数理解析研究所講究録
第1770巻 2011年 68-79

等質開凸錐の行列による実現

九州大学大学院数理学府
山崎 貴史 (Takashi Yamasaki)
Graduate School of Mathematics,
Kyushu University

1 序文

等質開凸錐には T-algebra, N-algebra といった代数構造が 1 対 1 に対応している. [3] では, この対応によって 10 次元以下の等質開凸錐を線形同型を除いて分類したが, 実行列の集合として実現したのは 7 次元以下のものに限られていた. 本稿ではこの分類の手法を発展させることにより, 一般次元の等質開凸錐を実行列の集合として実現することが可能になったことを報告する. それによって 10 次元以下の等質開凸錐がすべて実現され, また階数 3 のものについては一般次元のものの実現が得られる. さらに 11 次元で現れる興味深い 2 つの例を紹介する. 最後に, 実現の手法についての議論から, 等質開凸錐に付随する基本相対不変式の次数についての議論へ発展することについても触れる.

2 基本的な理論

定義 2.1. n 次元実空間 $\mathbb{R}^n$ の直線を含まない開凸錐 V で, V の自己同型群 $G(V)$ が V に推移的に作用するものを等質開凸錐をいう.

定義 2.2. (1) 有限次元の二重次数付き実代数 $\mathfrak{A} = \bigoplus_{1\le i,j\le m} \mathfrak{A}_{ij}$ で

$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{jk} \subset \mathfrak{A}_{ik}, \quad \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{kl} = \{\,0\,\} \quad (j \neq k)$$

を満たすものを階数 m の行列代数という.
(2) 行列代数 $\mathfrak{A}$ 上の線型変換 $x \mapsto x^*$ で

a) $x^{**} = x$,

b) $(xy)^* = y^*x^*$,

c) 任意の i, j に対して, $\mathfrak{A}_{ij}^* \subset \mathfrak{A}_{ji}$

を満たすものを involution という．

行列代数 $\mathfrak{A}$ において $\mathfrak{A}$ の"上三角部分代数"を $\mathfrak{T}$ とする：

$$\mathfrak{T} := \bigoplus_{1 \le i \le j \le m} \mathfrak{A}_{ij}.$$

また $\mathfrak{A}$ における交換子 $[xy]$ と結合子 $[xyz]$ を次で定義する：

$$[xy] := xy - yx, \qquad [xyz] := x(yz) - (xy)z.$$

以下では部分空間 $\mathfrak{A}_{ij}$ の次元を n_{ij} で表す：

$$n_{ij} := \dim \mathfrak{A}_{ij}.$$

定義 2.3. involution $x \mapsto x^*$ を持つ階数 m の行列代数 $\mathfrak{A}$ で次の条件 (T1)〜(T7) を満たすものを階数 m の T-algebra という．

(T1) すべての i について $\mathfrak{A}_{ii}$ は実数体 $\mathbb{R}$ に同型である．

この同型写像を ρ_i として $e_i := \rho_i^{-1}(1)$ とし，$x = \sum_{1 \le i,j \le m} x_{ij}$ に対して，

$$\mathrm{Sp}\ x := \sum_{i=1}^{m} \rho_i(x_{ii})$$

と定義する．

(T2) 任意の i, j に対して，$e_i x_{ij} = x_{ij} e_j = x_{ij}, \quad \forall x_{ij} \in \mathfrak{A}_{ij}$.

(T3) $\mathrm{Sp}\ [xy] = 0, \quad \forall x, y \in \mathfrak{A}$.

(T4) $\mathrm{Sp}\ [xyz] = 0, \quad \forall x, y, z \in \mathfrak{A}$.

(T5) $x \neq 0 \Rightarrow \mathrm{Sp}\ xx^* > 0$.

(T6) $x, y, z \in \mathfrak{T} \Rightarrow [xyz] = 0$.

(T7) $x, y \in \mathfrak{T} \Rightarrow [xyy^*] = 0$.

注意 2.4. [3], [5] では Sp の定義を

$$\mathrm{Sp}\ x := \sum_{i=1}^{m} n_i \rho_i(x_{ii}), \quad n_i := 1 + \frac{1}{2} \sum_{s \neq i} n_{is}$$

としているが，計算を簡単にするため異なる定義をとった．次の定義 2.5 (N4) についても同様である．

定義 2.5. $\langle\cdot,\cdot\rangle$を内積とする有限次元の二重字数付き結合的実代数$\mathfrak{N}=\bigoplus_{1\le i<j\le m}\mathfrak{N}_{ij}$で次の条件(N1)〜(N5)を満たすものを階数$m$の$N$-algebraという．

(N1) 任意のi, j, k $(i<j<k)$に対して, $\mathfrak{N}_{ij}\mathfrak{N}_{jk}\subset\mathfrak{N}_{ik}$,

(N2) $j\neq k\Rightarrow\mathfrak{N}_{ij}\mathfrak{N}_{kl}=\{0\}$,

(N3) $(i,j)\neq(k,l)\Rightarrow\langle\mathfrak{N}_{ij},\mathfrak{N}_{kl}\rangle=0$,

(N4) 任意の$x_{ij}\in\mathfrak{N}_{ij}$, $y_{jk}\in\mathfrak{N}_{jk}$に対して,

$$\langle x_{ij}y_{jk},x_{ij}y_{jk}\rangle=\langle x_{ij},x_{ij}\rangle\langle y_{jk},y_{jk}\rangle,$$

(N5) 任意の$x_{ik}\in\mathfrak{N}_{ik}$, $y_{jk}\in\mathfrak{N}_{jk}$ $(i<j)$に対して,

$$\langle x_{ik},\mathfrak{N}y_{jk}\rangle=0\Rightarrow\langle\mathfrak{N}x_{ik},\mathfrak{N}y_{jk}\rangle=0.$$

ただし階数1のN-algebraとは$\{0\}$のこととする．

ここで(N4)は次の(N4′)または(N4″)と同値であることに注意しておこう．

(N4′) $\langle x_{ij}y_{jk},x'_{ij}y_{jk}\rangle=\langle x_{ij},x'_{ij}\rangle\langle y_{jk},y_{jk}\rangle,\quad\forall x_{ij},x'_{ij}\in\mathfrak{N}_{ij},\ y_{jk}\in\mathfrak{N}_{jk}.$

(N4″) $\langle x_{ij}y_{jk},x'_{ij}y'_{jk}\rangle+\langle x_{ij}y'_{jk},x'_{ij}y_{jk}\rangle=2\langle x_{ij},x'_{ij}\rangle\langle y_{jk},y'_{jk}\rangle,$
$\forall x_{ij},x'_{ij}\in\mathfrak{N}_{ij},\ y_{jk},y'_{jk}\in\mathfrak{N}_{jk}.$

以下, 階数mのT-algebra $\mathfrak{A}=\bigoplus_{1\le i,j\le m}\mathfrak{A}_{ij}$に対して,

$$\mathfrak{T}(\mathfrak{A}):=\{\,t\in\mathfrak{T}\mid\rho_i(t_{ii})>0\,\},\qquad\mathfrak{X}(\mathfrak{A}):=\{\,x\in\mathfrak{A}\mid x^*=x\,\}$$

とおく．$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$は連結なLie群である．

命題 2.6 ([5]). (1) $V(\mathfrak{A}):=\{\,tt^*\mid t\in\mathfrak{T}(\mathfrak{A})\,\}$は$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$が推移的に作用する$\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$の等質開凸錐である．
(2) $\mathfrak{N}:=\bigoplus_{1\le i<j\le m}\mathfrak{A}_{ij}$は階数$m$の$N$-algebraである．
(3) 等質開凸錐, T-algebra, N-algebraは(1), (2)により互いに1対1に対応する．

命題2.6により対応するT-algebra, N-algebraの階数を等質開凸錐の階数という．次に, $l=1,2,\cdots,m$に対して

$$\mathfrak{A}^{(l)}:=\bigoplus_{1\le i,j\le l}\mathfrak{A}_{ij}$$

とおく．$\mathfrak{A}$の元xと$l=1,2,\cdots,m$に対して, $x^{(l)}\in\mathfrak{A}^{(l)}$を

$$\begin{cases}x^{(m)}=x,\\ x^{(l-1)}=\sum_{1\le i,j\le l-1}(\rho_l(x^{(l)}_{ll})x^{(l)}_{ij}-x^{(l)}_{il}x^{(l)}_{lj})\end{cases}$$

で定義する．さらに$x\in\mathfrak{X}(\mathfrak{A})$と$l=1,2,\cdots,m$に対して, $D_l(x):=\rho_l(x^{(l)}_{ll})$とおく．これらの$D_l$を用いて等質開凸錐$V(\mathfrak{A})$を次のように記述することができる．

命題 2.7 ([5]). $V(\mathfrak{A}) = \{\, x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A}) \mid D_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \,\}$.

例 2.8. 正定値実対称行列のなす集合 $V := \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})^{++}$ は $\mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ の等質開凸錐であり，対応する T-algebra は $\mathfrak{A} = \mathrm{Mat}(m, \mathbb{R})$ である．$\mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ は対角成分が正の上三角行列全体の集合で，$V(\mathfrak{A}) = \{\, T{}^tT \mid T \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A}) \,\}$ は V に一致する．また，$\Delta_k(x)$ を $x \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})$ の $m+1-k$ 次の右下主小行列式とすると，$D_l(x) = \Delta_l(x)\Delta_{l+2}(x)\Delta_{l+3}(x)^2 \cdots \Delta_m(x)^{2^{m-l-2}}$ となり，

$$
\begin{aligned}
V(\mathfrak{A}) &= \{\, x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A}) \mid D_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \,\} \\
&= \{\, x \in \mathfrak{X}(\mathfrak{A}) \mid \Delta_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \,\} \\
&= V
\end{aligned}
$$

となる．

3 m-skeleton の極小頂点と等質開凸錐

[3] において，10 次元以下の既約な等質開凸錐に対応する N-algebra は，次で定義される m-skeleton という図形を用いてすべて分類されている．

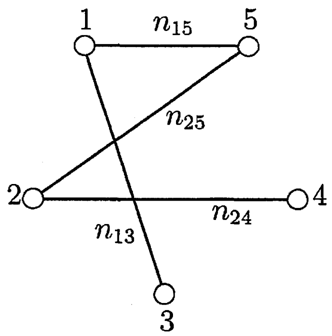
定義 3.1. m 個の小円を正 m 角形の頂点となるよう配置して左上隅から反時計回りに番号を振り，いくつかの小円を線分で結ぶ．ここで i と j が結ばれていることを $i \sim j$ で表し，$i < j < k$ について $i \sim j,\ j \sim k \Rightarrow i \sim k$ を満たすように線分が引かれているとする．2 点 i, j を結ぶ線分に正整数 n_{ij} を付与し，

(S1) $i < j < k,\ i \sim j,\ j \sim k \Rightarrow \max(n_{ij}, n_{jk}) \leq n_{ik}$,

(S2) $i < j < k < l,\ i \sim j,\ j \sim l,\ i \sim k,\ k \sim l,\ i \sim l,\ j \nsim k \Rightarrow$
$$\max(n_{ij} + n_{ik}, n_{ij} + n_{kl}, n_{jl} + n_{ik}, n_{jl} + n_{kl}) \leq n_{il}$$

を満たすものを m-skeleton といい，$(S, (n_{ij}))$ または単に S で表す．

例 3.2.



これは [3] において S_5^2 型と分類される m-skeleton である．

命題 3.3 ([3]). 階数 m の N-algebra $\mathfrak{N}$ に対して, m 個の小円を正 m 角形の頂点となるよう配置して左上隅から反時計回りに番号を振り, $n_{ij} > 0$ であるような i と j を線分で結ぶ. この $n_{ij} > 0$ である 2 点 i, j を結ぶ線分に n_{ij} を付与した図形を $\mathfrak{N}$ の図形といい, $S(\mathfrak{N})$ で表す. このとき $S(\mathfrak{N})$ は m-skeleton であり, 同型な N-algebra の図形は同型な m-skeleton となる.

m-skeleton は N-algebra の成分の次元を視覚化した図形である. 先に挙げた S_5^2 には階数 5 の N-algebra $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_{13} + \mathfrak{N}_{15} + \mathfrak{N}_{24} + \mathfrak{N}_{25}$ が対応し, 付与された整数 n_{ij} は成分 $\mathfrak{N}_{ij}$ の次元となっている. 先に述べたように, [3] において, 10 次元以下の既約な等質開凸錐に対応する N-algebra は m-skeleton を用いてすべて分類されており, 有限個しかないことが分かっている. 10 次元以下では, N-algebra と m-skeleton は 1 対 1 に対応している.

注意 3.4. 一般に N-algebra から m-skeleton は一意に定まるが, 逆については, 同型な m-skeleton に対して同型でない複数の N-algebra が対応する場合や, 対応する N-algebra が存在しない場合がある.

$\mathfrak{A}$, $\mathfrak{N}$ をそれぞれ互いに対応する T-algebra, N-algebra とし, S を $\mathfrak{N}$ の図形とする. S の各頂点 i に対して

$$E_{[i]} := \{\, i \,\} \sqcup \{\, j \mid i < j, i \sim j \text{ in } S \,\}, \qquad m_i := |E_{[i]}|,$$

$$\mathfrak{A}_{[i]} := \bigoplus_{j,k \in E_{[i]}} \mathfrak{A}_{jk}, \qquad \mathfrak{N}_{[i]} := \bigoplus_{j,k \in E_{[i]}, j<k} \mathfrak{N}_{jk}$$

とする. このとき, $\mathfrak{A}_{[i]}$, $\mathfrak{N}_{[i]}$ はそれぞれ階数 m_i の T-algebra, N-algebra となる. また,

$$\begin{aligned} S_{[i]} &: \mathfrak{N}_{[i]}\text{の図形}, \\ x_{[i]} &:= \sum_{j,k \in E_{[i]}} x_{jk} \quad (x \in \mathfrak{A}), \\ \mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A}) &:= \left\{\, t_{[i]} \;\middle|\; t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A}) \,\right\}, \\ V_{[i]} = V_{[i]}(\mathfrak{A}) &:= \left\{\, uu^* \;\middle|\; u \in \mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A}) \,\right\} \end{aligned}$$

とすると, $V_{[i]}$ は $S_{[i]}$, $\mathfrak{A}_{[i]}$, $\mathfrak{N}_{[i]}$ に対応する等質開凸錐で, $\mathfrak{T}_{[i]}(\mathfrak{A})$ が推移的に作用している. このように m-skeleton の極小頂点から生成した等質開凸錐によって, 次の定理が成り立つ.

定理 3.5. T-algebra $\mathfrak{A}$ に対応する N-algebra の図形を S とし, $\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_r$ を S の極小頂点, つまり $i < \omega_s$ ならば $i \nsim \omega_s$ となるような頂点とすると,

$$x \in V(\mathfrak{A}) \;\Leftrightarrow\; x_{[\omega_s]} \in V_{[\omega_s]}(\mathfrak{A}), \quad \forall s = 1, 2, \cdots, r$$

が成り立つ.

この定理の証明には次の 3 つの補題を用いる.

補題 3.6. 任意の $t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ に対して

$$t_{[i]}t^*_{[i]} = (tt^*)_{[i]}$$

が成り立つ.

補題 3.7. すべての $i = 1, 2, \cdots, m$ について $x_{[i]} \in V_{[i]}(\mathfrak{A})$ ならば $x \in V(\mathfrak{A})$ である.

補題 3.8. $i < j$ かつ $i \sim j$ とする. このとき, $x_{[i]} \in V_{[i]}(\mathfrak{A})$ ならば $x_{[j]} \in V_{[j]}(\mathfrak{A})$ である.

証明 (定理 3.5). $x \in V(\mathfrak{A})$ とすると, ある $t \in \mathfrak{T}(\mathfrak{A})$ によって $x = tt^*$ となり, 補題 3.6 より任意の i について $x_{[i]} = t_{[i]}t^*_{[i]} \in V_{[i]}(\mathfrak{A})$ が成り立つ.

逆にすべての $s = 1, 2, \cdots, r$ に対して $x_{[\omega_s]} \in V_{[\omega_s]}(\mathfrak{A})$ が成り立つとする. ω_s は極小点なので任意の i に対して $\omega_s = i$, または $\omega_s < i$ かつ $\omega_s \sim i$ を満たす s が存在する. よって補題 3.8 より $x_{[i]} \in V_{[i]}(\mathfrak{A})$ となり, 補題 3.7 より $x \in V(\mathfrak{A})$ となる. □

定理 3.5 から次の手順で等質開凸錐が実現できることが分かる;

i) 極小頂点が 1 点の場合に実現する.

ii) 極小頂点が複数ある場合は, それらから生成された等質開凸錐を i) により実現して"綴じ合わせる". この意味は次ページの例 3.10 を参照.

以下, I_r を r 次単位行列とし, N-algebra $\mathfrak{N} = \bigoplus_{1 \le i < j \le m} \mathfrak{N}_{ij}$ に対して $\{e^p_{ij}\}_p$ を内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に関する $\mathfrak{N}_{ij}$ の正規直交基底とする.

定理 3.9. T-algebra $\mathfrak{A}$ は, 対応する N-algebra の図形がただ 1 つ極小頂点を持つものとする. $\mathfrak{A}$ に対応する等質開凸錐 $V(\mathfrak{A})$ は

$$V(\mathfrak{A}) = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ {}^t x_{12} & x_{22}I_{n_{12}} & & X(x_{ij}) \\ \vdots & & \ddots & \\ {}^t x_{1m} & {}^t X(x_{ij}) & & x_{mm}I_{n_{1m}} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{c} A(x) \gg 0 \\ (\text{正定値}) \end{array} \right\}$$

で表される. ただし $x_{ij} = (x^1_{ij}, \cdots, x^{n_{ij}}_{ij})$ は $\mathfrak{N}_{ij}$ の元を n_{ij} 次元の行ベクトルと見なしたもので, $X(x_{ij})$ は (p, q)-成分が

$$X(x_{ij})_{pq} = \langle x_{ij}, e^{p*}_{1i} e^q_{1j} \rangle = \langle e^p_{1i} x_{ij}, e^q_{1j} \rangle$$

である $n_{1i} \times n_{1j}$ 行列である.

証明. $A(x)$ の r 次右下主小行列を $A_r(x)$ とすると，ある l $(1 \leq l \leq m)$ と，整数 $\alpha_{r,l}, \alpha_{r,l+1}, \cdots, \alpha_{r,m}$ によって

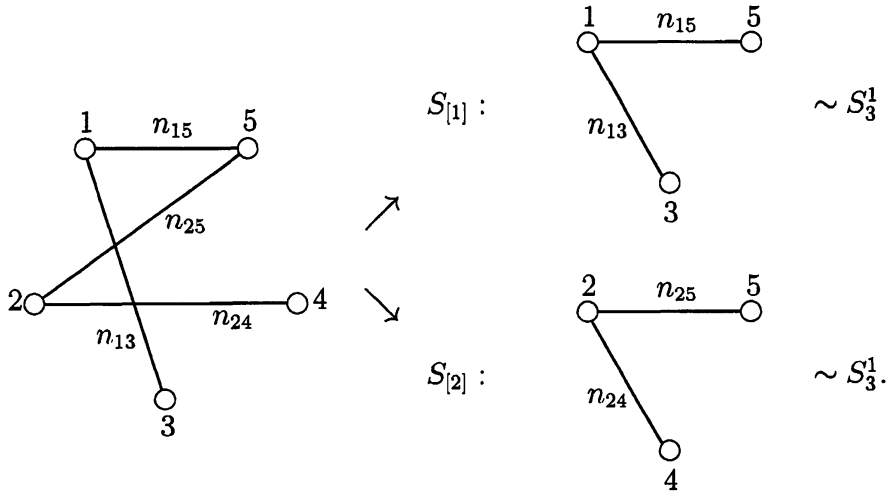
$$\det A_r(x) = D_l(x)^{\alpha_{r,l}} D_{l+1}(x)^{\alpha_{r,l+1}} \cdots D_m(x)^{\alpha_{r,m}}$$

と書ける．すべての l に対して，ある r について $\alpha_{r,l} = 1$ となるので，

$$A(x) \gg 0 \;\Leftrightarrow\; D_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m$$

が成り立つ．

例 3.10. $S = S_5^2$: 極小頂点は 1 と 2 :



$S_{[1]}, S_{[2]}$ は共に S_3^1 型の図形なので，S_3^1 に対応する 2 つの等質開凸錐を綴じ合わせればよい．S_3^1 に対応する等質開凸錐は付与された整数によって一意に定まり，S に対応する等質開凸錐は

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13} & x_{15} \\ {}^t x_{13} & x_{33} I_{n_{13}} & 0 \\ {}^t x_{15} & 0 & x_{55} I_{n_{15}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{22} & x_{24} & x_{25} \\ {}^t x_{24} & x_{44} I_{n_{24}} & 0 \\ {}^t x_{25} & 0 & x_{55} I_{n_{25}} \end{pmatrix} \end{array} \right) \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{ii} \in \mathbb{R}, \\ x_{ij} \in \mathbb{R}^{n_{ij}} \ (i < j), \\ A_1 \gg 0, \\ A_2 \gg 0 \end{array} \right\}$$

と実現される．ここで A_1 と A_2 は x_{55} を共有していることに注意．これが前ページで用いた"綴じ合わせる"の意味である．

4 等質開凸錐の実現

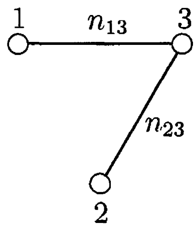
4.1 10 次元以下の等質開凸錐

10 次元以下のすべての既約な等質開凸錐は, [3] における分類に従って, 実行列または実行列の組の集合として実現することができた. 10 次元以下の等質開凸錐は m-skeleton と 1 対 1 に対応しており, 本稿での議論を踏まえれば実現は容易である. 詳しくは著者の修士論文 [7] を参照してほしい.

4.2 階数 3 の等質開凸錐

階数 3 の等質開凸錐で綴じ合わせが必要なもの, つまり対応する図形の極小頂点が複数あるものは, 次の S_3^{1*} 型の図形に対応するもののみであり, それ以外は定理 3.9 によって実現することができる :

S_3^{1*} :



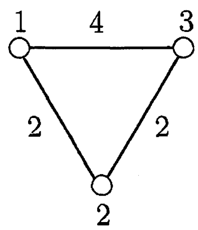
S_3^{1*} 型に対応するものは図形と 1 対 1 に対応しており, 次のように実現される.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \left(\begin{matrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13} \\ {}^t x_{13} & x_{33} I_{n_{13}} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23} \\ {}^t x_{23} & x_{33} I_{n_{23}} \end{pmatrix} \end{matrix} \right) \;\middle|\; \begin{matrix} A_1 \gg 0, \\ A_2 \gg 0 \end{matrix} \right\}.$$

4.3 11 次元以上で現れる例 1

10 次元以下の既約な等質開凸錐は有限個であり, m-skeleton とは 1 対 1 に対応していたが, 11 次元以上では 1 つの m-skeleton に対応する互いに同型でない複数個の等質開凸錐が存在することがある. 次の S_3^2 型の m-skeleton には, 互いに同型でない連続無限個の等質開凸錐が対応する :

S_3^2 :



命題 4.1. Sを S_3^2 $(n_{12}=n_{23}=2,\, n_{13}=4)$ 型の m-skeletonとし, $\mathfrak{N}$を Sを図形に持つ N-algebraとすると, 正規直交基底 $\{e_{ij}^p\}_p$ の取り方によらずある定数 $\lambda_{\mathfrak{N}} \in [0,1]$ によって

$$|\langle e_{12}^1 e_{23}^1, e_{12}^2 e_{23}^2 \rangle| = |\langle e_{12}^1 e_{23}^2, e_{12}^2 e_{23}^1 \rangle| = \lambda_{\mathfrak{N}}$$

が成り立つ. Sを図形に持つ2つの N-algebra $\mathfrak{N}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ が同型である必要十分条件はこの定数 $\lambda_{\mathfrak{N}}$, $\lambda_{\widetilde{\mathfrak{N}}}$ が等しいことである.

このとき対応する等質開凸錐は11次元で,

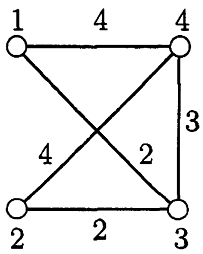
$$V = \left\{ A = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12}^1 & x_{12}^2 & x_{13}^1 & x_{13}^2 & x_{13}^3 & x_{13}^4 \\ x_{12}^1 & x_{22} & 0 & x_{23}^1 & x_{23}^2 & 0 & 0 \\ x_{12}^2 & 0 & x_{22} & \lambda_{\mathfrak{N}} x_{23}^2 & -\lambda_{\mathfrak{N}} x_{23}^1 & \lambda'_{\mathfrak{N}} x_{23}^2 & \lambda'_{\mathfrak{N}} x_{23}^1 \\ x_{13}^1 & x_{23}^1 & \lambda_{\mathfrak{N}} x_{23}^2 & x_{33} & 0 & 0 & 0 \\ x_{13}^2 & x_{23}^2 & -\lambda_{\mathfrak{N}} x_{23}^1 & 0 & x_{33} & 0 & 0 \\ x_{13}^3 & 0 & \lambda'_{\mathfrak{N}} x_{23}^2 & 0 & 0 & x_{33} & 0 \\ x_{13}^4 & 0 & \lambda'_{\mathfrak{N}} x_{23}^1 & 0 & 0 & 0 & x_{33} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11}, x_{22}, x_{33} \in \mathbb{R}, \\ x_{12}, x_{23} \in \mathbb{R}^2, \\ x_{13} \in \mathbb{R}^4, \\ A \gg 0 \end{array} \right\}$$

となる. ただし $\lambda'_{\mathfrak{N}}$ は $\lambda_{\mathfrak{N}}^2 + \lambda'^2_{\mathfrak{N}} = 1$ を満たす非負定数である.

4.4 11次元以上で現れる例2

これまでに挙げた例では, 極小頂点から生成した等質開凸錐を綴じ合わせるときに基底の取り方を考慮する必要はなく, 一意にもとの等質開凸錐を実現することができた. しかし一般には, 基底の取り方を考える必要があることは次の19次元の例からわかる. 実際 S_4^{5*} 型の m-skeletonを考えると, それに対応する2つの等質開凸錐 V, $\widetilde{V}$ で, 極小頂点から生成した $V_{[1]}$ と $\widetilde{V}_{[1]}$, $V_{[2]}$ と $\widetilde{V}_{[2]}$ は同型だが V と $\widetilde{V}$ は同型でないものが現れる:

S_4^{5*} :



命題 4.2. Sを S_4^{5*} $(n_{13}=n_{23}=2,\, n_{34}=3,\, n_{14}=n_{24}=4)$ 型の m-skeletonとする. $\mathfrak{N}$, $\widetilde{\mathfrak{N}}$を Sを図形に持つ N-algebraで, それぞれ正規直交基底 $\{e_{ij}^p\}_p$, $\{\tilde{e}_{ij}^p\}_p$ によって次のように積が定まるものとする.

$\mathfrak{N}$:

	e_{34}^1	e_{34}^2	e_{34}^3
e_{13}^1	e_{14}^1	e_{14}^2	e_{14}^3
e_{13}^2	e_{14}^2	$-e_{14}^1$	e_{14}^4

,

	e_{34}^1	e_{34}^2	e_{34}^3
e_{23}^1	e_{24}^1	e_{24}^2	e_{24}^3
e_{23}^2	e_{24}^2	$-e_{24}^1$	e_{24}^4

,

$\widetilde{\mathfrak{N}}$:

	$\widetilde{e}_{34}^1$	$\widetilde{e}_{34}^2$	$\widetilde{e}_{34}^3$
$\widetilde{e}_{13}^1$	$\widetilde{e}_{14}^1$	$\widetilde{e}_{14}^2$	$\widetilde{e}_{14}^3$
$\widetilde{e}_{13}^2$	$\widetilde{e}_{14}^2$	$-\widetilde{e}_{14}^1$	$\widetilde{e}_{14}^4$

,

	$\widetilde{e}_{34}^1$	$\widetilde{e}_{34}^2$	$\widetilde{e}_{34}^3$
$\widetilde{e}_{23}^1$	$\widetilde{e}_{24}^1$	$\widetilde{e}_{24}^3$	$\widetilde{e}_{24}^2$
$\widetilde{e}_{23}^2$	$\widetilde{e}_{24}^2$	$\widetilde{e}_{24}^4$	$-\widetilde{e}_{24}^1$

.

このとき $\mathfrak{N}$ と $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は同型ではない.

証明. $M := \mathfrak{N}_{13} \oplus \mathfrak{N}_{23} \oplus \mathbb{R}e_{34}^1 \oplus \mathbb{R}e_{34}^2 \oplus \mathbb{R}e_{14}^1 \oplus \mathbb{R}e_{14}^2 \oplus \mathbb{R}e_{24}^1 \oplus \mathbb{R}e_{24}^2$ とおくと M は $\mathfrak{N}$ の部分代数となるが, $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は M に同型な部分代数を持たない. よって $\mathfrak{N}$ と $\widetilde{\mathfrak{N}}$ は同型ではない. □

それぞれ対応する等質開凸錐 $V, \widetilde{V}$ はともに 19 次元で,

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13}^1 & x_{13}^2 & x_{14}^1 & x_{14}^2 & x_{14}^3 & x_{14}^4 \\ x_{13}^1 & x_{33} & 0 & x_{34}^1 & x_{34}^2 & x_{34}^3 & 0 \\ x_{13}^2 & 0 & x_{33} & -x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{34}^3 \\ x_{14}^1 & x_{34}^1 & -x_{34}^2 & x_{44} & 0 & 0 & 0 \\ x_{14}^2 & x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{44} & 0 & 0 \\ x_{14}^3 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ x_{14}^4 & 0 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23}^1 & x_{23}^2 & x_{24}^1 & x_{24}^2 & x_{24}^3 & x_{24}^4 \\ x_{23}^1 & x_{33} & 0 & x_{34}^1 & x_{34}^2 & x_{34}^3 & 0 \\ x_{23}^2 & 0 & x_{33} & -x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{34}^3 \\ x_{24}^1 & x_{34}^1 & -x_{34}^2 & x_{44} & 0 & 0 & 0 \\ x_{24}^2 & x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{44} & 0 & 0 \\ x_{24}^3 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ x_{24}^4 & 0 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44} \in \mathbb{R}, \\ x_{13}, x_{23} \in \mathbb{R}^2, \\ x_{34} \in \mathbb{R}^3, \\ x_{14}, x_{24} \in \mathbb{R}^4, \\ A_1 \gg 0, \\ A_2 \gg 0 \end{array} \right\},$$

$$\widetilde{V} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{13}^1 & x_{13}^2 & x_{14}^1 & x_{14}^2 & x_{14}^3 & x_{14}^4 \\ x_{13}^1 & x_{33} & 0 & x_{34}^1 & x_{34}^2 & x_{34}^3 & 0 \\ x_{13}^2 & 0 & x_{33} & -x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{34}^3 \\ x_{14}^1 & x_{34}^1 & -x_{34}^2 & x_{44} & 0 & 0 & 0 \\ x_{14}^2 & x_{34}^2 & x_{34}^1 & 0 & x_{44} & 0 & 0 \\ x_{14}^3 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ x_{14}^4 & 0 & x_{34}^3 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_{22} & x_{23}^1 & x_{23}^2 & x_{24}^1 & x_{24}^2 & x_{24}^3 & x_{24}^4 \\ x_{23}^1 & x_{33} & 0 & x_{34}^1 & x_{34}^3 & x_{34}^2 & 0 \\ x_{23}^2 & 0 & x_{33} & -x_{34}^3 & x_{34}^1 & 0 & x_{34}^2 \\ x_{24}^1 & x_{34}^1 & -x_{34}^3 & x_{44} & 0 & 0 & 0 \\ x_{24}^2 & x_{34}^3 & x_{34}^1 & 0 & x_{44} & 0 & 0 \\ x_{24}^3 & x_{34}^2 & 0 & 0 & 0 & x_{44} & 0 \\ x_{24}^4 & 0 & x_{34}^2 & 0 & 0 & 0 & x_{44} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \;\middle|\; \begin{array}{l} x_{11}, x_{22}, x_{33}, x_{44} \in \mathbb{R}, \\ x_{13}, x_{23} \in \mathbb{R}^2, \\ x_{34} \in \mathbb{R}^3, \\ x_{14}, x_{24} \in \mathbb{R}^4, \\ A_1 \gg 0, \\ A_2 \gg 0 \end{array} \right\}$$

となり, これらは同型ではない.

5　基本相対不変式

定義 5.1. Vを$\mathbb{R}^n$上の階数mの等質開凸錐とし, $\mathbb{R}^n$上の多項式$\Delta_1(x), \Delta_2(x), \cdots, \Delta_m(x)$を次のように定める.

$$\begin{cases} \Delta_m(x) & := D_m(x), \\ \Delta_l(x) & : D_l(x) = \Delta_l(x)\Delta_{l+1}(x)^{\alpha_{l,l+1}} \cdots \Delta_m(x)^{\alpha_{lm}} \text{が成り立ち} \Delta_{l+1}(x), \cdots, \Delta_m(x) \\ & \quad \text{で割れない多項式} (\alpha_{i,k} \text{は非負整数}). \end{cases}$$

この $\Delta_1(x), \Delta_2(x), \cdots, \Delta_m(x)$ は互いに割れない既約な多項式で, V に付随する基本相対不変式と呼ばれる ([2]).

$\Delta_l(x)$ の構成法から等質開凸錐 V について次のことが分かる：

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \Delta_l(x) > 0, \quad \forall l = 1, 2, \cdots, m \}. \tag{5.1}$$

例 5.2. $V := \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R})^{++}$ のときは, 例 2.8 で述べたように

$$D_l(x) = \Delta_l(x)\Delta_{l+2}(x)\Delta_{l+3}(x)^2 \cdots \Delta_m(x)^{2^{m-l-2}}.$$

ゆえに, 基本相対不変式 $\Delta_l(x)$ は x の $m+1-l$ 次の右下主小行列式である. 従って, (5.1) は右下主小行列式を用いて正定値実対称行列を特徴付けることの一般化になっている.

極小頂点についての議論は, 次の命題によって基本相対不変式についての議論に発展させることができる.

命題 5.3. 階数 m の等質開凸錐 $V \subset \mathbb{R}^n$ に付随する基本相対不変式を $\Delta_{V,l}(x)$ $(l = 1, 2, \cdots, m)$ と書くと, 各 $l = 1, 2, \cdots, m$ について

$$\Delta_{V,l}(x) = \Delta_{V_{[l]},1}(x_{[l]}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

が成り立つ.

$\mathbb{R}^n$ の等質開凸錐 V と内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ に対して,

$$V^* := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \langle x, y \rangle > 0, \quad \forall x \in \overline{V} \setminus \{ 0 \} \right\}$$

を V の双対錐といい, ある内積によって V が双対錐 V^* に一致するとき, V を対称錐という.

等質開凸錐の対称性と基本相対不変式の次数に関しては, 次の予想が立てられている.

予想. 既約な等質開凸錐 V が対称である必要十分条件は, V に付随する基本相対不変式と双対錐 V^* に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \cdots, m$ となることである.

この予想について, 以下のことが分かっている.

1. 対称錐に付随する基本相対不変式の次数は $1, 2, \cdots, m$ である ([1]).
2. 付随する基本相対不変式の次数が $1, 2, \cdots, m$ であるような, 非対称な等質開凸錐が存在する ([4]).
3. ある条件の下では, V と V^* に付随する基本相対不変式の次数が共に $1, 2, \cdots, m$ ならば V は対称錐である ([6]).

さらに一般の等質開凸錐について, 対応する m-skeleton に付与された整数によって基本相対不変式の次数が決定されると予想している. 階数 4 以下のものについては, 実際に基本相対不変式を計算し, その次数が対応する m-skeleton から決定できることを確認した.

参考文献

[1] J. Faraut and A. Korányi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994.

[2] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory, **1** (2001), 155–171.

[3] S. Kaneyuki and T. Tsuji, *Classification of homogeneous bounded domains of lower dimension*, Nagoya Math. J., **53** (1974), 1–46.

[4] 野村隆昭, "等質開凸錐, クラン, そして基本相対不変式", 2010 年度表現論シンポジウム講演集, 96–104.

[5] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 340–403.

[6] 渡辺有介, "等質凸錐に付随する基本相対不変式", 京都大学修士論文, 2006.

[7] 山崎貴史, "等質開凸錐の行列による実現", 九州大学修士論文, 2011.