数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 52-67

単位元を持たないクランの右乗法作用素

九州大学大学院・数理学府　中島 秀斗 (Hideto NAKASHIMA)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

序.

有限次元実ベクトル空間 V の中の開集合かつ直線を含まない凸錐 Ω で，その上に線型変換群 $G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g\cdot\Omega = \Omega\}$ が推移的に作用しているものを等質錐と呼ぶ. $G(\Omega)$ の同時三角化可能な部分群 H で Ω に単純推移的に作用するものが存在する．この H を $G(\Omega)$ の岩沢部分群と呼ぶ. Ω の 1 点 E を固定して，軌道写像 $H \ni h \mapsto hE \in \Omega$ を考えるとこれは微分同相である．すると H の単位元における軌道写像の微分は H の Lie 代数 $\mathfrak{h}$ から V の上への線型同型写像となるので，その逆写像を $L : V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ とする．定義より $L_xE = x$ である. $x\triangle y := L_xy$ によって，V にクランと呼ばれる非結合的な代数構造が入る. $E \in \Omega$ が積 $\triangle$ における単位元となる.

より一般に, 有限次元実ベクトル空間 V の中の等質な開凸領域 U と単位元の存在を仮定しないクランが 1 対 1 に対応する．そして，単位元が存在することと開凸領域 U が開凸錐になることが同値となる (Vinberg [8]).

さて論文 Ishi [4] により，V 上の H 相対不変な既約多項式関数 $\Delta_1,\dots,\Delta_r$(r は Ω の階数) が存在して，V 上の任意の H 相対不変多項式関数 p は，スカラー倍を除いて

$$p(x) = \Delta_1(x)^{m_1}\cdots\Delta_r(x)^{m_r}\ (m_1,\dots,m_r\text{は非負整数})$$

と表される．この意味で $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ を等質錐 Ω に付随する基本相対不変式と呼ぶ．クランの右乗法作用素 $R_x : y \mapsto y\triangle x\ (x \in V)$ の行列式 $\det R_x$ は H 相対不変であるので $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ の積で表されることがわかるが, 論文 Ishi-Nomura [6] より，より強い結果が得られている：すなわち，$\det R_x$ の既約因子として $\Delta_1(x),\dots,\Delta_r(x)$ の全てが現れる．このことより，クランの右乗法作用素について調べることは有意義なことであることがわかる．この性質は等質開凸錐に対して成り立つ性質であるが，これを一般の等質凸領域に拡張することを目指している.

本稿ではユークリッド型の単純ジョルダン代数 V とその自己共役な表現 (φ,E) (ただ

し $\dim E > 0$) から得られるクラン V_E に対しての考察と結果をまとめた．$(V, \triangle_V)$ をジョルダン代数 V に付随するクランとし，φ により定まる E 上の対称双線型形式を Q で表す．そして $\underline{\varphi(x)}$ を $\underline{\varphi(x)} + \underline{\varphi(x)}^* = \varphi(x)$ を満たす下三角型の線型写像としたとき，$V_E := E \oplus V$ に積 $\triangle$ を

$$(\xi + x)\triangle(\eta + y) := \underline{\varphi(x)}\eta + (Q(\xi, \eta) + x\triangle_V y) \quad (\xi, \eta \in E,\ x, y \in V)$$

で定義したものは単位元を持たないクランになる (定理 3.1)．特に，対応する等質凸領域は II 型の実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ となり等質開凸錐ではない．

クラン V_E の右乗法作用素の行列式をそのままで考えると $V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R})$ かつ $E = \mathbb{R}^r$ のときを除いて $\det R_x = 0$ となる (命題 3.4) ので，一般には既約因子を考察することはできない．そこで V_E に単位元を添加したクラン V_E^0 を考察する．V_E^0 に対応する領域は等質凸錐 Ω^0 になり，よって V_E^0 の右乗法作用素の行列式は基本相対不変式がその既約因子としてすべて現れる．等質凸錐 Ω^0 を原点を通らない超平面で切った切り口は $D(\Omega, Q)$ と微分同相になる ([8]) が，等質凸錐 Ω^0 の相対基本不変式をこの超平面に制限したものが実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ を特徴付けることがわかった (定理 4.3)．その意味でこの多項式を基本多項式とよぶ．4 章において対称錐が正定値エルミート行列のなす錐である場合とローレンツ錐である場合に関しての基本多項式を計算した．この結果が等質実ジーゲル領域上の解析への足がかりとなると期待している．

1　等質開凸錐.

V を有限次元の実ベクトル空間とし，Ω を V の開凸錐とする．開凸錐 Ω が直線を含まないとき，Ω を正則開凸錐という．正則開凸錐 Ω の線型同型群を $G(\Omega)$ で表す．すなわち，

$$G(\Omega) := \{g \in GL(V)\ ;\ g \cdot \Omega = \Omega\}$$

とする．$G(\Omega)$ は $GL(V)$ の閉部分群であるので Lie 群となる．$G(\Omega)$ が Ω に推移的に作用するとき，正則開凸錐 Ω は等質であるという．$G(\Omega)$ は Ω の 1 点 x_0 を固定する固定部分群 K と，$G(\Omega)$ の極大な連結三角部分群 H(岩沢部分群) により

$$G(\Omega) = KH, \quad K \cap H = \{e\} \quad (e \text{ は } G(\Omega) \text{ の単位元})$$

のよう分解され，$G(\Omega)$ の岩沢部分群 H は分裂可解 Lie 群で Ω に単純推移的に働く ([8])．Ω 上の関数 f が H に関して相対不変であるとは，H のある 1 次元表現 χ が存在して，任意の $g \in H$, $x \in \Omega$ に対して

$$f(gx) = \chi(g)f(x)$$

を満たすことをいう．このとき以下の定理が成り立つ．

定理 1.1 (Ishi [4])． V の既約で相対不変な多項式関数 $\Delta_1,\ldots,\Delta_r$ $(r=\mathrm{rank}(\Omega))$ が存在して，V 上の任意の相対不変な多項式関数 $P(x)$ は次のように書ける：

$$P(x)=c\Delta_1(x)^{m_1}\cdots\Delta_r(x)^{m_r}\quad (c\in\mathbb{R},\ (m_1,\ldots,m_r)\in\mathbb{Z}^r_{\geq 0}).$$

クランの右乗法作用素 R を $R_xy:=y\triangle x$ と定義する．$\det R_x$ は H に関して相対不変であるので定理 1.1 が成り立つが，より強い次の定理が成り立つことが知られている．

定理 1.2 (Ishi-Nomura [6])． W をクラン V の複素化とし，W における右乗法作用素も同じ記号 R で表すことにする．このとき，$\det R_w$ $(w\in W)$ の既約因子は丁度 $\Delta_1(w),\ldots,\Delta_r(w)$ である．

これは Ω が等質開凸錐のときに成り立つ定理である．では一般に Ω が錐ではない等質凸領域であるときも成立するかということは自然に生じる問題である．

2 ジョルダン代数とクラン．

実ベクトル空間 V に演算 $\circ$ が定義されていて以下の 2 条件

$$\begin{array}{rcl} x\circ y &=& y\circ x, \\ x\circ(x^2\circ y) &=& x^2\circ(x\circ y) \end{array}\qquad (x,y\in V)$$

を満たすとき V はジョルダン代数であるいう．ただし，この演算に結合法則は仮定しない．ジョルダン代数 V がユークリッド型であるとは，V に内積が与えられていて，ジョルダン代数の乗法作用素 $M(x):V\ni y\mapsto x\circ y\in V$ $(x\in V)$ がこの内積に関して自己共役であるときをいう．また V が非自明なイデアルを含まないとき単純であるという．以下，ユークリッド型の単純ジョルダン代数を単にジョルダン代数と呼ぶことにする．ジョルダン代数と対称錐は 1 対 1 に対応している (Faraut-Koranyi [3])．また Vinberg [8] にあるように，一般の等質開凸領域にはクランと呼ばれる非結合的な代数が 1 対 1 に対応している．ここで実ベクトル空間 V がクランであるとは，V に双線型な積 $\triangle$ が定義されており，$L_xy:=x\triangle y$ に対して

1. $(V,\triangle)$ は左対称である：$[L_x,L_y]=L_{x\triangle y-y\triangle x}$,
2. $s\in V^*$ が存在して $s(x\triangle y)$ は V に内積を定める．この s を認容線型形式という，
3. 各 $x\in V$ に対して，L_x の固有値は実数のみである，

の 3 条件をみたすことをいう．対称錐は特別な等質開凸領域であるので，ジョルダン代数にクラン構造を導入することができる．

V を階数が r のジョルダン代数とし，その単位元を e_0 とする．ジョルダン枠 $c_1, \ldots, c_r$（原始冪等元の完全直交系）を一つ固定して，$c_1, \ldots, c_r$ に対応する Peirce 分解を

$$V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ji}$$

とする．ここで $V_{ii} = \mathbb{R}c_i$, $V_{ji} = \left\{x \in V \ ; \ M(c_k)x = \frac{1}{2}(\delta_{ik} + \delta_{jk})x\right\}$ である．

ジョルダン代数 V に対し，以下のようにすれば V にクラン構造が入る．$\Omega := \mathrm{Int}\{x^2 \ ; \ x \in V\}$ を V の対称錐とし，$G(\Omega)$ を Ω の自己同型群，$\mathfrak{g}(\Omega)$ を $G(\Omega)$ の Lie 代数とする．

$$\mathfrak{k} := \mathrm{Der}(V), \qquad \mathfrak{p} := \{M(x) \ ; \ x \in V\}$$

とおくと，Cartan 分解 $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} + \mathfrak{p}$ を得る．

$$\mathfrak{a} := \mathbb{R}M(c_1) \oplus \cdots \oplus \mathbb{R}M(c_r)$$

は $\mathfrak{p}$ に含まれる $\mathfrak{g}(\Omega)$ の可換部分代数で極大なものとなる．$\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ を $\mathfrak{a}^*$ の基底で，$M(c_1), \ldots, M(c_r)$ と双対なものとする．正の $\mathfrak{a}$ ルートは $\frac{1}{2}(\alpha_j - \alpha_i)$ $(1 \leq i < j \leq r)$ で，対応するルート空間 $\mathfrak{n}_{ji}$ は，

$$\mathfrak{n}_{ji} := \{z \Box c_i \ ; \ z \in V_{ji}\}$$

である．ただし，$a \Box b := M(ab) + [M(a), M(b)]$ である．

$$\mathfrak{n} := \sum_{1 \leq i < j \leq r} \mathfrak{n}_{ji}$$

とおくと，$\mathfrak{n}$ はべき零な Lie 部分代数で，岩沢分解 $\mathfrak{g}(\Omega) = \mathfrak{k} + \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を与える．ここで，$A := \exp \mathfrak{a}$, $N := \exp \mathfrak{n}$ とおくと，A は $G(\Omega)$ の可換部分群であり，N は $G(\Omega)$ のべき零部分群となり，さらに A は N を正規化する．$H := N \rtimes A$, $\mathfrak{h} := \mathrm{Lie}(H)$ とすると，H は Ω に単純推移的に作用する．よって，$H \ni h \mapsto h \cdot e \in \Omega$ の H の単位元における微分 $\mathfrak{h} \ni X \mapsto X \cdot e \in V$ は線型同型となる．この逆写像を $V \ni x \mapsto L_x \in \mathfrak{h}$ で表す．このとき，V に積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := L_x \, y \quad (x, y \in V)$$

と定義すると V はクランとなる．ここでクラン $(V, \triangle)$ の正規分解はジョルダン代数 V の Peirce 分解と一致し，ジョルダン代数の積とクランの積との間には以下のような関係が成り立つ．

命題 2.1. (1) $L_{c_i} = M(c_i) \quad (i = 1, \ldots, r)$,
(2) $L_x = 2x \Box c_i \quad (x \in V_{ji} : \ 1 \leq i < j \leq r)$.

以下ジョルダン代数 $(V,\circ)$ にはトレース内積 $\langle x\,|\,y\rangle_V = \mathrm{tr}(xy)$ により内積が入っているものとし，V 上の線型変換 T のこの内積に関する共役を T^* で表す．命題 2.1 から直ちにわかることとして

$$M(x) = \frac{1}{2}(L_x + L_x^*) \qquad (x \in V).$$

一方でクラン $(V,\triangle)$ には $(x\,|\,y)_V = \mathrm{Tr}\,L_{x\triangle y}$ により内積が入る．$\mathrm{Tr}\,L_{x\triangle y} = \mathrm{Tr}(M(xy))$ が証明できるので，二つの内積には次の関係がある．

命題 2.2. $n = \dim V$ とするとき

$$(x\,|\,y)_V = \frac{n}{r}\langle x\,|\,y\rangle_V.$$

特に V 上の線型変換について，どちらの内積で共役をとっても同じである．

3 表現に付随するクラン.

$(V,\circ)$ をジョルダン代数とし，(φ, E) をジョルダン代数 V の自己共役な表現とする．ただし $\dim E > 0$ とする．ユークリッド空間 E 上の対称双線型形式 Q を

$$(\varphi(x)\xi\,,\,\eta)_E = \langle Q(\xi,\eta)\,|\,x\rangle_V \qquad (x \in V,\ \xi,\eta \in E) \tag{3.1}$$

により定義する．そこで $V_E := E \oplus V$ とおき，V_E に積 $\triangle$ を次のように定義する：

$$(\xi + x)\triangle(\eta + y) := \underline{\varphi(x)}\eta + (Q(\xi,\eta) + x\triangle_V y) \quad (\xi,\eta \in E,\ x,y \in V).$$

ただし $(V,\triangle_V)$ はジョルダン代数 V に付随するクランであり，$\underline{\varphi(x)}$ は $\underline{\varphi(x)} + \underline{\varphi(x)}^* = \varphi(x)$ を満たす下三角型の線型写像である．

定理 3.1. このように定義した $(V_E,\triangle)$ は単位元を持たないクランになる．

証明. 次の補題を用いて証明される．

補題 3.2. (1) $L_xQ(\xi,\eta) = Q(L_x\xi,\eta) + Q(\xi, L_x\eta) \quad (x \in V,\ \xi,\eta \in E)$,
(2) $\varphi(x\triangle y) = \underline{\varphi(x)}\varphi(y) + \varphi(y)\underline{\varphi(x)}^* \quad (x,y \in V)$.

V_E の積の定義より，V_E の左乗法作用素 L' は，

$$L'_{\xi+x} = \begin{pmatrix} \underline{\varphi(x)} & 0 \\ Q(\xi,\cdot) & L_x \end{pmatrix}$$

となる．ここで L はクラン V の左乗法作用素である．$\underline{\varphi(x)}$ および L_x はいずれも下三角型であるので $L'_{\xi+x}$ も下三角型になる．補題 3.2 (1) より，任意の $\zeta \in E$ に対して

$$\begin{aligned}
&Q(\xi,\underline{\varphi(y)}\zeta)+L_xQ(\eta,\zeta)-Q(\eta,\underline{\varphi(x)}\zeta)-L_yQ(\xi,\zeta)\\
&=Q(\xi,\underline{\varphi(y)}\zeta)+Q(\underline{\varphi(x)}\eta,\zeta)+Q(\eta,\underline{\varphi(x)}\zeta)-Q(\eta,\underline{\varphi(x)}\zeta)-Q(\underline{\varphi(y)}\xi,\zeta)-Q(\xi,\underline{\varphi(y)}\zeta)\\
&=Q(\underline{\varphi(x)}\eta-\underline{\varphi(y)}\xi,\zeta).
\end{aligned}$$

また補題 3.2(2) と $\varphi(x)=\underline{\varphi(x)}+\underline{\varphi(x)}^*$ であることより

$$\begin{aligned}
\varphi(x\triangle y-y\triangle x)&=\underline{\varphi(x)}\,\underline{\varphi(y)}+\underline{\varphi(x)}\,\underline{\varphi(y)}^*+\underline{\varphi(y)}\,\underline{\varphi(x)}^*+\underline{\varphi(y)}^*\underline{\varphi(x)}^*\\
&\quad-\underline{\varphi(y)}\,\underline{\varphi(x)}-\underline{\varphi(y)}\,\underline{\varphi(x)}^*-\underline{\varphi(x)}\,\underline{\varphi(y)}^*-\underline{\varphi(x)}^*\underline{\varphi(y)}^*\\
&=[\underline{\varphi(x)},\underline{\varphi(y)}]+\left([\underline{\varphi(x)},\underline{\varphi(y)}]\right)^*
\end{aligned}$$

が成り立つ．ただし $[\underline{\varphi(x)},\underline{\varphi(y)}]=\underline{\varphi(x)}\,\underline{\varphi(y)}-\underline{\varphi(y)}\,\underline{\varphi(x)}$ である．これより $[x\triangle y]=x\triangle y-y\triangle x$ に対して

$$\underline{\varphi([x\triangle y])}=[\underline{\varphi(x)},\underline{\varphi(y)}]$$

となる．よって，

$$\begin{aligned}
[L'_{\xi+x},L'_{\eta+y}]&=\begin{pmatrix}\underline{\varphi(x)}\,\underline{\varphi(y)} & 0\\ Q(\xi,\underline{\varphi(y)}\cdot)+L_xQ(\eta,\cdot) & L_xL_y\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\underline{\varphi(y)}\,\underline{\varphi(x)} & 0\\ Q(\eta,\underline{\varphi(x)}\cdot)+L_yQ(\xi,\cdot) & L_yL_x\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}[\underline{\varphi(x)},\underline{\varphi(y)}] & 0\\ Q(\xi,\underline{\varphi(y)}\cdot)-Q(\eta,\underline{\varphi(x)}\cdot)+L_xQ(\eta,\cdot)-L_yQ(\xi,\cdot) & [L_x,L_y]\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}\underline{\varphi([x\triangle y])} & 0\\ Q(\underline{\varphi(x)}\eta-\underline{\varphi(y)}\xi,\cdot) & L_{[x\triangle y]}\end{pmatrix}\\
&=L'_{[(\xi+x)\triangle(\eta+y)]}
\end{aligned}$$

であるので，$(V_E,\triangle)$ は左対称代数になっている．クラン V の認容線型形式を $s(x)=\operatorname{Tr}L_x$ とする．ここで V_E 上の線型形式 $s':V_E\ni\xi+x\longmapsto s(x)\in\mathbb{R}$ を考える．

$$s'((\xi+x)\triangle(\eta+y))=s(\xi\triangle\eta)+s(x\triangle y)\quad(\xi,\eta\in E,\ x,y\in V)$$

となるので，s' は対称である．また

$$s(\xi,\eta)=\operatorname{Tr}L_{\xi\triangle\eta}=(Q(\xi,\eta)\,|\,e)_V=(\xi\,,\eta)_E$$

であるので結局 s' が V_E の認容線型形式を与える．以上より V_E はクランになる．単位元を持たないことは任意の $\xi\in E\backslash\{0\}$ に対して $\xi\triangle(\eta+y)=\xi$ となる $\eta+y\in V_E$ が存在しないことより明らかである． □

クランと等質凸領域は 1 対 1 に対応しているので，クラン V_E に対応する等質凸領域が存在する．

命題 3.3 (Vinberg [8])**.** クラン $(V_E, \triangle)$ に対応する等質凸領域はII型の実等質ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ になる．ただし，

$$D(\Omega, Q) = \left\{ \xi + x \in V_E \ ; \ x - \tfrac{1}{2}Q(\xi, \xi) \in \Omega \right\}.$$

クラン V_E の右乗法作用素 R' を計算しよう．クラン V_E の積の定義より基底を E, V の基底の順でとることにすると，クラン V の右乗法作用素 R を用いて

$$R'_{\xi+x}\begin{pmatrix}\eta\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & R'_\xi|_V\\ R'_\xi|_E & R_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\eta\\ y\end{pmatrix}$$

である．

命題 3.4. $\det R'_{\xi+x} = \left[\lambda^{\dim E - \dim V}\det R_{\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi)}\right]_{\lambda=0} \quad (\xi + x \in V_E).$

証明. 次の等式を用いる:

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix} = (\det A)\det(D - CA^{-1}B) \quad (\det A \neq 0).$$

任意の V の元 y に対して

$$\begin{aligned}R'_\xi|_E R'_\xi|_V y &= (y\triangle\xi)\triangle\xi = \frac{1}{2}((y\triangle\xi)\triangle\xi + \xi\triangle(y\triangle\xi))\\ &= \frac{1}{2}y\triangle(\xi\triangle\xi) = R_{\frac{1}{2}Q(\xi,\xi)}y\end{aligned}$$

が成り立つことに注意して，

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}0 & R'_\xi|_V\\ R'_\xi|_E & R_x\end{pmatrix} &= \left[\det\begin{pmatrix}\lambda\mathrm{id}_E & R'_\xi|_V\\ R'_\xi|_E & R_x\end{pmatrix}\right]_{\lambda=0}\\ &= \left[(\det\mathrm{id}_E)\det{}_V(R_x - R'_\xi|_E R'_\xi|_V)\right]_{\lambda=0}\\ &= \left[\lambda^{\dim E}\det{}_V(R_x - \tfrac{1}{2\lambda}R_{Q(\xi,\xi)})\right]_{\lambda=0}\\ &= \left[\lambda^{\dim E - \dim V}\det{}_V\ R_{\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi)}\right]_{\lambda=0}.\end{aligned}$$

以上で証明が終わる．　□

この結果と 4 章の基本多項式の計算により

$$\det R'_{\xi+x} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad V = \mathrm{Sym}(r, \mathbb{R}) \text{ and } E = \mathbb{R}^r$$

となり，それ以外の場合は常に $\det R'_{\xi+x} = 0$ となることが導かれる．

4 単位元を添加したクラン.

クラン V_E に単位元 e を添加したもの $V_E^0 := \mathbb{R}e \oplus V_E$ を考える．V の単位元を e_0 で表し，$u := e - e_0$ とおく．このとき $V_E^0 = \mathbb{R}u \oplus V_E$ でもある．この分解に即して V_E^0 でのクランの積は次のように表される：$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\xi, \eta \in E$, $x, y \in V$ に対して

$$(\lambda u + \xi + x)\triangle(\mu + \eta + y) = (\lambda\mu)u + (\xi + \tfrac{1}{2}\mu + \varphi(x)\eta) + (Q(\xi,\eta) + x\triangle_V y).$$

V_E^0 は単位元を持つクランであり，対応する等質凸領域は錐となる．よって基本相対不変式をもつ.

命題 4.1. V_E^0 の正規分解はクラン V の正規分解 $V = \bigoplus_{1\le i\le j\le r} V_{ji}$ と

$$V_{00} := \mathbb{R}u,\ V_{j0} := \varphi(c_j)E \quad (j = 1, \ldots, r)$$

を用いて以下のようになる：

$$V = \bigoplus_{0\le i\le j\le r} V_{ji}.$$

クラン V_E^0 の右乗法作用素 R^0 を計算する．クラン V_E^0 の積の定義より，基底の順を u, E, V の順でとることにすると，

$$R^0_{\lambda u+\xi+x}\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ \frac{1}{2}\xi & \lambda\mathrm{id}_E & R^0_\xi|_V\\ 0 & R^0_\xi|_E & R_x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu\\ \eta\\ y\end{pmatrix}$$

であるので命題 3.4 と同様の議論により以下が成り立つ.

命題 4.2. $\det R^0_{\lambda u+\xi+x} = \lambda^{1+\dim E-\dim V}\det R_{\lambda x-\frac{1}{2}Q(\xi,\xi)} \quad (\lambda u + \xi + x \in V_E^0).$

$\lambda u + \xi + x \in V_E^0$ とする．Δ_j $(j = 1, \ldots, r)$ をクラン V の基本相対不変式とすると，クラン V_E^0 の右乗法作用素は λ, $\Delta_j(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi))$ $(j = 1, \ldots, r)$ の積で表されるので，V_E^0 の基本相対不変式 $\tilde{\Delta}_i$ $(i = 0, \ldots, r)$ はこれらの既約因子となることがわかるが，次の章で見るように

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Delta}_0(\lambda u + \xi + x) = \lambda,\\
&\tilde{\Delta}_1(\lambda u + \xi + x) = \Delta_1(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)),\\
&\tilde{\Delta}_j(\lambda u + \xi + x) = \Delta_j(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)) \bmod \lambda \quad (j = 2, \ldots, r)
\end{aligned}$$

となることがわかる．ここで Ω^0 を $\lambda=1$ の超平面で切ったものを $\Omega^0_{\lambda=1}$ とかくと $\Omega^0_{\lambda=1}$ は等質凸領域となる ([8]) が，

$$\begin{aligned}\Omega^0_{\lambda=1} &= \{u+\xi+x \in V_E^0 \ :\ \tilde{\Delta}_k(u+\xi+x)>0\ (k=0,\ldots,r)\}\\ &= \{u+\xi+x \in V_E^0 \ :\ \Delta_k(x-\tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi))>0\ (k=1,\ldots,r)\}\\ &= \{u+\xi+x \in V_E^0 \ :\ x-\tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)\in\Omega\}\end{aligned}$$

となり $D(\Omega,Q)$ と同型になる．そこで V_E の元 $v=\xi+x$ に対して

$$\Delta_k^*(v) := \Delta_k(x-\tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)) \qquad (k=1,\ldots,r)$$

とおけば以下が成り立つ．

定理 4.3.　クラン V_E に対応する実ジーゲル領域は以下のように表すことができる：

$$D(\Omega,Q)=\{v\in V_E \ :\ \Delta_k^*(v)>0\ (k=1,\ldots,r)\}.$$

この意味で $\Delta_k^*(v)$ $(k=1,\ldots,r)$ を実ジーゲル領域 $D(\Omega,Q)$ の基本多項式と呼ぶことにする．

5　基本多項式を求める．

以下 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ とおき，$d=\dim\mathbb{K}$ とする．また $r=\operatorname{rank} V$ とし，W を n 次元のベクトル空間とする．行列 x に対して x が正定値であることを $x\gg 0$ と表し，x の左上からの k 次小行列式を $\det^{(k)} x$ とする．

ジョルダン代数は以下のように分類される ([3])：

$$\begin{cases} r=2 & \Rightarrow\quad V\cong\mathbb{R}\times W & :\text{ローレンツ型}\\ r\geq 3 & \Rightarrow\quad \begin{cases} V\cong \mathrm{Herm}(r,\mathbb{K}) & :\text{エルミート型}\\ V\cong\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O}) & :\text{例外型}\end{cases}\end{cases}$$

便宜上本稿において $r\geq 3$ のときをエルミート型と呼び，$r=2$ のときをローレンツ型と呼ぶことにする．また $\mathrm{Herm}(3,\mathbb{O})$ は例外型と呼ばれる．この中で例外型のものは Clerc [2] にもあるように，自明な表現しか存在しないので，本稿での考察の対象からは除かれる．この章ではジョルダン代数がエルミート型，ローレンツ型のときにおける基本多項式を求める．

5.1 エルミート型の場合. ($V = \mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})$)

$x, y \in V$ に対して積 $\circ$ を

$$x \circ y := \frac{1}{2}(xy + yx)$$

により定めるとこれはジョルダン代数になり，対応する対称錐は

$$\mathrm{Herm}(r, \mathbb{K})^+ = \{x \in V \ ; \ x \gg 0\}$$

である．1 章の手法にて得られる V のクランの構造は $x, y \in V$ に対して積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := \underline{x}y + y(\underline{x})^*$$

と定義したものになる．ただし，$\underline{x}$ は $\underline{x} + (\underline{x})^* = x$ を満たす下三角行列である．クラン V の右乗法作用素 R_x ($x \in V$) は x の左上からの k 次小行列式 $\Delta_k(x)$ を用いて

$$\det R_x = \Delta_1(x)^d \cdots \Delta_{r-1}(x)^d \Delta_r(x)$$

のように表すことができる．よって V の対称錐の相対基本不変多項式は k 次小行列式 $\Delta_k(x)$ になる．

(φ, E) がジョルダン代数 V の自己共役表現とすると，$E = \mathrm{Mat}(r \times p, \mathbb{K})$ であり，

$$\varphi(x)\xi = x\xi \quad (x \in V,\ \xi \in E)$$

となる．ここで右辺の積は行列としての積である．そして自己共役表現 φ に付随する対称双線型形式 Q は

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi\eta^* + \eta\xi^*) \quad (\xi, \eta \in E)$$

となる．

定理 5.1. V_E, V_E^0 は $\mathrm{Herm}(r + p, \mathbb{K})$ の部分クランと同型になる．その対応は

$$V_E \ni \xi + x \longmapsto \begin{pmatrix} O & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(r + p, \mathbb{K}),$$

$$V_E^0 \ni \lambda u + \xi + x \longmapsto \begin{pmatrix} \lambda I_p & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(r + p, \mathbb{K})$$

である．

$k \geq 2$ に対して $\Delta_k(Q(\xi,\xi)) = 0$ $(\xi \in E)$ であることから，$\Delta_k(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi))$ は λ を既約因子にもつ．更にその次数は 1 になるので，V_E^0 の基本不変多項式 $\tilde{\Delta}_j$ は

$$\begin{aligned}
&\tilde{\Delta}_0(\lambda u + \xi + x) = \lambda, \\
&\tilde{\Delta}_1(\lambda u + \xi + x) = \Delta_1(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)), \\
&\tilde{\Delta}_j(\lambda u + \xi + x) = \lambda^{-1}\Delta_j(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)) \quad (j = 2,\ldots,r)
\end{aligned}$$

となる．また命題 4.2 よりクラン V_E^0 の右乗法作用素 R^0 の行列式は

$$\det R_v^0 = \tilde{\Delta}_0(v)^{2+d(r-2)+\dim E - \dim V}\tilde{\Delta}_1(v)^d \cdots \tilde{\Delta}_{r-1}(v)^d\tilde{\Delta}_r(v) \quad (v \in V_E^0)$$

となる．ここで

$$X(\xi + x) := \begin{pmatrix} I_p & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x \end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(r+p, \mathbb{K})$$

とおくと，

$$\det{}^{(p+j)}\begin{pmatrix} \lambda I_p & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi^* \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x \end{pmatrix} = \lambda^{p-j}\Delta_j(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)) \quad (j = 0,\ldots,r)$$

であることより，クラン V_E に対応する実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ の基本多項式 Δ_k^* は

$$\Delta_k^*(\xi + x) = \Delta_k(x - \tfrac{1}{2}\xi\xi^*) = \det{}^{(p+k)}(X(\xi + x)) \quad (k = 1,\ldots,r)$$

のようになる．

5.2 ローレンツ型の場合．$(V = \mathbb{R} \oplus W)$

階数 2 のジョルダン代数はクリフォード代数の線型部分にジョルダン積を入れたものと同型になる．そこで W を $\dim W = n$ のベクトル空間としその基底を $e_1 \ldots, e_n$ で表す．そして e_0 をクリフォード代数 $\mathrm{Cl}(W)$ の単位元とし，$\mathrm{Cl}(W)$ の線型部分を V で表す．$(d_1,\ldots,d_n) \in S^n$ に対して $d = d_1e_1 + \cdots + d_ne_n$ とし，$c_1 = \frac{1}{2}(e_0 + d)$, $c_2 = \frac{1}{2}(e_0 - d)$ とすると，これらはジョルダン枠を定める．$\underline{x} = \frac{1}{2}(xc_1 + c_2x)$, $\underline{x}^* = \frac{1}{2}(c_1x + xc_2)$ とおいたとき,V に積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := \underline{x}y + y\underline{x}^* \quad (x, y \in V)$$

により定義すれば，V にクラン構造が入る．正規分解 $V = \bigoplus_{i \leq j} V_{ji}$ は

$$V_{11} = \mathbb{R}c_1, \quad V_{22} = \mathbb{R}c_2, \quad V_{21} = \{x \in V \ ; \ x \circ d = 0\}$$

となる．V の右乗法作用素 R の行列式は,$x = x_0e_0 + x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ としたとき

$$\det R_x = (x_0 + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n)^{n-1}\left(x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2\right)$$

となるので，ローレンツ錐の相対基本不変式 Δ_1，Δ_2 は

$$\begin{aligned}\Delta_1(x) &= x_0 + d_1x_1 + \cdots + d_nx_n,\\ \Delta_2(x) &= x_0^2 - x_1^2 - \cdots - x_n^2\end{aligned}$$

である．

命題 5.2 (Clerc [2])**.** $(\tilde{\varphi}, E)$ をクリフォード代数 $\mathrm{Cl}(W)$ の既約な自己共役表現とする．クリフォード代数は行列として実現することができ，表現空間 E も具体的に与えることができる．下の表において $\dim(W) \geq 2$ であるものを扱う．

$\dim(W)$	$\mathrm{Cl}(W)$	E	$\dim(E)$
$8k$	$\mathbb{R}(16^k)$	$\mathbb{R}^{16^k}$	16^k
$8k+1$	$\mathbb{R}(16^k) \oplus \mathbb{R}(16^k)$	$\mathbb{R}^{16^k}$	16^k
$8k+2$	$\mathbb{R}(2\cdot 16^k)$	$\mathbb{R}^{2\cdot 16^k}$	$2\cdot 16^k$
$8k+3$	$\mathbb{C}(2\cdot 16^k)$	$\mathbb{C}^{2\cdot 16^k}$	$4\cdot 16^k$
$8k+4$	$\mathbb{H}(2\cdot 16^k)$	$\mathbb{H}^{2\cdot 16^k}$	$8\cdot 16^k$
$8k+5$	$\mathbb{H}(2\cdot 16^k) \oplus \mathbb{H}(2\cdot 16^k)$	$\mathbb{H}^{2\cdot 16^k}$	$8\cdot 16^k$
$8k+6$	$\mathbb{H}(4\cdot 16^k)$	$\mathbb{H}^{4\cdot 16^k}$	$16\cdot 16^k$
$8k+7$	$\mathbb{C}(8\cdot 16^k)$	$\mathbb{C}^{8\cdot 16^k}$	$16\cdot 16^k$

このクリフォード代数の既約表現を V に制限した $(\varphi, E) = (\tilde{\varphi}|_V, E)$ が，そのままジョルダン代数 V の既約な自己共役表現となっている．φ に付随する双線型形式 Q は

$$Q(\xi, \eta) = \frac{1}{2}(\xi^*\eta)e_0 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\xi^*e_i\eta)e_i \quad (\xi, \eta \in V)$$

と表現できる．$V_E := E \oplus V$ の積 $\triangle$ は

$$\begin{aligned}&x\triangle y := x\triangle_V y, \quad \xi\triangle y := 0,\\ &\xi\triangle\eta := Q(\xi, \eta), \quad x\triangle\eta := \underline{\varphi(x)}\eta = \underline{x}\eta\end{aligned}$$

となる．ただし，$\underline{x}\eta$ は行列とみなしたときの積である．$\varphi(c_1)$，$\varphi(c_2)$ は互いに直交する射影作用素で階数は等しい．よって $E_i := \varphi(c_i)$ $(i = 1, 2)$ は互いに次元が等しく $E = E_1 \oplus E_2$ と直和分解できる．このとき，x の正規分解 $x = x_1c_1 + x_2c_2 + x_{21}$ $(x_i \in$

$\mathbb{R}$, $x_{21} \in V_{21}$) と $\xi = \xi_1 + \xi_2$, $\xi_i \in E_i$ $(i = 1, 2)$ に対して

$$\begin{aligned}\underline{\varphi(x)}\xi &= \tfrac{1}{2}(x_1c_1 + x_2c_2 + x_{21}c_1 + c_2x_{21})(\xi_1 + \xi_2)\\ &= \tfrac{1}{2}(x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_{21}\xi_1 + c_2x_{21}\xi_1 + c_2x_{21}\xi_2)\\ &= \tfrac{1}{2}((x_1\xi_1 + c_1x_{21}\xi_1) + (x_2\xi_2 + c_2x_{21}\xi_1 + c_2x_{21}\xi_2))\\ &= \tfrac{1}{2}x_1\xi_1 + (x_{21}\xi_1 + \tfrac{1}{2}x_2\xi_2)\end{aligned}$$

となる．ここでは $c_1x_{21}\xi_1 = \varphi(c_1)\varphi(x_{21})\xi_1 = 0$ となることなどを用いた．

V_E に単位元を添加したクラン V_E^0 の右乗法作用素 R^0 の行列式は

$$\det R^0_{\lambda u+\xi+x} = \lambda^{\dim E-n}\Delta_1(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi))^{n-1}\Delta_2(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi))$$

となる．$\Delta_2(Q(\xi,\xi)) = 0$ となるのは $n = 2, 3, 5, 9$ のときのみである ([2]) のでこの場合は $\Delta_2(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi))$ が既約因子 λ を持ち，更にその次数は 1 になる．これより等質錐 Ω^0 の基本不変多項式は

$$\begin{aligned}&\tilde{\Delta}_0(\lambda u + \xi + x) = \lambda,\\ &\tilde{\Delta}_1(\lambda u + \xi + x) = \Delta_1(\lambda x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)),\\ &\tilde{\Delta}_2(\lambda u + \xi + x) = \begin{cases}\Delta_2(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi)) & (n \neq 2, 3, 5, 9),\\ \lambda^{-1}\Delta_2(\lambda x - \frac{1}{2}Q(\xi,\xi) & (n = 2, 3, 5, 9)\end{cases}\end{aligned}$$

となり，V_E^0 の右乗法作用素 R^0 の行列式は

$$\alpha(n) = \begin{cases}\dim E - n & (n \neq 2, 3, 5, 9),\\ \dim E - n + 1 & (n = 2, 3, 5, 9)\end{cases}$$

を用いて

$$\det R^0_v = \tilde{\Delta}_0(v)^{\alpha(n)}\tilde{\Delta}_1(v)^{n-1}\tilde{\Delta}_2(v) \quad (v \in V_E^0)$$

となる．また実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ の基本多項式 Δ_k^* $(k = 1, 2)$ は

$$\begin{aligned}\Delta_1^*(\xi + x) &= \Delta_1(x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi)),\\ \Delta_2^*(\xi + x) &= \Delta_2(x - \tfrac{1}{2}Q(\xi,\xi))\end{aligned}$$

となる．さらに $E = \mathbb{K}^{2m}$ となっているとし，ジョルダン枠 c_1, c_2 が

$$c_1 = \begin{pmatrix} I_m & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\ c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & I_m\end{pmatrix}$$

であるとする．このとき $Q^\perp(\xi) = \xi\xi^* - Q(\xi,\xi)$ を用いて，

$$X(\xi + x) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi & x + \frac{1}{2}Q^\perp(\xi)\end{pmatrix} \in \mathrm{Herm}(2m+1, \mathbb{K})$$

とおけば，基本多項式 Δ_1^*，Δ_2^* は

$$\begin{cases} \Delta_1^*(\xi+x) = \det{}^{(1+m)}(X(\xi+x)), \\ \\ \Delta_2^*(\xi+x) = \det(X(\xi+x)) \end{cases} \qquad (\xi+x \in V_E)$$

のように表現することができる．

最後に $n=4$ の場合について，より詳細に記述しておこう．このとき

$$V = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 & \overline{w} \\ w & x_2 \end{pmatrix} \ : \ \begin{array}{l} x_1, x_2 \in \mathbb{R} \\ w = w_1 + iw_2 + jw_3 \in \mathbb{H} \end{array} \right\} \subset \mathrm{Herm}(2, \mathbb{H})$$

であり，対応する対称錐 Ω は V の元の正定値なもの全体となる．ジョルダン枠は

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad c_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

でとる．クラン積 $\triangle$ は $x, y \in V$ に対して

$$x \triangle y = \underline{x}y + y\underline{x}^*$$

である．Ω の基本相対不変式 $\Delta_q(x)$ $(q=1,2)$ は，

$$\begin{array}{l} \Delta_1(x) = x_1, \\ \Delta_2(x) = \det(x) = x_1x_2 - w_1^2 - w_2^2 - w_3^2 \end{array}$$

となる．

(φ, E) を V の自己共役表現とすると，$E = \mathbb{H}^2$ となり，

$$\begin{array}{l} \varphi(x)\xi = x\xi \quad (x \in V, \ \xi \in E), \\ Q(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} (\xi_1, \eta_1)_{\mathbb{H}} & p(\overline{\xi_2}\eta_1 + \overline{\eta_2}\xi_1) \\ p(\xi_2\overline{\eta_1} + \eta_2\overline{\xi_1}) & (\xi_2, \eta_2)_{\mathbb{H}} \end{pmatrix} \quad \left(\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} \in E\right) \end{array}$$

となる．ただし，p は $p : \mathbb{H} \ni w_1 + iw_2 + jw_3 + kw_4 \mapsto w_1 + iw_2 + jw_3$ なる直交射影である．ここで $z \in \mathbb{H}$ に対して $(z)_k$ を z の k の係数を表すことにすると，$\det Q(\xi, \xi) = {(\xi_2\overline{\xi_1})_k}^2$ となる．

$$x - \tfrac{1}{2}Q(\xi, \xi) = \begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{2}|\xi_1|^2 & \overline{w} - p(\xi_1\overline{\xi_2}) \\ w - p(\xi_2\overline{\xi_1}) & x_2 - \frac{1}{2}|\xi_2|^2 \end{pmatrix} \quad (x \in V, \ \xi \in E)$$

であるので，V_E に対応するジーゲル領域の基本多項式 Δ_q^* $(q=1,2)$ は，

$$\begin{aligned}
\Delta_1^*(\xi+x) &= x_1 - \tfrac{1}{2}|\xi_1|^2 = \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 & x_1 \end{pmatrix}, \\
\Delta_2^*(\xi+x) &= (x_1 - \tfrac{1}{2}|\xi_1|^2)(x_2 - \tfrac{1}{2}|\xi_2|^2) - |w - p(\xi_2\overline{\xi_1})|^2 \\
&= \det\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi_1} & \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi_2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 & x_1 & \overline{w} + k(\xi_1\overline{\xi_2})_k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 & w + k(\xi_2\overline{\xi_1})_k & x_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となる．よって

$$X(\xi+x) := \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi_1} & \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{\xi_2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_1 & x_1 & \overline{w} + k(\xi_1\overline{\xi_2})_k \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_2 & w + k(\xi_2\overline{\xi_1})_k & x_2 \end{pmatrix}$$

とおけば実ジーゲル領域 $D(\Omega, Q)$ は

$$D(\Omega, Q) = \{\xi + x \in V_E \ ; \ \det{}^{(q)}(X(\xi+x)) > 0 \ (q=2,3)\}$$

のように表すことができる．

参考文献

[1] D. Achab, Représentation des algèbres de rang 2 et fonctions zêta associées, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), **45** (1995), 437–531.

[2] J. L. Clerc, Représentation d'une algèbre de Jordan, polynômes invariants et harmoniques de Stiefel, J. Reine Angew. Math., **423** (1992), 47–71.

[3] J. Faraut and A. Koranyi, Analysis on symmetric cones, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[4] H. Ishi, Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications, J. Lie Theory, **11** (2001), 155–171.

[5] H. Ishi, Representation of clans and homogeneous cones, to appear in Vestnik Tambov University.

[6] H. Ishi and T. Nomura, Tube domain and an orbit of a complex triangular group, Math. Z., **259** (2008), 697–711.

[7] T. Nomura, Right multiplication operators in the clan structure of a Euclidean Jordan algebra, to appear in Vestnik Tambov University.

[8] E. B. Vinberg, The theory of convex homogeneous cones, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.