数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 96-113

QUANTUM UNIPOTENT SUBGROUP AND DUAL CANONICAL BASIS

木村嘉之 (Yoshiyuki Kimura)
京都大学 理学研究科 数学・数理解析専攻 数理解析系
Research Institute for Mathematical Science,
Kyoto University

CONTENTS

1. INTRODUCTION

1.1. 本稿の目的は, [Kim11] の紹介である. 主内容は, [GLS11b] の主結果の "量子化予想" を提出し, その設定として, 双対標準基底とタイトルにある量子冪単部分群との整合性を示し、また初期種を導入し, 基本的な性質を調べたことである. "量子化予想" 自体は, かねてから期待されていたことであるが, 明確に述べられていなかった. 本稿では, "量子化予想" の設定を紹介する上で, §1 において, その設定に必要な言葉であるクラスター代数とその基本的な問題を, (係数なし)rank2 の場合の結果を紹介したのち, クラスター代数の言葉の簡単な復習と, 正値性に関わる基本的な問題/予想を述べる. 正値性予想を概念的に解決する枠組みとしてのモノイダル圏論化について述べる. §2 では, モノイダル圏論化のある種の "雛形" と考えられる [GLS11b] の簡単な紹介を行う. §3 において, [Kim11] の概要を紹介する.

1.2. Example: rank 2 クラスター代数 $\mathcal{A}(b,c)$.

1.2.1. 一般の (係数付き) クラスター代数について述べる前に, より具体的な例として, ランク 2 の (係数なし) クラスター代数とそれの性質について述べたい。

定義 1.1. b,c をそれぞれ 1 以上の自然数として, 可換環 $\mathcal{A}(b,c)$ を $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を生成元として, 関係式を

$$x_{n-1}x_{n+1}=\begin{cases} x_n^b+1 & n \text{ が奇数} \\ x_n^c+1 & n \text{ が偶数}\end{cases}$$

で定める。

Date: 2011 年 6 月 30 日, 数理解析研究所.

定義から, ある整数 m に対して, x_m, x_{m+1} が与えられれば, 関係式により, 他の変数はすべて決定される。ここでは, $\{0,1\}$ を初期変数と思ったときの x_n の振る舞いについて考察する。

例 1.2 (A_2 case : $b=c=1$ の場合).

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{y+1}{x}, \\
x_3 &= \frac{x_3+1}{x_2} = \frac{x+y+1}{x} \\
x_4 &= \frac{x_4+1}{x_3} = \frac{x+y+1+xy}{xy} \Big/ \frac{y+1}{x} = \frac{x+1}{y} \\
x_5 &= \frac{x_5+1}{x_4} = \frac{x+y+1}{y} \Big/ \frac{x+y+1}{xy} = x, \\
x_6 &= \frac{x_6+1}{x_5} = (x+1) \Big/ \frac{x+1}{y} = y
\end{aligned}
$$

注意すべき点は, 4 つある。

(1) x_n の x, y の Laurent 多項式であること。(Laurent 現象)

(2) x_5, x_6 に x, y が現れていること (周期性)

(3) x_2, x_3, x_4 の分母の単項式が (A_2 型の) 正ルート系と対応していること。(ルート系との対応)

(4) x_n の x, y での展開がすべて x, y の Laurent 展開がすべて正係数をもっていること。(正値性)

なお, 上の計算において, 因数分解を行っている。因数分解によって, 簡単に正値性は崩れうる (e.g. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$) ので, (4) の性質は非自明であることに注意したい。

また, 同様に以下の二つの例も, 上の性質を持っている。

例 1.3 (B_2 case : $b=1, c=2$ の場合).

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{y+1}{x}, x_3 = \frac{x_3^2+1}{x_2} = \frac{(y+1)^2+x^2}{x^2y} \\
x_4 &= \frac{x_4+1}{x_3} = \frac{(y+1)^2+x^2+x^2y}{x^2y} \Big/ \frac{y+1}{x} = \frac{y+1+x^2}{xy} \\
x_5 &= \frac{x_5+1}{x_4} = \frac{(y+1+x^2)^2+x^2y^2}{x^2y^2} \Big/ \frac{(y+1)^2+x^2}{x^2y} = \frac{x^2+1}{y} \\
x_6 &= \frac{x^2+1+y}{y} \times \frac{xy}{y+1+x^2} = x, x_7 = (x^2+1) \times \frac{y}{x^2+1} = y
\end{aligned}
$$

例 1.4 (G_2 type ($b=1, c=3$)).

$$
\begin{aligned}
x_2 &= \frac{1+y}{x}, x_3 = \frac{(1+y)^3+x^3}{x^3y}, x_4 = \frac{(1+y)^3+x^3+x^3y}{x^3y} \Big/ \frac{1+y}{x} = \frac{(1+y)^2+x^3}{x^2y} \\
x_5 &= \frac{((1+y)^2+x^3)^3+(x^2y)^3}{x^6y^3} \Big/ \frac{(1+y)^3+x^3}{x^3y} = \frac{1+2x^3+x^6+3y+3x^3y+3y^2+y^3}{x^3y^2} \\
x_6 &= \frac{1+2x^3+x^6+3y+3x^3y+3y^2+y^3+x^3y^2}{x^3y^2} \Big/ \frac{(1+y)^2+x^3}{x^2y} = \frac{1+x^3+y}{xy} \\
x_7 &= \frac{(1+y+x^3)^3+x^3y^3}{x^3y^3} \Big/ \frac{1+2x^3+x^6+3y+3x^3y+3y^2+y^3}{x^3y^2} = \frac{1+x^3}{y} \\
x_8 &= \frac{1+x^3+y}{y} \Big/ \frac{1+x^3+y}{xy} = x, x_9 = (1+x^3) \Big/ \frac{1+x^3}{y} = y
\end{aligned}
$$

上の例を含めて, $\mathcal{A}(b,c)$ に関して以下が知られている。

定理 1.5 ([FZ02, Theorem 3.1], [FZ03, Theorem 1.8]).

(1) $x_n \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}, y^{\pm 1}]$ (Laurent phenomenon)

(2) $bc \leq 3$ であることと, $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が有限集合であることは, 必要十分である。(Finite type classificaiton)

(1) は, 初期変数に関して, すべて Laurent 多項式であることを主張しており, (2) は, $bc \leq 3$ の場合に, 実際に周期的であることが確かめられ, $bc \geq 4$ 以上のときには, ルート系との対応から, 決して $\{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が有限集合ではないことが確かめられる。

例 1.6 ($A_1^{(1)}$ 型 $(b=c=2)$).

$$x_3 = (1+y^2)/x, x_4 = (1+x^2+2y^2+y^4)/(x^2y)$$
$$x_5 = (1+2x^2+x^4+(3+2x^2)y^2+3y^4+y^6)/(x^3y^2)$$
$$x_6 = (1+3x^2+3x^4+x_6+(4+6x^2+2x^4)y^2+(6+3x^2)y^4+4y^6+y^8)/(x^4y^3)$$
$$x_7 = (1+4x^2+6x^4+4x^6+x^8+\cdots+5y^8+y^{10})/(x^5y^4)$$
$$x_8 = (1+5x^2+10x^4+10x^6+5x^8+x^{10}+(6+20x^2+24x^4+12x^6+2x^8)y^2+\cdots+y^{12})/(x^6y^5)$$

1.2.2. クラスター単項式と正値性. $\mathcal{A}(b,c)$ に関しては以下が成り立つことが知られている。
$\mathcal{X}(b,c) := \{x_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$,

$$\mathcal{M}(b,c) := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} \{x_m^c x_{m+1}^{c'}; c, c' \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。この集合と, $\mathcal{A}(b,c)$ のクラスター単項式の集合という。また, $\mathcal{X}(b,c)$ はクラスター変数の集合という。

定理 1.7. (1) $\mathcal{M}(b,c)$ は, $\mathcal{A}(b,c)$ において, 一次独立である。(詳細な係数環については後述)

(2) $\mathcal{M}(b,c)$ が $\mathcal{A}(b,c)$ が $\mathbb{Z}$ 上生成することと, $bc \leq 3$ は必要十分である。

(3) 任意の n に対して, x_n の Laurent 展開は, 正係数をもつ。

上の結果は, 多くの人々の結果に基づく. 以下は, それぞれへの参考文献である.

(1) $bc \leq 3$ の場合
- $\mathcal{M}(b,c)$ が, $\mathbb{Z}$ 上一次独立であることは, [FZ07, Theorem 11.2] で証明されている。
- クラスター単項式が基底になることは, [SZ04, Theorem 2.3] で証明された。

(2) $bc = 4$ の場合
- クラスター単項式を含む正値性をもつような基底が構成されている。([SZ04, Theorem 2.3])
- x_n の Laurent 展開の展開係数の組合せ的な意味付けが, Musiker-Propp([MP07]) によって与えられた。

(3) $b=c=r$ の時に,
- $\mathcal{M}(b,c)$ が, $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることは, $b=c=r$ の場合に, Geiss-Leclerc-Schröer[GLS11b] によって証明された。

- $b=c=r$ のときに, 中島 [Nak11] によって, (後述する) モノイダル圏論化を用いた正値性が示された。
- $b=c=r$ のときに, 初期変数に関する正値性が, 中島 [Nak11, Appendix] と Qin[Qin10] によって示された。これは, Caldero-Chapoton 公式と呼ばれる, 非輪状型の初期変数に関する Laurent 展開を, 箙グラスマン多様体のオイラー数の母関数として記述する公式において, 箙グラスマン多様体の奇数次のコホモロジーの消滅を用いて証明した。
- $b=c=r$, r が一般の時の x_n の展開係数の組合せ的な意味付けが, Lee-Schiffler [LS11] によって与えられた。

(4) 一般の b,c に対して,

- $\mathcal{M}(b,c)$ が, $\mathbb{Q}$ 上一次独立であることは, Demonet[Dem] によって証明されている。
- 非輪状型の箙の Caldero-Chapoton 公式の正値性から, rank 2 の非対称型クラスター代数のクラスター展開の正値性が得られることが, Dupont[Dup09] において示された。

1.3. クラスター代数の定義. クラスター代数は, **クラスター変数** (cluster variable) と呼ばれる変異によって得られる **(一般には無限個の) 生成元**によって生成され, 各クラスターはクラスター変数のいくつかの集まりで, ひとつのクラスターに含まれるクラスター変数の単項式の全体は**クラスター単項式**と呼ばれる。彼らの予想は, クラスター単項式がすべて双対標準基底 (の特殊化) に含まれているというものである。特に, クラスター単項式が一次独立であることを主張している。これは, Berenstein-Zelevinsky による極大冪単部分群の量子座標環の string basis[1]に関する, $G=SL_n$ $(2\le n\le 4)$ の詳細な研究 [BZ93] からの期待であった。また導入部において述べられている, Laurent 現象における係数の非負性の予想は, ADE 型の (双対) 標準基底のもつ正値性に基づいている。Berenstein-Zelevinsky による結果 [BZ93, Theorem 1.6, §9] はクラスターの双対標準基底における組み合わせ的な意味として理解される。

クラスター代数の定義を簡単に与える。ここでは, 歪対称型かつ幾何型の係数の場合のみを扱う。詳しくは, [FZ07] を参照されたい。

整数 $x\in\mathbb{Z}$ に対して, $[x]_+ := \max(x,0)$ とし,

$$\mathrm{sgn}(x) := \begin{cases} 1 & x>0; \\ 0 & x=0; \\ -1 & x<0 \end{cases}$$

と約束する。

J を有限集合とし, 変数 $\{u_j\}_{j\in J}$ に関する**トロピカル半体** **(tropical semifield)**とは, $\{u_j\}_{j\in J}$ により自由に (乗法的に) 生成されたアーベル群であって, 加法 $\oplus$ を

$$\prod_{j\in J} u_j^{a_j} \oplus \prod_{j\in J} u_j^{b_j} = \prod_{j\in J} u_j^{\min(a_j,b_j)}$$

[1] dual canonical basis のもつ string property を抽象化したもの

で定義する。

$1 \leq r \leq n$ を整数とし, $\mathbb{P}$ を変数 $x_{r+1}, \cdots, x_n$ に関するトロピカル半体とし, $\mathbb{QP}$ を $\mathbb{P}$ の有理数上の群環とする。定義から, $\mathbb{QP}$ は $x_{r+1}, \cdots, x_n$ に関する有理数係数の Laurent 多項式環である。$\mathcal{F}$ を $\mathbb{QP}$ 係数の r 変数多項式環の分数体とする。

定義 1.8. (1) **種** (seed)とは, 以下の条件を満たす組 $(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ の事を言う。

- $\widetilde{B}$: $n \times r$ 行列で, 最初の $r \times r$ 部分行列は歪対称
- $\mathbf{x} = \{x_1, \cdots, x_r\}$ は, $\mathcal{F}$ の自由生成元

$\widetilde{B}$ を種の**交換行列** (exchange matrix)といい, $\mathbf{x}$ を種の**クラスター**(cluster)という。

(2) 種 $(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ と $1 \leq k \leq r$ に対して, k 方向の**種の変異** (seed mutation) $\mu_k(\widetilde{B}, \mathbf{x}) = (\widetilde{B}', \mathbf{x}')$ を以下で定める。

- $\widetilde{B}' = (b'_{ij})$ を以下で定める。

$$b'_{ij} = \begin{cases} -b_{ij} & i = k \text{ もしくは } j = k \text{ の場合;} \\ b_{ij} + \mathrm{sgn}(b_{ik})[b_{ik}b_{kj}]_+ & \text{それ以外.} \end{cases}$$

- x_k^* を以下の**交換関係式** (exchange relation)で定め, $\mathbf{x}' = \mathbf{x} \setminus \{x_k\} \cup \{x_k^*\}$ とする。

$$x_k^* x_k = \prod_{i=1}^{n} x_i^{[b_{ik}]_+} + \prod_{i=1}^{n} x_i^{[-b_{ik}]_+}.$$

$\mu_k(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ が種を定め, μ_k が対合であること, すなわち $\mu_k^2(\widetilde{B}, \mathbf{x}) = (\widetilde{B}, \mathbf{x})$ であることが簡単に確かめられる。

$\mathbb{T}_r$ を r-正則な樹木とする。このとき, 各頂点から出ている各辺は, 相異なるように $1, \ldots, r$ によって色付けされているとする。

定義 1.9. **クラスターパターン** (cluster pattern)とは, 各頂点 $t \in \mathbb{T}_r$ に対する種 $(\widetilde{B}_t, \mathbf{x}_t)$ の対応であって, 任意の k で色づけられている t と t' を結ぶ辺に対して, $(\widetilde{B}_{t'}, \mathbf{x}_{t'}) = \mu_k(\widetilde{B}_t, \mathbf{x}_t)$ が成り立っているものをいう。定義から, r-正則な樹木の起点 t_0 での種によって一意的に決まっている。t_0 での種 $(\widetilde{B}_{t_0}, \mathbf{x}_{t_0})$ を**初期種** (initial seed)という。

初期種の選び方は任意であるから, $(\widetilde{B}, x)$ を初期種とするクラスターパターンを $t \mapsto (\widetilde{B}_t, \mathbf{x}_t)$ で表す。$(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ から得られるクラスターとは, 種 $(\widetilde{B}_t, \mathbf{x}_t)$ のクラスター$\mathbf{x}_t$ のことを言う。

定義 1.10. (1) $\mathcal{X}(\widetilde{B}, \mathbf{x}) := \bigcup_{t \in \mathbb{T}_t} \mathbf{x}_t$ をクラスター変数のなす集合といい, 各元を**クラスター変数** (cluster variable)という。

(2) クラスター変数のなす集合 $\mathcal{X}(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ によって, 生成される $\mathcal{F}$ の $\mathbb{ZP}$ 部分代数 $\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ を (係数付き)**クラスター代数** (cluster algebra)といい, $\mathbb{ZP}$ を**係数環**という。

(3) クラスター単項式とは, ある $t \in \mathbb{T}$ におけるクラスター$\mathbf{x}_t$ に含まれるクラスター変数の単項式

$$x_{\mathbf{a};t} := \prod_{1 \leq i \leq n} x_{i;t}^{a_i} \in \mathcal{F}, \mathbf{a} = (a_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

のことを言う。クラスター単項式全体のなす集合を $\mathcal{M}(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ で表す。

$r = n$ のときを**係数なしクラスター代数** (**cluster algebra without coefficient**)といい, $\mathbb{ZP} = \mathbb{Z}$ である。

1.3.1. 交換行列 $\widetilde{B}$ の変異は, **氷箙** (**ice quiver**)の変異を用いても定式化することができる。まず, 箙 $Q = (Q_0, Q_1)$ に対して, $\mathrm{out}, \mathrm{in} \colon Q_1 \to Q_0$ を始点, 終点を対応させる写像とし, 歪対称行列 $B_Q = (b_{ij})_{i,j \in Q_0}$ を

$$b_{ij} := \#\{h \in Q_1; \mathrm{out}(h) = i, \mathrm{in}(h) = j\} - \#\{h \in Q_1; \mathrm{out}(h) = j, \mathrm{in}(h) = i\}$$

で定める。逆に, 歪対称行列に付随する箙としては,

(1) ループ (edge loop) を含まない.
(2) 長さ 2 のサイクル (2-cycle) を含まない.

のみを考えることで, 1:1 対応が得られる。行列の変異は, 上の条件をみたすような箙の変異を用いても以下のように, 定義することが出来る。

(1) 辺の組 $\alpha \colon i \to k$, $\beta \colon k \to j$ に対して, 新たな辺 $[\beta\alpha] \colon i \to j$ を追加する.
(2) k を始点ないし終点とする辺の向きをひっくり返す.
(3) 2-cycle を全て取り除く。

箙 Q と頂点集合の分割 $Q_0 = \mathbf{pr} \sqcup \mathbf{fr}$ の組を**氷箙** (**ice quiver**)といい, 氷箙に対して同様の構成をすることで, $\widetilde{B} = (b_{ij})_{i \in Q_0, j \in \mathbf{pr}}$ を

$$b_{ij} := \#\{h \in Q_1; \mathrm{out}(h) = i, \mathrm{in}(h) = j\} - \#\{h \in Q_1; \mathrm{out}(h) = j, \mathrm{in}(h) = i\}$$

で定めることで, $r \times n$ 行列で, $\mathbf{pr} \times \mathbf{pr}$ で添字付けられた主要部 $r \times r$ 行列が歪対称行列であるようなものが得られる。$\mathbf{fr}$ の間の辺は, 変異においても用いられないが, 変異によって変化するので, 各変異ごとに取り除くことと約束する。以下では, (氷) 箙に付随する (係数付き) クラスター代数を $\mathcal{A}(Q)$ で表し, クラスター変数の集合を $\mathcal{X}(Q)$, クラスター単項式の集合を $\mathcal{M}(Q)$ で表す。

1.4. クラスター代数の基本問題. まず, クラスター代数の基本的な結果は以下である。

定理 1.11 (Laurent 現象). $(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ に付随するクラスター代数 $\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x})$ は, $\mathbf{x}$ に関する $\mathbb{ZP}$ 係数の Laurent 多項式に含まれる。すなわち,

$$\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x}) \subset \mathbb{ZP}[\mathbf{x}^{\pm 1}].$$

なお, クラスター代数は, 初期種のとり方にはよらないので, 実際には,

$$\mathcal{A}(\widetilde{B}, \mathbf{x}) \subset \bigcap_{t \in \mathbb{T}} \mathbb{ZP}[\mathbf{x}_t^{\pm 1}].$$

が成り立っている。また, 係数部分は, 逆元を追加する操作がないので, 係数環を $\mathbb{Z}[x_{r+1},\ldots,x_n]$ に取り替えれば, すなわちクラスター代数の定義をクラスター変数によって生成される $\mathbb{Z}[x_{r+1},\ldots,x_n]$ 代数とすれば, 以下が成り立つ。

$$\mathcal{A}(\widetilde{B},\mathbf{x}) \subset \mathbb{Z}[x_{1;t}^{\pm 1},\cdots,x_{r;t}^{\pm 1};x_{r+1},\cdots,x_n].$$

さて, 変異は, 引き算を含まない有理関数で定義される。また, 以下の "有限型の分類" が知られている。

定理 1.12. $\mathcal{Q}$ をクラスター箙とし, $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ を付随する係数なしクラスター代数とする。このとき, $\mathcal{X}(\mathcal{Q})$ が有限集合であることと, $\mathcal{Q}$ が Dynkin 箙に変異同値であることは必要十分である。

ここで, **変異同値 (mutation-equivalent)** とは, 変異の合成によって移りあう箙の同値関係のことを言い, Dynkin 箙とは, (ADE 型の)Dynkin 図形を下部グラフとするような箙のことである。[2] また, 有限型の場合には, クラスター単項式に関して以下の事実が知られている。

定理 1.13. $\mathcal{Q}$ を Dynkin 箙とし, $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ を付随する係数なしクラスター代数とする。$\mathcal{M}(\mathcal{Q})$ は, $\mathcal{A}(\mathcal{Q})$ の $\mathbb{Z}$ 上の自由基底をなす。

すなわち, $\mathcal{Q}$ によってさだまるクラスターパターンが, Dynkin 箙を交換行列とするような種を含むことを言う。また, 以下の正値性も知られている。

定理 1.14 ([Nak11]). $\mathcal{Q}$ を Dynkin 箙とする。このとき,

$$\mathcal{X}(\mathcal{Q}) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathbf{x}_t^{\pm}]$$

が成り立つ。

上の定理は, $\mathcal{Q}$ が二部グラフに変異同値であるときに示された。また, $\mathcal{Q}$ が曲面の三角形分割から得られる場合 [MSW] に, 正値性が知られている。

1.4.1. クラスター代数の動機づけなどから鑑みると, クラスター代数の基本的な問題は, まとめると以下の形で述べられる。

予想 1.15. (1) クラスター変数の正値性:

$$\mathcal{X}(\mathcal{Q}) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathbf{x}_t^{\pm}].$$

(2) クラスター単項式を含む正値性をもつ基底 $\mathcal{B}(\mathcal{Q})$ の構成:

$$\mathcal{M}(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{B}(\mathcal{Q}) \subset \bigcap_{t\in\mathbb{T}} \mathbb{Z}_{\geq 0}[\mathbf{x}_t^{\pm}].$$

[2] また, (ADE 型の)Dynkin 図形は, 任意の向きが鏡映とよばれる sink または source とよばれる特別な頂点における変異によって移りあることが知られており, 特に, 二部グラフ (bipartite graph) の構造を入れて, bipartite quiver の例とも考えることができる。

1.5. モノイダル圏論化. さて, 一般にクラスター代数の基本問題に取り組む上で, 概念的な基底の構成のスローガンとして, Hernandez-Leclerc[HL10] による**モノイダル圏論化**がある。ここで述べる**圏論化**とは, 一般に (量子) 代数を (次数付) モノイダル完全圏を用いて, (次数付)Grothendieck 環として得るものであり, 構成より Grothendieck 環に自然に定まる基底 [3]が, (量子) 代数の良い正値性を満たす基底を与えるという枠組みである。双対標準基底の圏論化に関しては, Lascoux-Leclerc-Thibon, 有木, Khovanov-Lauda, Rouquier, Varagnolo-Vasserot らによって活発に研究されており, 後述する**双対標準基底**は, アーベル圏の (次数付) 単純加群のなす基底と同定されることが知られている。圏論化の観点から, 以下のクラスター代数の圏論化が提起された。簡単のため, 次数付に関しては, 省略する。

定義 1.16. $\mathcal{A}$ をモノイダルアーベル圏とする.

(1) 単純対象 L が**素 (prime)**であるとは, 非自明な分解 $L \simeq L_1 \otimes L_2$ が存在しないことを言う.

(2) 単純対象 L が**実 (real) (強く実 (strongly real))**であるとは,$L \otimes L$ が単純対象である (resp. 任意の $m \geq 2$ に対して,$L^{\otimes m}$ が単純対象である) ことをいう.

以下では, 係数環は, $\mathbb{Z}[x_{r+1}, \ldots, x_n]$ にとる。

定義 1.17 (モノイダル圏論化 [HL10, Definition 2.1]). $\mathcal{A}$ を (係数付き) クラスター代数とし,$\mathscr{A}$ をモノイダルアーベル圏とする. $\mathscr{A}$ が $\mathcal{A}$ の**モノイダル圏論化 (monoidal categorification)**であるとは, 以下の条件を満たすことをいう.

(0) 表現環 (Grothendieck 環)$K_0(\mathscr{A})$ が $\mathcal{A}$ と環として同型である.

(1) $K_0(\mathscr{A})$ の単純対象の同型類のなす基底 (“標準基底”)$\mathcal{B}$ が, クラスター単項式の集合を含む.

(2) $\mathcal{A}$ のクラスター単項式の集合が, 実な単純対象の同型類のなす $\mathcal{B}$ の部分集合と一致する.

(3) $\mathcal{A}$ のクラスター変数の集合が, 素かつ実な単純対象の同型類のなす $\mathcal{B}$ の部分集合と一致する.

上の定義の (1) において, クラスター単項式に対応する単純対象 L は, クラスター単項式の定義から,$L \otimes L$ は単純であるのみならず, 任意の $m \geq 2$ に対して,$L^{\otimes m}$ は単純である. ゆえに実ならば強くであることがわかる. モノイダル圏論化の構成は, 一般には非常に困難であるが, 双対標準基底の圏論化の視点と双対標準基底からのクラスター代数の動機づけからは, スローガンとして非常に自然である. さて, 上のような圏論化が得られたとき, 正値性予想等は, クラスター単項式が単純対象に対応するということと, クラスター展開の存在から簡単に従う。

2. 前射影多元環による加法圏論化

上のクラスター代数の基本問題を “部分的に” 解決し仕事として, Geiss-Leclerc-Schröer らによる前射影多元環によるクラスター代数の加法圏論化がある。ここで述べる圏論化は,

[3]例えば, アーベル圏からは単純対象のなす基底が, 射影加群のなす完全圏からは直既約加群のなす基底が得られる。

前述したモノイダル圏論化の圏論化とは**意味が異なる**が, クラスター代数の性質を圏論的に反映した圏を構成したという意味で, 圏論化と呼ばれている。

2.1. 準備. G を対称カルタン行列に付随する Kac-Moody 群とする。H をカルタン部分群とし, $B_\pm$ を H を含む Borel 部分群とその opposite, $N_\pm$ をそれぞれの極大冪単部分群とする。W を Weyl 群とし, $N(w)=N_+\cap \dot{w}N_-\dot{w}^{-1}$ を $\Delta_+(w):=\Delta_+\cap w^{-1}\Delta_-$ に付随した冪単部分群, $N'(w)=N_+\cap \dot{w}N_+\dot{w}^{-1}$ を complement $\Delta'_+(w):=\Delta_+\cap w^{-1}\Delta_+$ に付随する冪単部分群とする。このとき代数多様体としての同型 $N_+\simeq N(w)\times N'(w)$ を用いれば, $N(w)$ の座標環を N_+ の座標環の $N'(w)$-不変式環として同一視される。すなわち, 代数としての埋め込み

$$\mathbb{C}[N(w)]\hookrightarrow \mathbb{C}[N_+]^{N'(w)} \tag{2.1}$$

が存在する。また, この埋め込みは, 普遍展開環における PBW 基底を用いても構成できる。$\mathbb{C}[N_+]$ には, 前射影多元環の冪零表現多様体 (=:**Lusztig 箙多様体 (Lusztig quiver variety)**) の既約成分によって, 添字付けられる, **双対半標準基底 (dual semicanonical basis)** という "幾何学的な" 基底の存在が知られている。詳細は省略するが, **リジッドな**前射影多元環加群に付随する規約成分から定まる双対半標準基底の元が, 以下の Geiss-Leclerc-Schröer の一連の ([GLS11b] を含む) 仕事において, 基本的かつ本質的であることを注意しておきたい。詳しいことについては, Lusztig [Lus00] や Geiss-Leclerc-Schröer によるサーベイ [GLS08], Leclerc によるサーベイ [Lec10] を参照されたい。

2.2. $w\in W$ とその最短表示 $\vec{w}=(i_1,\dots,i_\ell)\in R(w)$ に対して, $I_{\vec{w}}=\{1,\dots,\ell\}$ を頂点とする quiver $\mathcal{Q}_{\vec{w}}$ を以下の方法で定義する。$j\in I$, $1\le k\le \ell$ に対して, 以下の操作を定義する。$(\ )^\pm\colon I_{\vec{w}}\to I_{\vec{w}}\cup\{\ell+1\}$ (resp. $I_{\vec{w}}\cup\{0\}$) を以下で定義する.

$$\begin{aligned}
k^- &:= \max\{0, 1\le s\le k-1 \mid i_s=i_k\},\\
k^+ &:= \min\{k+1\le s\le r, r+1 \mid i_s=i_k\}.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
k_{\max} &:= \max\{1\le s\le r \mid i_s=i_k\},\\
k_{\min} &:= \min\{1\le s\le r \mid i_s=i_k\},\\
k_j &:= \max\{1\le s\le r \mid i_s=j\}.
\end{aligned}$$

と定める. $I_{\vec{w}}$ の frozen part を $\{k_j\}_{k\in I}\subset I_{\vec{w}}$ で定める。また以下の二種類の辺を考える。

- $k^+\ge s^+\ge k>s$ なる頂点の組 $1\le s,k\le\ell$ に対して, 元の Dynkin 図形 (I,E) に付随した double oriented graph (I,H) の辺 $a\colon i_s\to i_k$ に対して, $a\colon s\to k$ を書く。このようにして得られる辺を **ordinary arrow** という.
- $1\le k\le\ell$ に対して, $\gamma_k\colon k\to k^-$ を $k^->0$ の時に 1 本引く. このようにして得られている辺を **horizontal arrow** という.

これは, (I,E) に付随した translation quiver と呼ばれる quiver の中で $I_{\vec{w}}$ に相当する fullsubquiver(ordinary arrow に対応する) にさらに, translation に対応する辺 (horizontal arrow) を追加したものである．詳しくは, [BIRS09, Theorem III.4.1] や [GLS10, Proposition 2.23] を参照されたい。

2.3. Geiss-Leclerc-Schröer[GLS11b] の主結果は以下である．

定理 2.2 ([GLS11b]). (1) $\mathbb{C}$-algebra としての同型 $\Phi_{\vec{w}}\colon \mathcal{A}(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \cong \mathbb{C}[N(w)]$ が存在する．

(2) $\mathcal{S}^*(w) := \mathbb{C}[N(w)] \cap \mathcal{S}^*$ は,$\mathbb{C}[N(w)]$ の $\mathbb{C}$ 上の基底を与える．

(3) $\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \subset \mathcal{S}^*(w)$.

上の同型は, 初期種 $\{x_k\}_{1\leq k\leq \ell}$ に対して, **(制限された) 一般化小行列式 (generalized minor)**

$$\left\langle D_{\varpi_{i_k}, s_{i_1}\dots s_{i_k}\varpi_{i_k}}, n\right\rangle := \left\langle u_{\varpi_{i_k}}, n u_{s_{i_1}\dots s_{i_k}\varpi_{i_k}}\right\rangle \ (\forall n \in U(\mathfrak{n}))$$

を対応させることで得られている。ここで, $\mathbb{C}[N]$ は $U(\mathfrak{n})$ の制限双対とみなしており, $u_{\varpi_{i_k}}$, $u_{s_{i_1}\dots s_{i_k}\varpi_{i_k}}$ はそれぞれ最高ウェイトを ϖ_{i_k} とする可積分最高ウェイト表現の最高ウェイトベクトル $u_{\varpi_{i_k}}$ と端ウェイト $s_{i_1}\dots s_{i_k}\varpi_{i_k}$ をもつ端ウェイトベクトル $u_{s_{i_1}\dots s_{i_k}\varpi_{i_k}}$ である．

また, 上記の一般化小行列式は**クラスター傾斜加群 (cluster-tilting module)**というリジッドな加群に対応する双対半標準基底の元として得られている。同型の構成においては，前射影多元環の表現論と双対半標準基底の掛け算に関する性質が本質的に重要である。詳しいことは, [GLS11b] を参照されたい。

2.4. さて, 上記の構成によって, クラスター単項式を含むような基底の構成がなされたわけであるが, さらに Geiss-Leclerc-Schröer [GLS11b, Conjecture 18.1] は, 以下の予想を提出した．

予想 2.3 (開軌道予想 (open orbit conjecture)).

$$\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \subset \mathbf{B}^{\mathrm{up}}|_{q=1}$$

ここで, 右辺は双対標準基底とよばれる基底の $q=1$ への "特殊化" である．双対標準基底の一般の定義は, ここでは述べないが, 量子展開環の基底 (標準基底) で, 座標環の量子類似である "量子座標環" の基底で, それらの表現論において, 基本的かつ重要な基底である．また, それにとどまらず, 量子展開環の圏論化の理論において, 単純対象に対応する基底である．上記では, w に応じた形で書いたが, 一般にリジッドな前射影多元環上の加群に対応する既約成分に関する予想として述べられている．$\mathcal{Q}_{\vec{w}}$ においては, リジッドな加群が初期種に対応する標準的な**クラスター傾斜加群 (cluster-tilting module)** からすべて変異とよばれる操作によって, 得られているだろうという Buan-Iyama-Reiten-Scott による予想 [BIRS09, Conjecture II.5.3] もある．

Geiss-Leclerc-Schröer らによる仕事は, 図式にしてまとめると以下となる．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \arrow[r, "(1)"] & \mathbb{C}[N(w)] \subset \mathbb{C}[N] \\
\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "(3)"'] & \mathcal{S}^*(w) := \mathcal{S}^* \cap \mathbb{C}[N(w)] \arrow[u, hook, "(2)"']
\end{tikzcd}
$$

と開軌道予想をまとめて考えると，以下の“量子化”された予想が自然であることが諒解されるだろう．

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}_q(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \arrow[r, "(1)"] & \mathcal{O}_q[N(w)] \subset \mathcal{O}_q[N] \\
\mathcal{M}_q(\mathcal{Q}_{\vec{w}}) \arrow[u, hook] \arrow[r, hook, "(3)"'] & \mathbf{B}^{\mathrm{up}}(w) := \mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathcal{O}_q[N(w)] \arrow[u, hook, "(2)"']
\end{tikzcd}
$$

すなわち，

(0) クラスター代数 $\mathcal{A}(\mathcal{Q}_{\vec{w}})$ の量子化 (“量子クラスター代数”)$\mathcal{A}_q(\mathcal{Q}_{\vec{w}})$ を考える．
(1) 座標環 $\mathcal{M}(\mathcal{Q}_{\vec{w}})$ の量子類似 (量子座標環)$\mathcal{O}_q[N(w)] \subset \mathcal{O}_q[N]$ を考え，量子クラスター代数との同型
(2) 量子座標環と双対標準基底との整合性
(3) 量子化されたクラスター単項式が双対標準基底に (q べきを除いて) 含まれることを示す．

クラスター代数の量子化 (量子クラスター代数) は，Berenstein-Zelevinsky[BZ05] によって導入されており，初期条件として，初期種のクラスター変数の生成する量子トーラスの q 交換関係に q 冪 (整合対) を追加することで，定義されることが知られている．筆者の結果は，

- 量子座標環 $\mathcal{O}_q[N(w)]$ の “導入”
- (2) の双対標準基底との整合性

である．また，上記の主張自体は，開軌道予想そのものとは独立した主張であり，対称型とは限らない一般の対称化可能 Kac-Moody Lie 環に付随する量子展開環に対して，意味をなす主張であることに注意されたい．

3. 量子冪単部分群と双対標準基底

この章では，[Kim11] の概説を行う．量子冪単部分群とは，冪単部分群 $N(w)$ の量子座標環 $\mathcal{O}_q[N(w)]$ のことである．ここでは，“(quasi) affine variety X の量子座標環” とは，(可換とは限らない)$\mathbb{Q}(q)$-代数 $\mathcal{O}_q[X]$ とその $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-格子 $\mathcal{O}_q[X]_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$ であって，$q=1$ への特殊化 $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \mathcal{O}_q[X]_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$ と座標環 $\mathbb{C}[X]$ との同型

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \mathcal{O}_q[X]_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \cong \mathbb{C}[X]$$

が存在するものを想定する．前章で「量子座標環 $\mathcal{O}_q[N(w)]$ の “導入”」と述べたが，$\mathbb{Q}(q)$ 代数としては，既に Levendorskii-Soibelmann[LS91], De Concini-Kac-Procesi[DCKP95] らに

よって導入されている代数を用い, 以下では, その $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-格子を具体的に定義し, 双対標準基底との整合性を示し, 量子座標環と思うことにする. 双対標準基底を定義する中で導入される双対 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底の整値性が, $\mathfrak{g}$ が有限型の場合のみに知られており, 今回の結果で新しいところである. また, $A_1^{(1)}$ 型の特別な w に対しては, Leclerc[Lec] によって, 具体的な計算によって整値性が示されていた.

3.1. この章では, 量子展開環の記号を準備する. $\mathfrak{g}$ を対称化可能 Kac-Moody Lie 環として, $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ を付随する量子展開環とする. $\{e_i, f_i\}_{i\in I} \cup \{q^h\}_{h\in P^\vee}$ を生成元とする代数で, ここでは, $\{f_i\}_{i\in I}$ を生成元とする部分 $\mathbb{Q}(q)$-代数 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ を考える. $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ には, ルート格子による次数付けがあり, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ には, 次数付けとその Cartan-Killing 形式によりひねられた積を考えることで, 余積 r が定義される. さらに, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ には, $\mathbb{Q}(q)$ 値対称非退化双線型形式 $(\ ,\ )_K \colon \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \times \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathbb{Q}(q)$ と (ひねられた) 余積 $r\colon \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \otimes \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ であって,

$$(xy, z)_K = (x \otimes y, r(z))_K$$

を満たすものが存在する. よって, 自己双対な (ひねられた) 双代数となり, それ自身を N_- の量子座標環と考えることが出来る. ここで, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-格子として, $\{f_i^{(n)}\}_{i\in I, n\geq 0}$ によって生成される $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-algebra である Lusztig $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 格子 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbb{Z}[q^\pm]}$ の双対格子 $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Z}[q^\pm]}$ を考える. Lusztig 格子は, Kostant による $U(\mathfrak{n})$ の $\mathbb{Z}$-格子 (Kostant 格子) の q 類似である. よって, ここではその双対を考える.

Lusztig 格子には, Lusztig による標準基底 (canonical basis)$\mathbf{B}$ とよばれる非常に良い性質をもつ基底が知られている. 双対格子において, その双対標準基底 (dual canonical basis)$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ を考える. 標準基底 $\mathbf{B}$ は, Grojnowski-Lusztig により, 柏原による (lower) 大域基底 (global basis) と一致することが知られている. ここでは, 標準基底について詳しいことが述べない. 次章で, 双対標準基底の "具体的な構成" について述べる.

3.2. Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底. この章では, Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底とその双対基底 (Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底) を用いた, 双対標準基底の構成について述べる.

3.2.1. [Lus93, 37.1.3] に従って,$i \in I$ と $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対して, $\mathbb{Q}(v)$ 代数自己同型 $T'_{i,\epsilon} \colon \mathbf{U}_v(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ を以下で定義する.

$$T'_{i,\epsilon}(v^h) = v^{s_i(h)}, \tag{3.1a}$$

$$T'_{i,\epsilon}(e_i) = -t_i^{\epsilon} f_i, \tag{3.1b}$$

$$T'_{i,\epsilon}(f_i) = -e_i t_i^{-\epsilon}, \tag{3.1c}$$

$$T'_{i,\epsilon}(e_j) = \sum_{r+s=-\langle h_i, \alpha_j\rangle} (-1)^r v_i^{\epsilon r} e_i^{(r)} e_j e_i^{(s)} \text{ for } j \neq i, \tag{3.1d}$$

$$T'_{i,\epsilon}(f_j) = \sum_{r+s=-\langle h_i, \alpha_j\rangle} (-1)^r v_i^{-\epsilon r} f_i^{(s)} f_j f_i^{(r)} \text{ for } j \neq i. \tag{3.1e}$$

$i \in I$ と $\epsilon \in \{\pm 1\}$ に対して, $\mathbb{Q}(v)$ 代数自己同型 $T''_{i,\epsilon}\colon \mathbf{U}_v(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_v(\mathfrak{g})$ を以下で定義する.

(3.2a) $$T''_{i,-\epsilon}(v^h) = v^{s_i(h)},$$

(3.2b) $$T''_{i,-\epsilon}(e_i) = -f_i t_i^{-\epsilon},$$

(3.2c) $$T''_{i,-\epsilon}(f_i) = -t_i^{\epsilon} e_i,$$

(3.2d) $$T''_{i,-\epsilon}(e_j) = \sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r v_i^{\epsilon r} e_i^{(s)} e_j e_i^{(r)} \text{ for } j \neq i,$$

(3.2e) $$T''_{i,-\epsilon}(f_j) = \sum_{r+s=-\langle h_i,\alpha_j\rangle} (-1)^r v_i^{-\epsilon r} f_i^{(r)} f_j f_i^{(s)} \text{ for } j \neq i.$$

このとき, 以下が成り立つ.

$$T'_{i,\epsilon} T''_{i,-\epsilon} = T''_{i,-\epsilon} T'_{i,\epsilon} = \mathrm{id}.$$

以下では, $T_i = T'_{i,-1}$ としておく.

3.2.2. $w \in W$ と $\overrightarrow{w} \in R(w)$ を固定する. $\beta_k = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}}(\alpha_{i_k})$ と定める. $N(w)$ に対応するルート系の部分集合は $\{\beta_k\}_{1 \le k \le \ell}$ で与えられる. ルートベクトルとその被除べき $F(c_k\beta_k)$ を

$$F(c_k\beta_k) := T_{i_1} \dots T_{i_{k-1}}(f_{i_k}^{(c_k)})$$

で定め, 付随する Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底 $F(\overrightarrow{w}) := \{F(\mathbf{c}, \overrightarrow{w})\}_{\mathbf{c} \in \mathbf{Z}^{\ell}_{\ge 0}}$ を

$$F(\mathbf{c}, \overrightarrow{w}) := F(c_\ell\beta_\ell) \dots F(c_1\beta_1)$$

で定める. Lusztig により, $F(\overrightarrow{w})$ は一次独立であることが示されており, その $\mathbb{Q}(q)$-span $\mathbf{U}_q^-(w)$ は, $\overrightarrow{w} \in R(w)$ のとり方によらないことや, $F(\overrightarrow{w}) \subset \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})_{\mathbf{Z}[q^{\pm 1}]}$ が示された. さらに, Levendorskii-Soibelman[LS91] の交換関係式により, $\mathbf{U}_q^-(w)$ は $\{F(\beta_k)\}_{1 \le k \le \ell}$ によって生成される $\mathbb{Q}(q)$-algebra であることが分かり, De Concini-Kac-Procesi[DCKP95] によって導入された.

また, $F(\overrightarrow{w})$ は, $(\ ,\ )_K$ に関して quasi-orthonormal であることが知られている. すなわち, 以下を満たす.

$$(F(\mathbf{c}, \overrightarrow{w}), F(\mathbf{c}', \overrightarrow{w}))_K - \delta_{\mathbf{c},\mathbf{c}'} \in q\mathbb{Z}[[q]] \cap \mathbb{Q}(q)$$

よって, $\mathbf{U}_q^-(w)$ は自己双対であると考え, 座標環の類似を $\mathbf{U}_q^-(w)$ で定義するのが妥当であると考えられる. 標準基底ないし結晶基底との関係については, 斉藤 [Sai94], Lusztig[Lus96] によって以下が示された。

命題 3.3. $(\mathscr{L}(\infty), \mathscr{B}(\infty))$ を $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ の結晶基底とする。このとき,

$$b(\mathbf{c}, \overrightarrow{w}) := F(\mathbf{c}, \overrightarrow{w}) \bmod q\mathscr{L}(\infty) \in \mathscr{B}(\infty)$$

が成り立つ.

$\mathscr{B}(w) \subset \mathscr{B}(\infty)$ で対応する部分集合とする.

3.2.3. さて, 結晶基底に関する整合性が上で示されているが, ここではその持ち上げが, 双対標準基底に関して成り立つことを述べる。そのために, まず, 双対 Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底 $F^{\mathrm{up}}(\vec{w}) := \{F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w})\}_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}}$ を以下で定める.

$$F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w}) := \frac{1}{(F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w}), F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w}))_K} F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w})$$

命題 3.4. (1) $F^{\mathrm{up}}(c_k\beta_k) = q_{i_k}^{\binom{c_k}{2}} F^{\mathrm{up}}(\beta_k)^{c_k} \in \mathbf{B}^{\mathrm{up}}$

(2) $\mathbf{U}_v^-(w)^{\mathrm{up}}_{\mathcal{A}} := \bigoplus_{\mathbf{c}\in\mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}} \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] F^{\mathrm{up}}(\mathbf{c}, \vec{w})$ は $F^{\mathrm{up}}(\beta_k)$ によって生成される $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-subalgebra である.

(1) は Chevalley 生成元の被除べき $f_i^{(n)}$ が標準基底の元であることと, Lusztig の組み紐対称性と (双対) 標準基底の性質より分かり, (2) は (1) の元に, Poincaré-Birkhoff-Witt 型基底の被除べきの双対に関する交換関係式の整値性が示され, 分かる. (論文では, $\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]$ 係数で述べらているが, より強く $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 係数で証明することができる.)

上の性質から, 双対標準基底を特徴付ける対合 σ に関する三角性が示され, 標準的な議論で以下の結果が得られる.

定理 3.5 (Caldero, Leclerc, K). (1) $\mathbf{B}^{\mathrm{up}}(w) := \mathbf{B}^{\mathrm{up}} \cap \mathbf{U}_q^-(w)$ は, $\mathbf{U}_q^-(w)$ の $\mathbb{Q}(q)$-basis である.

(2) $\mathbf{U}_q^-(w)^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} = \bigoplus_{b\in\mathscr{B}(w)} \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] G^{\mathrm{up}}(b)$

ただし, 双対標準基底 $\mathbf{B}^{\mathrm{up}} = G^{\mathrm{up}}(\mathscr{B}(\infty))$ を特徴付ける balanced triple における持ち上げ $G^{\mathrm{up}}\colon \mathscr{L}(\infty)/q\mathscr{L}(\infty) \cong \mathscr{L}(\infty) \cap \sigma(\mathscr{L}(\infty)) \cap \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Q}[q^{\pm 1}]}$ である.

また, 上の定理の証明のなかで証明した整値性を用いれば, 以下の事実が示される.

系 3.6.

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \mathbf{U}_q^-(w)^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} \simeq \mathbb{C}[N(w)]$$

以下では, $\mathcal{O}_q[N(w)]_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} := \mathbf{U}_q^-(w)^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$ とする.

3.3. さて, 座標環 $\mathbb{C}[N(w)]$ の量子類似が得られたので, (制限された) 一般化小行列式 $D_{\varpi_{i_k}, s_{i_1}\cdots s_{i_k}\varpi_{i_k}}$ の量子類似と, 初期種の基本的な性質であるそれらの単項式がすべて**双対半標準基底** S^* に含まれるという性質の量子類似として, 量子一般化小行列式の単項式がすべて**双対標準基底**$\mathbf{B}^{\mathrm{up}}$ に含まれるということを述べる.

3.3.1. $w \in W$ と最短表示 $\vec{w} = (i_1, \dots, i_\ell) \in R(w)$ に対して,

$$\mathbf{U}^-_{w,\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} := \sum_{\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_\ell)\in\mathbb{Z}^{\ell}_{\geq 0}} \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] f_{i_1}^{(a_1)} \cdots f_{i_\ell}^{(a_\ell)}$$

と定める. $\vec{w} \in R(w)$ のとり方によらないことが知られている。

定理 3.7 (Lusztig, 柏原). ある $\mathscr{B}_w(\infty) \subset \mathscr{B}(\infty)$ が存在して,

$$\mathbf{U}^-_{w,\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]} = \bigoplus_{b\in\mathscr{B}_w(\infty)} \mathbb{Z}[q^{\pm 1}] G^{\mathrm{low}}(b)$$

が成り立つ.

ここで, G^{low} は標準基底を定める持ち上げである. 上の "restricted dual" を考えることで, "双対標準基底" をもつ. ここでは, closed unipotent cell $\overline{N_w}$ の座標環の量子類似 $\mathcal{O}_q[\overline{N_w}]$ を,

$$\mathcal{O}_q[\overline{N_w}] := \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})/(\mathbf{U}_w^-)^{\perp}$$

で定める. $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-格子は, 上の結果を用いれば, $\mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})^{\mathrm{up}}_{\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]}$ を用いて定義できることがわかる. 以下の同型は, 以下に述べる結果を示す上で, 重要である. $\mathfrak{g}$ が有限型である場合には, De Concini-Procesi [DCP97, Theorem 3.2], Caldero [Cal03, 3.2] によって, 証明されていた. 証明の手法は, 大きく異なる.

定理 3.8 ([Kim11, Theorem 5.13]). $\mathcal{O}_q[N(w)] \hookrightarrow \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_q[\overline{N_w}]$ は, injective algebra homomorphism である.

3.4. $\mathcal{O}_q[\overline{N_w}]$ を定義するうえで, 用いられた, $\mathbf{U}_w^-$ は Demazure module $V_w(\lambda) = \mathbf{U}_q^+(\mathfrak{g})u_{w\lambda}$ の "$\lambda \to \infty$ 極限" での極限と考えられる. ゆえに, extremal vector $u_{w\lambda}$ に付随する dual canonical basis は, $\mathcal{O}_q[\overline{N_w}]$ に含まれているが, 実は以下に述べる強い性質を用いていることが分かる. $w \in W$, $\lambda \in P_+$ に対して, **量子冪単小行列式 (quantum unipotent minor)** $D_{w\lambda,\lambda} \in \mathbf{U}_q^-(\mathfrak{g})$ を以下のように行列要素で定める.

$$(D_{w\lambda,\lambda}, x)_K = (u_{w\lambda}, xu_\lambda)_\lambda$$

ただし, 右辺の $(\ ,\ )_\lambda$ は非退化対称内積であって, $(u_\lambda, u_\lambda)_\lambda = 1$ と $\varphi(e_i) = f_i, \varphi(f_i) = e_i, \varphi(q^h) = q^{-h}$ で定める $\mathbb{Q}(q)$-linear anti-involution φ: $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}) \to \mathbf{U}_q(\mathfrak{g})$ に関して, $(xu, u')_\lambda = (u, \varphi(x)u')_\lambda$ をみたすものである. 量子冪単小行列式が $q = 1$ の特殊化のもと, 一般化された小行列式に特殊化されることは "自明" [4]である.

以下は, $\mathfrak{g}$ が有限型の場合には, Caldero[Cal03] によって証明された事実の一般化である.

定理 3.9 (Caldero, K). (1) 任意の $w \in W$, $\lambda \in P_+$ に対して, $D_{w\lambda,\lambda} \in \mathbf{B}^{\mathrm{up}}(w)$ が成り立つ.
(2) $D_{w\lambda,\lambda}$ は $\mathbf{U}_q^-(w)$ において, q-central
(3) 任意の $b \in \mathscr{B}(w)$ に対して, $G^{\mathrm{up}}(b)D_{w\lambda,\lambda} \in q^{\mathbf{Z}}\mathbf{B}^{\mathrm{up}}(w)$

ここで, 斉次元 $x \in \mathbf{U}_q^-(w)$ が q-central であるとは, 任意の $x \in \mathbf{U}_q^-(w)$ の斉次元 y に対して, $xy = q^N yx$ が成り立ち, N が $\mathrm{wt}(y)$ のみに依存する事を言う.

上の結果を $w \in W$ の長さに関する induction を用いれば, 以下の結果がわかる.

系 3.10. $w \in W$ と $\vec{w} = (i_1, \ldots, i_\ell) \in R(w)$ に対して,

$$D_{\vec{w},k} := D_{s_{i_1}\cdots s_{i_k}\varpi_{i_k},\varpi_{i_k}}$$

は互いに "乗法的" な元をなす, 任意の $1 \le s,t \le \ell$ に対して, $D_{\vec{w},s}D_{\vec{w},t} \in q^{\mathbf{Z}}\mathbf{B}^{\mathrm{up}}(w)$ がなりたつ.

上の系を用いれば, $\{D^q_{\vec{w},k}\}_{1\le k\le \ell}$ を量子初期種とする量子クラスター代数を定義できる. これを, $\mathcal{A}^q(\mathcal{Q}_{\vec{w}}, \Lambda_{\vec{w}})$ で表す.

[4]結晶基底を用いて, 一致するような extremal vector の convention をとることができる.

4. 量子化予想とその結論

4.1. Geiss-Leclerc-Schröer による仕事の "量子化" とでも言うべき予想は以下となる.

予想 4.1. $\{D^q_{\varpi,k}\}_{1\le k\le \ell}$ に付随する量子クラスター代数を $\mathcal{A}^q(\mathcal{Q}_{\overrightarrow{w}},\Lambda_{\overrightarrow{w}})$ とする. (量子クラスター代数は自然に $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ 代数となる)

(1) $\Phi_{\overrightarrow{w}}\colon \mathcal{A}^q(\mathcal{Q}_{\overrightarrow{w}},\Lambda_{\overrightarrow{w}})\cong \mathcal{O}_q[N(w)]$ なる $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$-algebra としての同型が存在する.

(2) 上の同型のもと, 量子クラスター単項式 $\mathcal{M}^q(\mathcal{Q}_{\overrightarrow{w}},\Lambda_{\overrightarrow{w}})$ は双対標準基底に (q べきを除いて) 含まれる.

$\mathfrak{g}$ が対称型であるときには, 上の予想から, ただちに開軌道予想, モノイダル圏論化, 正値性予想が得られる. 量子化予想について量子クラスター代数との同型 (1) に関しては, $\mathfrak{g}$ が対称型の場合に, 最近 Geiss-Leclerc-Schröer[GLS11a] によって, $\mathbb{Q}(q)$-係数での同型が示された. 証明は, [GLS11b] で用いられた T-system(generalized determinantial identity) の "量子化" を, 量子クラスター代数と量子冪単部分群のなかでそれぞれ証明することによって, 初期種から始めて PBW 生成元 $F^{\mathrm{up}}(\beta_k)$ を変異によって得られるということを証明することである.

4.2. Geiss-Leclerc-Schröer の冪単部分群のクラスター代数構造 [GLS11b] は, Demonet[Dem] によって, 折りたたみのテクニックによって, 特別な場合には拡張されている ([Dem] が出た当時には, [GLS07] という取り扱いの方法しか知られていなかった.) この拡張のもと, 非対称型のクラスター代数の正値性予想に取り組むためには, さらに問題がある. 双対標準基底では Lusztig の正値性が崩れており, 修正された量子化予想を Khovanov-Lauda-Rouquier 代数の表現論の枠組みの中で考えなおすことなどが, 重要のように思われる. そのためには, 量子冪単部分群 $\mathbf{U}_q^-(w)$ を Khovanov-Lauda-Rouquier 代数の表現論の枠組みで取り組むことも重要である.

References

[BIRS09] A. B. Buan, O. Iyama, I. Reiten, and J. Scott, *Cluster structures for 2-Calabi-Yau categories and unipotent groups*, Compos. Math. **145** (2009), no. 4, 1035–1079. MR 2521253 (2010h:18021)

[BZ93] A. Berenstein and A. Zelevinsky, *String bases for quantum groups of type A_r*, I. M. Gelfand Seminar, Adv. Soviet Math., vol. 16, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993, pp. 51–89. MR 1237826 (94g:17019)

[BZ05] ———, *Quantum cluster algebras*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 405–455. MR 2146350 (2006a:20092)

[Cal03] P. Caldero, *A multiplicative property of quantum flag minors*, Represent. Theory **7** (2003), 164–176 (electronic). MR 1973370 (2004b:17013)

[DCKP95] C. De Concini, V. G. Kac, and C. Procesi, *Some quantum analogues of solvable Lie groups*, Geometry and analysis (Bombay, 1992), Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1995, pp. 41–65. MR 1351503 (96h:17015)

[DCP97] C. De Concini and C. Procesi, *Quantum Schubert cells and representations at roots of* 1, Algebraic groups and Lie groups, Austral. Math. Soc. Lect. Ser., vol. 9, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997, pp. 127–160. MR 1635678 (99i:20067)

[Dem] Laurent Demonet, *Categorification of skew-symmetrizable cluster algebras*, Algebras and Representation Theory.

[Dup09] G. Dupont, *Positivity in coefficient-free rank two cluster algebras*, the electronic journal of combinatorics **16** (2009), no. R98, 1.

[FZ02] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras. I. Foundations*, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), no. 2, 497–529 (electronic). MR 1887642 (2003f:16050)

[FZ03] ———, *Cluster algebras. II. Finite type classification*, Invent. Math. **154** (2003), no. 1, 63–121. MR 2004457 (2004m:17011)

[FZ07] ———, *Cluster algebras. IV. Coefficients*, Compos. Math. **143** (2007), no. 1, 112–164. MR 2295199 (2008d:16049)

[GLS07] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster algebra structures and semicanonical bases for unipotent groups*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/math/0703039`, 2007.

[GLS08] Christof Geiss, Bernard Leclerc, and Jan Schröer, *Preprojective algebras and cluster algebras*, Trends in representation theory of algebras and related topics, EMS Ser. Congr. Rep., Eur. Math. Soc., Zürich, 2008, pp. 253–283. MR 2484728 (2009m:16024)

[GLS10] Christof Geiß, Bernard Leclerc, and Jan Schröer, *Generic bases for cluster algebras and the chamber ansatz*, J. Amer. Math. Soc. 25 (2012), 21-76 (2010).

[GLS11a] C. Geiss, B. Leclerc, and J. Schröer, *Cluster structures on quantum coordinate rings*, E-print arXiv, 04 2011.

[GLS11b] C. Geiß, B. Leclerc, and J. Schröer, *Kac–moody groups and cluster algebras*, Advances in Mathematics **228** (2011), no. 1, 329–433.

[HL10] David Hernandez and Bernard Leclerc, *Cluster algebras and quantum affine algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 265–341. MR 2682185 (2011g:17027)

[Kim11] Y. Kimura, *Quantum unipotent subgroup and dual canonical basis*, to appear in Kyoto J. of Math. (2011).

[Lec] B. Leclerc, *Canonical and semicanonical bases*, Talk at the University of Reims, `http://loic.foissy.free.fr/colloque/Leclerc.pdf`.

[Lec10] Bernard Leclerc, *Cluster algebras and representation theory*, ICM 2010 Hyderabad, India (2010) (2010).

[LS91] S. Levendorskiĭ and Y. Soĭbelman, *Algebras of functions on compact quantum groups, Schubert cells and quantum tori*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), no. 1, 141–170. MR 1116413 (92h:58020)

[LS11] K. Lee and R. Schiffler, *A combinatorial formula for rank 2 cluster variables*, Arxiv preprint arXiv:1106.0952 (2011).

[Lus93] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Progress in Mathematics, vol. 110, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1993. MR 1227098 (94m:17016)

[Lus96] ———, *Braid group action and canonical bases*, Adv. Math. **122** (1996), no. 2, 237–261. MR 1409422 (98g:17019)

[Lus00] ———, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. **151** (2000), no. 2, 129–139. MR 1758244 (2001e:17033)

[MP07] Gregg Musiker and James Propp, *Combinatorial interpretations for rank-two cluster algebras of affine type*, Electron. J. Combin. **14** (2007), no. 1, Research Paper 15, 23 pp. (electronic). MR 2285819 (2008j:05374)

[MSW] G. Musiker, R. Schiffler, and L. Williams, *Positivity for cluster algebras from surfaces*, E-print arXiv `http://arxiv.org/abs/0906.0748`.

[Nak11] H. Nakajima, *Quiver varieties and cluster algebras*, Kyoto Journal of Mathematics **51** (2011), no. 1, 71–126.

[Qin10] F. Qin, *Quantum cluster variables via Serre polynomials*, E-print arXiv http://arxiv.org/abs/1004.4171, 2010.

[Sai94] Y. Saito, *PBW basis of quantized universal enveloping algebras*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **30** (1994), no. 2, 209–232. MR 1265471 (95e:17021)

[SZ04] P. Sherman and A.V. Zelevinskii, *Positivity and canonical bases in rank 2 cluster algebras of finite and affine types*, Moscow Mathematical Journal **4** (2004), no. 4, 947–974.

RESEARCH INSTITUTE FOR MATHEMATICAL SCIENCE, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502, JAPAN

E-mail address: ykimura@kurims.kyoto-u.ac.jp

URL: http://researchmap.jp/ysykmr/