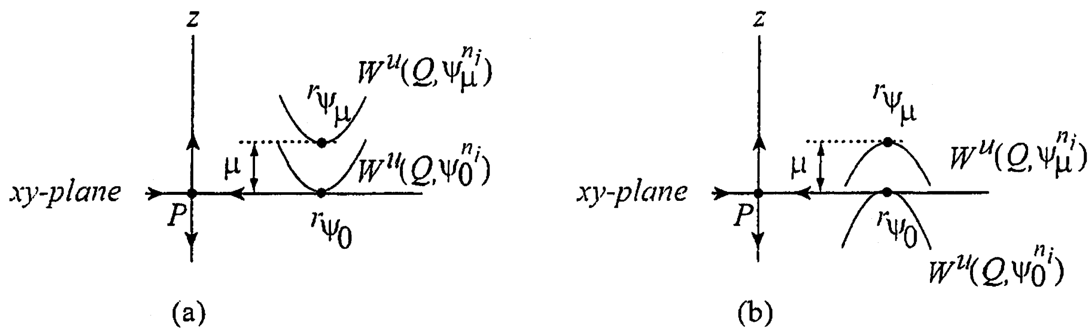

図 4: (a) xz 平面による D_μ^u の切断面. (b) xz 平面による $\tilde{D}_\mu^u$ の切断面.

(5) 整数 $m > 0$ が存在して次の (5.a) から (5.c) の条件をみたす.

(5.a) $\psi_0^{-m}(r_{\psi_0}) = (0, 0, z_Q)$ は $U(Q)$ 上の点で, $W^s(P, \psi_0)$ と $W_{\mathrm{loc}}^u(Q, \psi_0)$ に含まれるヘテロ次元接触である.

(5.b) L_μ を r_{ψ_μ} を含む $W^u(Q, \psi_\mu) \cap U(r_{\psi_\mu}) \cap U(P)_{[y=0]}$ の連結成分とすると $\psi_\mu^{-m}(L_\mu)$ は $U(Q)$ 上の z 軸に含まれる. ただし, $U(P)_{[y=0]}$ は $U(Q)$ 上の xz 平面.

(5.c) 任意の $\mu \in [0, \delta]$ に対して, $G_\mu^{\pm}$ (resp. $\tilde{G}_\mu^{\pm}$) $= \psi_\mu^m : U(\psi_\mu^{-m}(r_{\psi_\mu})) \subset U(Q) \to U(r_{\psi_\mu}) \subset U(P)$ は次の形である:

$$\begin{aligned} G_\mu^{\pm}(x, y, z) &= \psi_\mu^m(x, y, z) = (x_P + a(z - z_Q), \pm by, -cx + d(z - z_Q)^2 + \mu) \\ (\text{resp. } \tilde{G}_\mu^{\pm}(x, y, z) &= \psi_\mu^m(x, y, z) = (x_P + a(z - z_Q), \pm by, cx - d(z - z_Q)^2 + \mu)), \end{aligned}$$

ただし a, b, c, d は定数で a, c, $d > 0$ かつ $0 < b < 1$ である.

上の条件 (1) から (5) で (2.a) と (2.b) を除いたものを保つように C^1 摂動を ψ_μ に加えることによって, ψ_μ^{new} の回転角 θ^{new} (resp. $\tilde{\theta}^{\mathrm{new}}$) が, 摂動前の無理数 θ^{old} (resp. $\tilde{\theta}^{\mathrm{old}}$) に近い有理数とすることができる. 以後, この有理数回転をもつ C^1 微分同相写像 ψ_μ^{new} を再び ψ_μ とかくことにする.

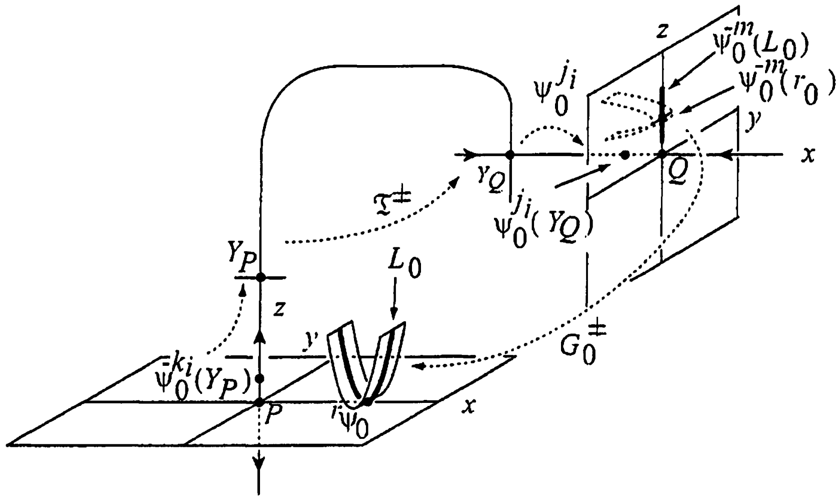

図 5: r_{ψ_0} を含むヘテロ次元サイクル.

2.2 双曲型不変集合の構成

ここでは，r_{ψ_0} の近くでどのようにして双曲型不変集合を構成するかを述べる．前の節で与えられた整数 $l > 0$ と整数 $m > 0$ は固定しておく．実数 $\bar{w} > 0$, $w' > 0$, $h_i > 0$ と整数 $k_i, j_i > 0$ を次の条件をみたすようにとる．

(1) $\lim_{i\to\infty} k_i = \infty$, $\lim_{i\to\infty} j_i = \infty$ かつ $k_i\theta, j_i\tilde{\theta} \in \mathbb{N}$.

(2) $c\lambda_s^{j_i}(\sigma_s^{k_i}\tau_s x_Q - \sigma_s^{k_i}\tau_s\bar{w} + \tilde{x}) = \dfrac{3h_i}{\sigma_u^{k_i}}$.

(3) $\lambda_s^{j_i}\sigma_u^{k_i} < 1$ かつ $\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i} > 1$.

(4) $\dfrac{\tilde{z} + h_i}{\sigma_u^{k_i}} < \delta$.

(5) $\bar{w} > 0$ と $w' > 0$ は十分小さくて

$$B_i = \left\{(x, y, z) \in U(P) : x_P - \bar{w} \le x \le x_P + \bar{w},\right.$$
$$\left. -w' \le y \le w', \frac{\tilde{z} - h_i}{\sigma_u^{k_i}} \le z \le \frac{\tilde{z} + h_i}{\sigma_u^{k_i}}\right\}$$

は $U(P)$ に含まれる．

ψ_μ は任意の $\mu \in [0, \delta]$ に対して $U(P)$ 上では線形なので，

$$\psi_\mu^{k_i}(B_i) = \psi_0^{k_i}(B_i) = \left\{(\mathcal{A}_{\theta'}^{k_i}(x, y), z) \in U(P) : x_P - \bar{w} \le x \le x_P + \bar{w},\right.$$
$$\left. -w' \le y \le w', \tilde{z} - h_i \le z \le \tilde{z} + h_i\right\}$$ となる．

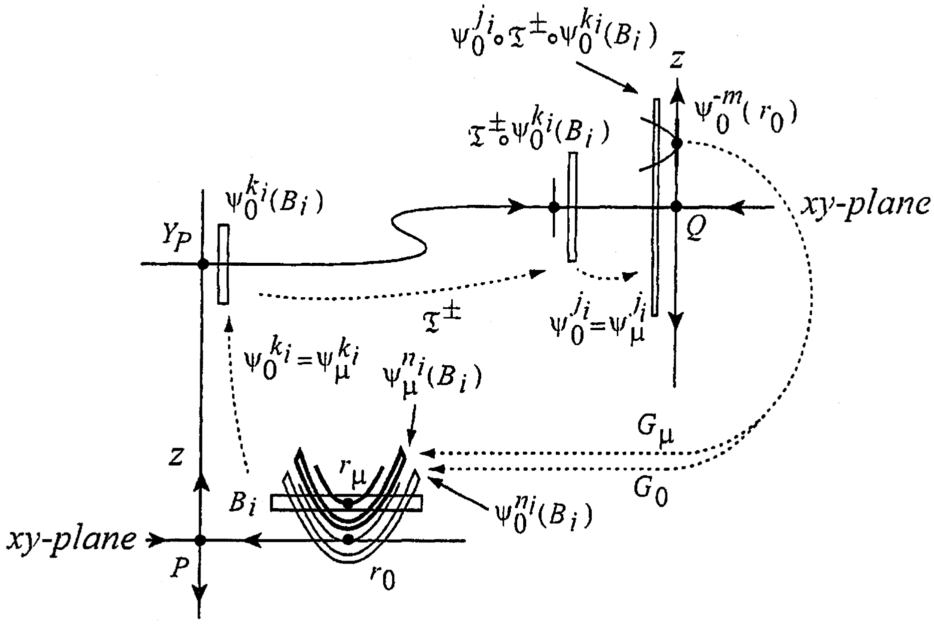

図 6: 局所的には線形な写像である $\psi_\mu^{k_i}$ と $\psi_\mu^{j_i}$ と大域的な写像である $\mathfrak{T}^{\pm}$ と $G_\mu^{\pm}$ に関する説明.

$k_i\theta' \in \mathbb{N}$ なので，$\mathcal{A}_{\theta'}^{k_i}(x,y) = (\sigma_s^{k_i}x, \sigma_s^{k_i}y)$ が十分大きい i に対して成立するので，

$$\psi_\mu^{k_i}(B_i) = \psi_0^{k_i}(B_i) = \Big\{(x,y,z) \in U(P) : \sigma_s^{k_i}(x_P - \bar{w}) \le x \le \sigma_s^{k_i}(x_P + \bar{w}),$$
$$-\sigma_s^{k_i}w' \le y \le \sigma_s^{k_i}w', \tilde{z} - h_i \le z \le \tilde{z} + h_i\Big\}.$$

さらに，$\psi_\mu^{k_i}(B_i)$ は Y_P にいくらでも近く，$\psi_\mu^{k_i}(B_i)$ は Y_P を含む $W^s(Q,\psi_\mu) \cap U(Y_P)$ の連結成分と横断的に交わり，$U(Y_P)$ から $\psi_\mu^l(U(Y_P))$ 上への写像 $\mathfrak{T}^{\pm}$ はアフィン写像なので，

$$\mathfrak{T}^{\pm}\circ\psi_\mu^{k_i}(B_i) = \mathfrak{T}^{\pm}\circ\psi_0^{k_i}(B_i)$$
$$= \Big\{(x,y,z) \in U(Q) : \sigma_s^{k_i}\tau_s(x_P - \bar{w}) + \tilde{x} \le x \le \sigma_s^{k_i}\tau_s(x_P + \bar{w}) + \tilde{x},$$
$$-\sigma_s^{k_i}w' \le y \le \sigma_s^{k_i}w', -\tau_u h_i \le z \le \tau_u h_i\Big\} \text{となる.}$$

ψ_μ は任意の $\mu \in [0,\delta]$ に対して，$U(Q)$ 上で線形なので，

$$\psi_\mu^{j_i}\circ\mathfrak{T}^{\pm}\circ\psi_\mu^{k_i}(B_i) = \psi_0^{j_i}\circ\mathfrak{T}^{\pm}\circ\psi_0^{k_i}(B_i)$$
$$= \Big\{(x, \mathcal{B}_{\theta'}^{j_i}(y,z)) \in U(Q) : \lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s(x_P - \bar{w}) + \lambda_s^{j_i}\tilde{x}$$
$$\le x \le \lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s(x_P + \bar{w}) + \lambda_s^{j_i}\tilde{x},$$
$$-\sigma_s^{k_i}w' \le y \le \sigma_s^{k_i}w', -\tau_u h_i \le z \le \tau_u h_i\Big\}.$$

$j_i\tilde{\theta}' \in \mathbb{N}$ より，十分大きい i に対して，$B_{\tilde{\theta}'}^{j_i}(y,z) = (\lambda_u^{j_i} y, \lambda_u^{j_i} z)$ が成立するので，

$$
\begin{aligned}
\psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_\mu^{k_i}(B_i) &= \psi_0^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_0^{k_i}(B_i) \\
&= \Big\{ (x,y,z) \in U(Q) : \lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s (x_P - \bar{w}) + \lambda_s^{j_i} \tilde{x} \\
&\qquad\qquad \le x \le \lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s (x_P + \bar{w}) + \lambda_s^{j_i} \tilde{x}, \\
&\qquad\qquad -\lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} w' \le y \le \lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} w', -\lambda_u^{j_i} \tau_u h_i \le z \le \lambda_u^{j_i} \tau_u h_i \Big\}.
\end{aligned}
$$

$G_\mu^{\pm}$ と $\tilde{G}_\mu^{\pm}$ は $U(\psi_\mu^{-m}(r_{\psi_\mu}))$ から $U(P)$ 上への２次写像なので，２次曲線のように曲がった box $G_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_\mu^{k_i}(B_i)$，$G_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\mp} \circ \psi_\mu^{k_i}(B_i)$，$\tilde{G}_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_\mu^{k_i}(B_i)$，$\tilde{G}_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\mp} \circ \psi_\mu^{k_i}(B_i)$ が考えられる．これらは，r_{ψ_μ} にいくらでも近く，r_{ψ_0} を含む $W^u(Q,\psi_\mu) \cap U(P)$ と平行である．$n_i = k_i + j_i + l + m$ と置くと，$(x,y,z) \in B_n$ に対して，$\psi_\mu^{n_i}(x,y,z)$ は次の四つの形のどれか一つになる．

$$
\begin{aligned}
\psi_\mu^{(n_i,+,+)}(x,y,z) &= G_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_\mu^{k_i}(x,y,z) \\
&= (x_P + a(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q), \\
&\qquad b\lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} y, -c(\lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s x + \lambda_s^{j_i} \tilde{x}) + d(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q)^2 + \mu),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_\mu^{(n_i,-,+)}(x,y,z) &= G_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\mp} \circ \psi_\mu^{k_i}(x,y,z) \\
&= (x_P + a(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q), \\
&\qquad - b\lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} y, -c(\lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s x + \lambda_s^{j_i} \tilde{x}) + d(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q)^2 + \mu),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_\mu^{(n_i,+,-)}(x,y,z) &= \tilde{G}_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\pm} \circ \psi_\mu^{k_i}(x,y,z) \\
&= (x_P + a(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q), \\
&\qquad b\lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} y, -c(\lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s x + \lambda_s^{j_i} \tilde{x}) + d(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q)^2 + \mu),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\psi_\mu^{(n_i,-,-)}(x,y,z) &= \tilde{G}_\mu^{\pm} \circ \psi_\mu^{j_i} \circ \mathfrak{T}^{\mp} \circ \psi_\mu^{k_i}(x,y,z) \\
&= (x_P + a(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q), \\
&\qquad - b\lambda_u^{j_i} \sigma_s^{k_i} y, -c(\lambda_s^{j_i} \sigma_s^{k_i} \tau_s x + \lambda_s^{j_i} \tilde{x}) + d(\lambda_u^{j_i} \sigma_u^{k_i} \tau_u z - \lambda_u^{j_i} \tau_u \tilde{z} - z_Q)^2 + \mu).
\end{aligned}
$$

$(\psi_\mu^{(n_i,-,\pm)})^2$ の力学系は $(\psi_\mu^{(n_i,+,\pm)})^2$ と同じなので，$\psi_\mu^{n_i} = \psi_\mu^{(n_i,+,+)}$ か $\psi_\mu^{n_i} = \psi_\mu^{(n_i,+,-)}$ の場合について考えれば十分である．$\delta' = \dfrac{\tilde{z} + h_i}{\sigma_u^{k_i}}$ とし，もし $\psi_\mu^{n_i}$ が $\psi_\mu^{(n_i,+,+)}$ であるならば，$\tilde{\delta} = 0$．もし $\psi_\mu^{n_i}$ が $\psi_\mu^{(n_i,+,-)}$ であるならば $\tilde{\delta} = \dfrac{\tilde{z} - h_i}{\sigma_u^{k_i}}$ とする．このように，δ' と $\tilde{\delta}$ を定めることによって，任意の $\mu \in [\tilde{\delta}, \delta']$ に対して，$\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ は伸びて，B_i の天井と底の両方を図７のように２回横断するように交わる．さらに，$\mu = \delta'$ とすると，$r_{\varphi_{\delta'}}$ を含む $W^u(Q, \varphi_{\delta'}) \cap U(P)$ の連結成分は B_i の天井と図７のように接する．

次に $\psi_\mu^{n_i}$ について不安定錐と安定錐を構成する．$\psi_\mu^{(n_i,+,-)}$ について不安定錐は $\psi_\mu^{(n_i,+,+)}$ の場合と同様に構成できるので，$\psi_\mu^{n_i}$ が $\psi_\mu^{(n_i,+,+)}$ の場合について考えれば十分である．

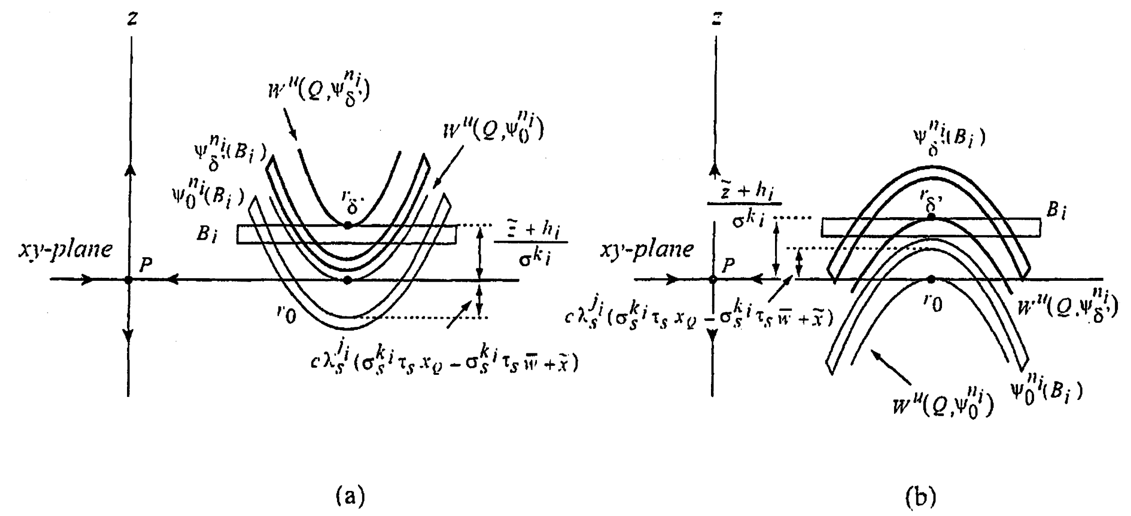

図 7: (a) 2 次曲線のように曲がった box $\psi_\mu^{(n_i,\pm,+)}(B_i)$. (b) 2 次曲線のように曲がった box $\psi_\mu^{(n_i,\pm,-)}(B_i)$.

$(x,y,z)\in B_i\cap\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対して，$\psi_\mu^{-n_i}(x,y,z)=(x_{-1},y_{-1},z_{-1})\in B_i$ とし，B_i の縦線を $\hat L$ を考える．この縦線は (x_{-1},y_{-1}) が固定されていて，

$$\frac{\tilde z-h_i}{\sigma_u^{k_i}}\le z_{-1}\le\frac{\tilde z+h_i}{\sigma_u^{k_i}}.$$

である．$\hat L\subset B_i$ なので，$\psi_\mu^{n_i}(\hat L)$ は $(x,y,z)\in U(P)$ で次の条件をみたす．

$$\begin{aligned}
x&=x_P+a(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z_{-1}-\lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde z-z_Q),\\
y&=b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}y_{-1},\\
z&=-c(\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s x_{-1}+\lambda_s^{j_i}\tilde x)+d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z_{-1}-\lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde z-z_Q)^2+\mu
\end{aligned}$$

ただし z_{-1} は $\dfrac{\tilde z-h_i}{\sigma_u^{k_i}}\le z_{-1}\le\dfrac{\tilde z+h_i}{\sigma_u^{k_i}}$ 　をみたす．

よって，$\hat L$ は平面 $y=b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}y_{-1}$ に含まれて，2 次曲線

$$z=-c(\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s x_{-1}+\lambda_s^{j_i}\tilde x)+\frac{d}{a}(x-x_P)^2+\mu$$

となることが分かる．ここで $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{2d}{a^2}(x-x_P)$ なので，$\psi_\mu^{n_i}$ の傾きの絶対値は $\xi(s)=\left|\dfrac{2d}{a^2}(x-x_P)\right|$ で与えられる．ベクトル (u,v) と (u,v,w) に対して，各々$\|(u,v)\|=\max\{|u|,|v|\}$, $\|(u,v,w)\|=\max\{|u|,|v|,|w|\}$ とし，$s=(x,y,z)\in\psi_\mu^{-n_i}(B_i)\cap B_i\cap\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対して，錐を次のように定義する．

$$C^{uu}(s)=\left\{(v_1,v_2,v_3);\frac{|v_3|}{\|(v_1,v_2)\|}\ge\frac{1}{2}\xi(s)\right\},$$

$$C^{u}(s)=\left\{(v_1,v_2,v_3);\frac{|v_1|}{\|(v_2,v_3)\|}\le\frac{2}{\xi(s)}\right\}\quad \text{かつ}$$

$$C^{s}(s)=\left\{(v_1,v_2,v_3);\frac{|v_1|}{\|(v_2,v_3)\|}\ge\frac{2}{\xi(s)}\right\}.$$

補題 1. $s=(x,y,z)\in\psi_\mu^{-n_i}(B_i)\cap B_i\cap\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対し,

$$\frac{\sqrt{cd\tilde{x}}}{6a}\lambda_s^{\frac{1}{2}j_i}<\xi(x)\le\frac{2dw'}{a}.$$

証明 1. $\mu\in\left[\bar{\delta},\frac{\tilde{z}+h_i}{\sigma_u^{k_i}}\right]$ かつ $z>\frac{\tilde{z}-h_i}{\sigma_u^{k_i}}$ より,

$$\begin{aligned}\xi(x)&=\frac{2d}{a^2}|x-x_P|=\frac{2\sqrt{d}}{a}\left|\left(z+c(\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s x_{-1}+\lambda_s^{j_i}\tilde{x})-\mu\right)^{\frac{1}{2}}\right|\\&\ge\frac{2\sqrt{d}}{a}\left|\left(\frac{\tilde{z}-h_i}{\sigma_u^{k_i}}+\frac{3h_i}{\sigma_u^{k_i}}-\frac{\tilde{z}+h_i}{\sigma_u^{k_i}}\right)^{\frac{1}{2}}\right|>\frac{\sqrt{d}}{a}\left(\frac{h_i}{\sigma_u^{k_i}}\right)^{\frac{1}{2}}\text{ が成立する.}\end{aligned}$$

$c\lambda_s^{j_i}(\sigma_s^{k_i}\tau_s x_Q-\sigma_s^{k_i}\tau_s\bar{w}+\tilde{x})=\frac{3h_i}{\sigma_u^{k_i}}$ より, 十分大きい i に対して,

$$\frac{1}{2}c\tilde{x}\lambda_s^{j_i}\le\frac{3h_i}{\sigma_u^{k_i}}\le 2c\tilde{x}\lambda_s^{j_i}\quad\text{が成り立つので}\quad\frac{1}{6}c\tilde{x}\sigma_u^{k_i}\lambda_s^{j_i}\le h_i\le\frac{2}{3}c\tilde{x}\sigma_u^{k_i}\lambda_s^{j_i}$$

が成立する. よって,

$$\frac{\sqrt{d}}{a}\left(\frac{h_i}{\sigma_u^{k_i}}\right)^{\frac{1}{2}}\ge\frac{\sqrt{cd\tilde{x}}}{6a}\lambda_s^{\frac{1}{2}j_i}.$$

ここで $|x-x_P|\le w'$ なので, $\xi(x)=\frac{2d}{a^2}|x-x_P|\le\frac{2dw'}{a^2}$ が成立する.

□

次に任意の $s\in\psi_\mu^{-n}(B_i)\cap B_i\cap\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対して, $C^{uu}(s)$ は $D\psi_\mu^{n_i}(s)$ 不変であり, $C^{uu}(s)$ に含まれるベクトルは $D\psi_\mu^{n_i}(s)$ で拡大することを示す.

補題 2. $s=(x,y,z)\in\psi_\mu^{-n}(B_i)\cap B_i\cap\psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対して, $D\psi_\mu^{n_i}(s)C^{uu}(s)\subset C^{uu}(\psi_\mu^{n_i}(s))$. さらに, 任意の $v\in C^{uu}(s)$ に対して $\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|>\|v\|$.

証明 2. $(v_1,v_2,v_3)\in C^{uu}(s)$, $(v_1',v_2',v_3')=D\psi_\mu^{n_i}(s)v$ とする.

$$D\psi_\mu^{n_i}(s)=\begin{pmatrix}0&0&a\lambda_u^{j_i}\tau_u\sigma_u^{k_i}\\0&b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}&0\\-c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s&0&2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z-\lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z}-z_Q)\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u\end{pmatrix}\text{ より}$$

$$\begin{aligned}D\psi_\mu^{n_i}(s)v=&(a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3,b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}v_2,\\&-c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s v_1+2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z-\lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z}-z_Q)\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3)\end{aligned}$$

が成立する. また, $(v_1,v_2,v_3)\in C^{uu}(s)$ なので, $|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|\ge|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_2|\frac{1}{2}\xi(s)$ が成立する. よって, 補題 1 より, $|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|\ge dw'|\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_2|\ge|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}v_2|$. ここで

$\xi(\psi_\mu^{n_i}(s)) = \dfrac{2d}{a}|(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tilde{z} - z_Q)|$ に注意をすると，次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{|v_3'|}{\|(v_2', v_3')\|} &= \frac{|-c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s v_1 + 2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tilde{z} - z_Q)\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|}{\|(a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3, b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}v_2)\|} \\
&= \frac{|-c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s v_1 + 2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tilde{z} - z_Q)\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|}{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|} \\
&\geq \frac{|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tilde{z} - z_Q)\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3| - |c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s v_1|}{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|} \\
&\geq \frac{|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tilde{z} - z_Q)|}{|a|} - \frac{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u|}\frac{|v_1|}{|v_3|} \\
&\geq \xi(\psi_\mu^{n_i}(s)) - \frac{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u|}\frac{2}{\xi(s)} \\
&\geq \xi(\psi_\mu^{n_i}(s)) - \frac{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u|}\frac{12a}{\sqrt{cd\tilde{x}}\lambda_s^{\frac{1}{2}j_i}} \\
&\geq \xi(\psi_\mu^{n_i}(s)) - \frac{|c\sigma_s^{k_i}\tau_s|}{|a\sigma_u^{k_i}\tau_u|}\frac{12a}{\sqrt{cd\tilde{x}}} \\
&\geq \frac{1}{2}\xi(\psi_\mu^{n_i}(s)).
\end{aligned}$$

よって，$D\psi_\mu^{n_i}(s)C^{uu}(s) \subset C^{uu}(\psi_\mu^{n_i}(s))$ が成立する．次に $C^{uu}(s)$ に含まれるベクトルが $D\psi_\mu^{n_i}(s)$ によって拡大することを示す．

$$\begin{aligned}
\frac{\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|}{\|v\|} &\geq \frac{|a\lambda_i^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|}{\frac{2}{\xi(s)}|v_3|} = \frac{a}{2}\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u\xi(s) \geq \frac{\sqrt{cd\tilde{x}}}{12}\sigma_u^{k_i}(\lambda_s\lambda_u^2)^{\frac{1}{2}j_i} \\
&\geq \frac{\sqrt{cd\tilde{x}}}{12}\sigma_u^{k_i} > 1.
\end{aligned}$$

□

補題 3. $s = (x, y, z) \in \psi_\mu^{-n_i}(B_i) \cap B_i \cap \psi_\mu^{n_i}(B_i)$ に対して，$D\psi_\mu^{-n_i}(s)C^s(\psi_\mu^{n_i}(s)) \subset C^s(s)$. さらに，任意の $v \in C^s(s)$ に対して，$\|D\psi_\mu^{-n_i}(s)v\| > \|v\|$.

証明 3. 任意の $(v_1, v_2, v_3) \in C^s(\psi_\mu^{n_i}(s))$ に対して，$(v_1', v_2', v_3') = D\psi_\mu^{-n_i}(s)v$ とする．補題1より，

$$\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} - \left(\frac{\lambda_s}{\lambda_u}\right)^{\frac{1}{2}j_i}\frac{1}{\sqrt{\xi(s)}} > 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{1}{\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1} - \left(\frac{\lambda_s^{j_i}}{\sigma_u^{k_i}}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{\xi(s)}} > 0$$

が成立する．これより，次の不等式が得られる．

$$\begin{aligned}
\frac{|v'_1|}{\|(v'_2, v'_3)\|} &= \frac{\frac{1}{|ac\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z} - z_Q)v_1 - av_3|}{\|(\frac{1}{b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}}v_2, \frac{1}{a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u}v_1)\|} \\
&\geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}|}{|ac\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z} - z_Q)v_1 - av_3|}{\|(v_1, v_2)\|} \\
&\geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}|}{|ac\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z} - z_Q)v_1 - av_3|}{(\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1)|v_1|} \\
&\geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}|}{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{|\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))| - \frac{|v_3|}{|v_1|}}{(\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1)} \geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}|}{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2}}{(\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1)} \\
&\geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}|}{|c\lambda_s^{j_i}|}\frac{\lambda_s^{j_i}}{\lambda_u^{\frac{1}{2}j_i}\sigma_u^{\frac{1}{2}j_i}}\frac{1}{\xi(s)} = |\frac{b}{c}|\frac{\lambda_u^{\frac{1}{2}j_i}}{\sigma_u^{\frac{1}{2}k_i}}\frac{1}{\xi(s)} \geq \frac{2}{\xi(s)}.
\end{aligned}$$

次に $C^s(s)$ に含まれるベクトルが $D\psi_\mu^{-n_i}(s)$ によって拡大することを示す．

$$\begin{aligned}
\frac{\|D\psi_\mu^{-n_i}(s)v\|}{\|v\|} &\geq \frac{\frac{1}{|ac\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}|2d(\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u z - \lambda_u^{j_i}\tau_u\tilde{z} - z_Q)v_1 - av_3|}{(\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1)|v_1|} \\
&\geq \frac{1}{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2}}{(\frac{\xi(\psi_\mu^{n_i}(s))}{2} + 1)} \geq \frac{1}{|c\lambda_s^{j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s|}\frac{\sqrt{cd\tilde{x}}\lambda_s^{\frac{1}{2}j_i}}{6a(\frac{dw'}{a^2} + 1)} \\
&\geq \frac{\sqrt{cd\tilde{x}}}{6ac\lambda_s^{\frac{1}{2}j_i}\sigma_s^{k_i}\tau_s}\frac{1}{\frac{dw'}{a^2} + 1} > 1.
\end{aligned}$$

よって補題が証明された．

□

補題 4. $s = (x, y, z) \in \psi_\mu^{-n_i}(B_i) \cap B_i \cap \psi_\mu^{n_i}(B_i)$，$v \in C^u(s)$ に対して，$\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\| > \|v\|$.

証明 4. 任意の $(v_1, v_2, v_3) \in C^u(s)$ に対して，$(v_1', v_2', v_3') = D\psi_\mu^{n_i}(s)v$ とする．次の 3 つの場合に分けて考える．$\max\{|v_1|, |v_2|, |v_3|\} = |v_1|$ の場合は，

$$\begin{aligned}
\frac{\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|}{\|v\|} &\geq \frac{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|}{|v_1|} \geq |a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u|\frac{\xi(s)}{2} \geq \frac{a\tau_u\sqrt{cd\tilde{x}}}{12a}(\lambda_u^2\lambda_s)^{\frac{1}{2}j_i}\sigma_u^{k_i} \\
&\geq \frac{a\tau_u\sqrt{cd\tilde{x}}}{12a}\sigma_u^{k_i} > 1.
\end{aligned}$$

$\max\{|v_1|, |v_2|, |v_3|\} = |v_2|$ の場合は，

$$\frac{\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|}{\|v\|} \geq \frac{|b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}v_2|}{|v_2|} = |b\lambda_u^{j_i}\sigma_s^{k_i}| > 1.$$

$\max\{|v_1|,|v_2|,|v_3|\}=|v_3|$ の場合は,

$$\frac{\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|}{\|v\|}\geq\frac{|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u v_3|}{|v_3|}=|a\lambda_u^{j_i}\sigma_u^{k_i}\tau_u|>1.$$

よって,補題が証明された.

□

以上より,定理 2 の証明の準備ができた.

証明 5 (定理 2 の証明). C^1 微分同相写像の *1* パラメータ族 $\{\psi_\mu\}$ の構成方法より,定理 2(1) が成り立つことは容易に分かる.定理 2(2) と (3) について説明を行う.$\Lambda_{n_i,\mu}=\bigcap_{m=-\infty}^{\infty}\psi_\mu^{mn_i}(B_i)$ とする.このとき,補題 2 より,任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ に対して,強不安定部分集合 $E^{uu}(s)$ が任意の $v\in E^{uu}(s)$ に対して,$D\psi_\mu^{n_i}(s)$ で拡大するように存在する.これより,ある定数 $C_{uu}>0$ と $\alpha_{uu}>1$ が任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ と $v\in E^{uu}(s)$ に対して,$\|D\psi_\mu^{-n_i}(s)v\|\leq C_{uu}\alpha_{uu}^{-1}\|v\|$ となるように存在することが分かる.また,補題 3 より,任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ に対して,安定部分集合 $E^s(s)$ が任意の $v\in E^s(s)$ に対して,$D\psi_\mu^{-n_i}(s)$ で拡大するように存在する.これより,ある定数 $C_s>0$ と $0<\alpha_s<1$ が任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ と $v\in E^s(s)$ に対して,$\|D\psi_\mu^{n_i}(s)v\|\leq C_s\alpha_s\|v\|$ となるように存在することが分かる.

さらに,$C^u(s)$ は $C^s(s)$ の補集合の閉方より,補題 4 から $D\psi_\mu^{n_i}(s)C^u(s)\subset C^u(\psi_\mu^{n_i}(s))$ が成立する.よって,中心部分集合 $F^u(s)$ が任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ と $v\in F^u(s)$ に対して,$D\psi_\mu^{n_i}(s)$ で拡大するように存在する.これより,ある定数 $C_u>0$ と $\alpha_u>1$ が任意の $s\in\Lambda_{n_i,\mu}$ と $v\in F^u(s)$ に対して,$\alpha_{uu}>\alpha_u$ かつ $\|D\psi_\mu^{-n_i}(s)v\|\leq C_u\alpha_u^{-1}\|v\|$ となるように存在する.このようにして定理 2(2) が証明できる.

定理 2(3) については,$\mu=0$ のときに $\psi_0^{n_i}$ はヘテロ次元接触 r_{ψ_0} を含むヘテロ次元サイクルをもつので,$\Lambda_{n_i,0}$ はヘテロ次元接触のいくらでも近くに存在することが分かる.このようにして定理 2(3) が証明できる.

□

2.3 系 3 の証明

証明 6 (系 3 の証明). 定理 2(2) より,双曲型不変集合 $\Lambda_{n_i,\mu}\subset B_i$ の存在が分かる.任意の $\mu\in[\tilde{\delta},\delta']$ に対して,双曲型不動点 $R_\mu\in\Lambda_{n_i,\mu}$ とかくことにする.不変多様体定理 ([*14*] を参照) より,強不安定多様体 $W^{uu}(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$,安定多様体 $W^s(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$,中心多様体 $W^{cs}(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$ が次の条件 (1) から (3) をみたすように存在する.

(1) $E^{uu}(R_\mu)$ は $W^{uu}(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$ に接する.

(2) $E^s(R_\mu)$ は $W^s(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$ に接する.

(3) $E^s(R_\mu)\oplus F^u(R_\mu)$ は $W^{cs}(R_\mu,\psi_\mu^{n_i})$ に接する.

$\mu=\delta'$ のときは $r_{\psi_{\delta'}}$ を含む連結成分 $W^u(Q,\psi_{\delta'}^{n_i})\cap U(P)$ が B_i の天井と接するので,中間値の定理より,$\tilde{\mu}\in[\tilde{\delta},\delta']$ が次の条件をみたすように存在することが分かる.

(1) $\psi_{\tilde{\mu}}^{n_i}$ は二つの不動点 Q と $R_{\tilde{\mu}}$ をもち，Q は *multipliers* $(\lambda_s^{n_i}, \lambda_u^{n_i} e^{\pi\rho i}, \lambda_u^{n_i} e^{-\pi\rho i})$ をもつ．ただし，$0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$ かつ $\rho \in (0,1)$ である．$R_{\tilde{\mu}}$ は *real multipliers* $\alpha_s, \alpha_u, \alpha_{uu}$ をもつ．ただし，$0 < \alpha_s < 1 < \alpha_u < \alpha_{uu}$ である．

(2) $W^u(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と $W^s(Q, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ は横断的に交わる．

(3) $W^s(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と $W^u(Q, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ はヘテロクリニック接触をもつ．

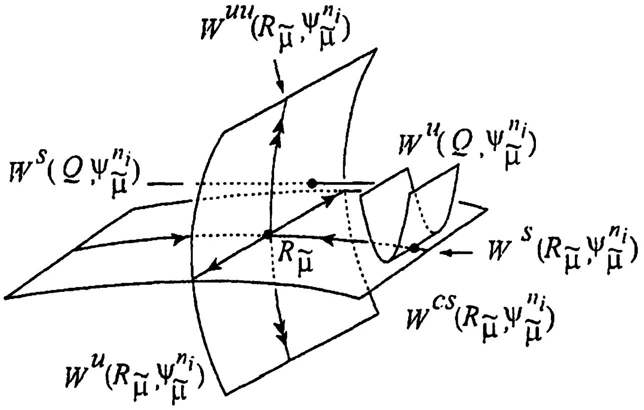

図 8: 系 3 の図による説明.

図 8 は上の条件 (2) と (3) の状況を表している．系 3 の証明はこのようにしてできる．

□

2.4 系 4 の証明

$\lambda_u^2 \lambda_s = 1$ といくつかの条件を微分同相写像に加えることによって系 4 を次のように証明することができる．

証明 7 (系 4 の証明). 定理 2 の仮定をみたし，向きを保つ C^1 微分同相写像 φ で $\lambda_u^2 \lambda_s = 1$ となるものを考える．系 3 より，向きを保つ C^1 微分同相写像 $\psi_{\tilde{\mu}}$ が次の条件をみたすように存在する．

(1) $W^s(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と $W^u(Q, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ はヘテロクリニック接触をもつ．また，$W^u(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ は $W^s(Q, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と横断的に交わる．

(2) $\det(D\psi_{\tilde{\mu}}^{n_i}(Q)) = (\lambda_u^2 \lambda_s)^{n_i} = 1$ かつ $\det(D\psi_{\tilde{\mu}}^{n_i}(R_{\tilde{\mu}})) = abc\sigma_s^{k_i}\sigma_s^{k_i}\sigma_u^{k_i} < 1$.

(3) $E^{uu}(R_{\tilde{\mu}}) \oplus F^u(R_{\tilde{\mu}})$ は $W^u(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と接し，$E^s(R_{\tilde{\mu}})$ は $R_{\tilde{\mu}}$ で $W^s(R_{\tilde{\mu}}, \psi_{\tilde{\mu}}^{n_i})$ と接する．

$\psi_{\tilde{\mu}}$ に C^1 摂動を加えることによって向きを保つ C^4 微分同相写像 $\tilde{\varphi}$ が次の条件をみたすように構成できる．

(1) $\tilde{\varphi}$ は C^1 位相で φ にいくらでも近い．

(2) $W^s(R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\varphi}^{n_i})$ と $W^u(Q, \tilde{\varphi}^{n_i})$ は 2 次のヘテロクリニック接触をもつ．さらに，$W^{cs}(R_{\tilde{\mu}}, \tilde{\varphi}^{n_i})$ は $W^u(Q, \tilde{\varphi}^{n_i})$ と横断的に交わる．

(3) $W^u(R_{\tilde\mu},\tilde\varphi^{n_i})$ と $W^s(Q,\tilde\varphi^{n_i})$ は 横断的に交わる.

(4) $\det(D\tilde\varphi^{n_i}(Q)) > 1$ かつ $\det(D\tilde\varphi^{n_i}(R_{\tilde\mu})) < 1$.

(5) Q は *multipliers* $(\lambda_s^{n_i}, \lambda_u^{n_i}e^{\pi\rho i}, \lambda_u^{n_i}e^{-\pi\rho i})$ をもつ．ただし，$0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$ かつ $\rho \in (0,1)$ である．$R_{\tilde\mu}$ は *real multipliers* $\alpha_s, \alpha_u, \alpha_{uu}$ をもつ．ただし，$0 < \alpha_s < 1 < \alpha_u < \alpha_{uu}$ である.

よって定理 1 を用いることができ，系 4 を証明することができる.

□

参考文献

[1] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Persistent nonhyperbolic transitive diffeomorphisms, *Ann . Math.* **143** (1996), 357–396.

[2] Ch. Bonatti and L. J. Díaz, Robust heterodimensional cycles and C^1-generic dynamics, *Journal of the Inst. of Math. Jussieu*, **7**(3) (2008), 469–525

[3] Ch. Bonatti. L. J. Díaz, and M. Viana, Dynamics beyond uniform hyperbolicity, Encyclopaedia of Mathematical Sciences (Mathematical Physics) **102**, Mathematical physics, III, Springer Verlag, 2005.

[4] L. J. Díaz, A. Nogueira and E. R. Pujals Heterodimensional tangencies, Nonlinearity **19** (2006), 2543–2566.

[5] L. J. Díaz and J. Rocha, Partially hyperbolic and transitive dynamics generated by heteroclinic cycles, *Ergod. Th. Dynam. Sys.* **21** (2001), 25–76.

[6] L. J. Díaz and R. Ures, Persistent homoclinic tangencies at the unfolding of cycles, *Ann. Inst. Henri Poincaré.* **11** (1994), 643–659.

[7] S. V. Gonchenko, Dynamics and moduli of Ω-conjugacy of 4D-diffeomorphisms with a structurally unstable homoclinic orbit to a saddle-focus fixed point. Methods of qualitative theory of differential equations and related topics, *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2* **200** (2000), 107–134.

[8] S. V. Gonchenko, V. S. Gonchenko and J. T. Tatjer. Bifurcations of three-dimensional diffeomorphisms with non-simple quadratic homoclinic tangencies and generalized Hénon maps, *Regular and Chaotic Dynamics* **12** (2007), 233-266.

[9] N. Gavrilov and L. P. Silnikov, On 3-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curves I. *Math. USSR Sb.* **88** (1972), 467–485.

[10] N. Gavrilov and L. P. Silnikov, On 3-dimensional dynamical systems close to systems with a structurally unstable homoclinic curves II. *Math. USSR Sb.* **90** (1973), 139–156.

[11] S. V. Gonchenko, L. P. Silnikov and D. V. Turaev, On global bifurcations in three-dimensional diffeomorphisms leading to wild Lorenz-like attractors, *Regular and Chaotic Dynamics* **14** (2009), 137-147.

[12] S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simó, and D. Turaev, Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.* **15** (2005), 3493–3508.

[13] S. Kiriki, Y. Nishizawa, and T. Soma, Heterodimensional Tangencies on cycles Leading To Strange Attractors, *Discreat Contin. Dynam. Syst.* **27** (2009), 285–300.

[14] M. W. Hirsch, C. C. Pugh and M. Shub, Invariant manifolds, *Lecture Notes in Mathematics* **583** (1997), Springer Verlag.

[15] A. J. Homburg and H. Weiss, A geometric criterion for positive topological entropy II; homoclinic tangencies, *Commun. Math. Phys.* **208** (1999), 267-273.

[16] M.-C. Li, Nondegenerate homoclinic tangency and hyperbolic sets, *Nonlinear Analysis* **52** (2003), 1521–1533.

[17] Y. Nishizawa, Existence of horseshoe sets with nondegenerate one-sided homoclinic tangencies in $\mathbb{R}^3$, *Hokkaido Math. J* **37** (2008), 133–145.

[18] Y. Nishizawa, Heterodimensional tangencies leading to hyperbolic sets and wild hyperbolic strange attractors, preprint.

[19] V. Rayskin, Homoclinic tangencies in $\mathbb{R}^n$, *Discrete and continuous Dynamical Systems* **12** (2005), 465–480.

[20] I. Rios, Unfolding homoclinic tangencies inside horseshoes: hyperbolicity, fractal dimensions and persistent tangencies, *Nonlinearity* **14** (2001), 431–462.

[21] A. L. Silnikov, L. P. Silnikov, D. V. Turaev and L. O. Chua, Methods of qualitative theory in nonlinear dynamics, part I, Singapore, World Sci.,1998.

[22] D. V. Turaev and L. P. Silnikov, An example of a wild strange attractor, *Mat. Sb.* **189** (1998), 291–314.

[23] D. V. Turaev and L. P. Silnikov, Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors, *Russian Dokl. Math.* **77** (2008), 17–21.