数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 131-149

Kronecker quiver の定める群作用の半安定軌道の分類

東京電機大学・工学部　太田琢也 (Takuya Ohta)
Department of Mathematics, Tokyo Denki University

§0 導入　Kronecker quiver の定める群作用とは $\mathrm{GL}_m \times \mathrm{GL}_n$ の $\mathrm{M}_{m,n} \times \mathrm{M}_{m,n}$ への作用 $(g,h)\cdot(X,Y) = (gXh^{-1}, gYh^{-1})$ のことである。Kronecker は行列の標準形を与える形で、この作用の軌道の分類を与えている。Kronecker の分類はかなり複雑であるが、近年 quiver の手法によっても、この分類の記述が得られている（例えば [ARS] 参照)。本稿では $m=n$ の場合、即ち、群作用 (以下、Kronecker 作用と呼ぶ)

$$\text{(I)} \qquad G = \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n, \quad (g,h)\cdot(X,Y) = (gXh^{-1}, gYh^{-1})$$

に対して、GIT の手法を用い、半安定点（ある相対不変式が消えない点）の成す開部分多様体 L^{ss} の射影商（閉軌道たちの成す代数多様体）を Chevally section を用いた幾何学商として記述するとともに、射影商写像のファイバーの記述を与える。また、L^{ss} は等質ファイバー束 $G \times^{\mathrm{GL}_n} \mathfrak{gl}_n$ に同型な開集合からなる開被覆をもつことを述べ、これを用いて L^{ss} の軌道の分類を GL_n の $\mathfrak{gl}_n$ への随伴作用の商 $\mathfrak{gl}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_n)$ の貼り合わせによって与える。結果として、半安定軌道の集合は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に固有値をもつ Jordan 標準形によって分類されることが判るとともに、軌道の閉包の包含関係も得られる。

以下に、筆者がこの研究に到った経緯について述べる。本稿の代数群、ベクトル空間は全て複素数体 $\mathbb{C}$ 上のそれとし、$\mathbb{C}$ は省略する。

双線型形式の同値類を与える、GL_n の M_n への作用

$$\text{(II)} \qquad \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{M}_n, \quad g\cdot X = gX^t g$$

は数年前に、関口次郎氏などによって研究されている ([DSZ])。当時、筆者は軌道の埋め込み定理 ([O]) の例を探しており、(II) の作用を部分作用として含む群作用で、軌道の埋め込みが成立するものはないかと考え、見つかったのが、上記の作用 (I) である。即ち、埋め込み

$$\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n, \quad g \mapsto (g, {}^t g^{-1}), \quad \mathrm{M}_n \hookrightarrow \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n, \quad X \mapsto (X, {}^t X),$$

によって、得られる部分作用 $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{M}_n) \hookrightarrow (\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n, \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n)$ を考えるとき、この部分作用に関して、軌道の埋め込み $\mathrm{M}_n/\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n/\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n$ が成り立つ。更に、軌道の埋め込みが成り立つ部分作用として、次の３つの群作用が見つかった。[1]

$$\text{(III)} \qquad \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n, \quad g\cdot(S,A) := (gS^t g, gA^t g)$$

$$\text{(IV)} \qquad \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n, \quad g\cdot(S_1,S_2) := (gS_1{}^t g, gS_2{}^t g)$$

$$\text{(V)} \qquad \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Alt}_n \times \mathrm{Alt}_n, \quad g\cdot(A_1,A_2) := (gA_1{}^t g, gA_2{}^t g)$$

即ち、部分作用

[1] (II) の作用と (III) の作用は、GL_n-同変に同型である。

$(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n)$, $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n)$, $(\mathrm{GL}_n, \mathrm{Alt}_n \times \mathrm{Alt}_n) \hookrightarrow (\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n, \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n)$ についても、軌道の埋め込みが成り立つ。従って、(I) の作用の軌道の分類が得られれば、軌道の埋め込みによる像を特定することにより、(II), (III), (IV), (V) の軌道の分類も得られることになる。また、(I) の群作用から軌道の埋め込み定理による切り出しを考えることにより、他の同種の作用が 4 つ得られたことになる。

Kronecker 作用では、軌道集合 L^{ss}/G は随伴軌道の集合 $\mathfrak{gl}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{GL}_n)$ の自然な"コンパクト化"になっているような状況が見られるが、この関係は上記の群作用 (II)–(IV) を含む Kronecker 作用の θ-部分作用と、古典型 θ-群の間にも見られる[2]。その例として、最後の節では、(III) の作用の軌道集合 $(\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n)^{ss}/\mathrm{GL}_n$ が 2 つの随伴作用の軌道集合 $\mathfrak{o}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{O}_n)$, $\mathfrak{sp}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{Sp}_n)$ の"同時コンパクト化"になっていることなどについて述べる：

$$\mathfrak{o}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{O}_n) \hookrightarrow (\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n)^{ss}/\mathrm{GL}_n \hookleftarrow \mathfrak{sp}_n/\mathrm{Ad}(\mathrm{Sp}_n) \quad \text{：同時コンパクト化.}$$

§1 Kronecker 作用の相対不変式

先ず、**§0**, (I) の作用

$$G := \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright L := \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n,\ (g,h)\cdot(X,Y) = (gXh^{-1}, gYh^{-1})\ ((g,h) \in G,\ (X,Y) \in L)$$

を本稿では Kronecker 作用と呼ぶ。この作用は $\mathbb{C}^\times$-作用を含んでいるため、明らかに $\mathbb{C}[L]^G = \mathbb{C}$ であり、閉軌道は $\{0\}$ のみである。しかし、相対不変式は次のように豊富に存在する。

$f_j \in \mathbb{C}[L]$ を

$$\det(tX - Y) = f_0(X,Y)t^n + f_1(X,Y)t^{n-1} + \cdots + f_n(X,Y) \tag{2.1}$$

により定めると、f_j たちは指標 $\chi : G \to \mathbb{C}^\times$ $(\chi(g,h) := \det(g)^{-1}\det(h))$ に属する相対不変式であることが直ちに分る。この群作用に対して、通常のアフィン商を考えても意味がないので、アフィン商をある意味で一般化した商を導入する必要がある。その準備として、次の考察をする。

$$\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m} := \{f \in \mathbb{C}[L] \mid f((g,h)\cdot x) = \chi(g,h)^m f(x)\ ((g,h) \in G,\ x \in L)\}$$

とおき、$\mathbb{C}[L]$ の次数付き部分環

$$\mathbb{C}^G_\chi[L] := \oplus_{m \geq 0}\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}$$

を考える。$K = K_\chi := \mathrm{Ker}(\chi)$ とおけば、次が知られている (例えば、[R] 参照)。

定理 1.2. (1) $\mathbb{C}^G_\chi[L] = \mathbb{C}[L]^K = \mathbb{C}[f_0, f_1, \ldots, f_n]$ が成り立つ。
(2) 作用 $(G; L)$ の任意の相対不変式は $\mathbb{C}^G_\chi[L]$ に含まれる。□

§2 $\mathbb{C}^\times$-作用を含む線型作用の射影商

Kronecker 作用や §0 で述べた部分作用の商を構成するために、射影商について述べる。

[2] これらの群作用は §5 で述べる Kronecker 作用の θ-部分作用の例である。

2.0 アフィン商の復習

簡約代数群 G が代数多様体 X に作用しているとする。X の元で、その G-軌道が X の閉集合となる元全体の集合を次のように表す。

$$X^{G\text{-cl}} := \{x \in X \mid G \cdot x \text{ is closed in } X\}$$

また、G-安定な部分集合 $Y \subset X$ に対して、Y の G-軌道の集合を Y/G で表す。特に、$X^{G\text{-cl}}/G$ は X の閉 G-軌道の集合である。

X がアフィン多様体のとき、アフィン多様体

$$X//G := \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[X]^G)$$

を X の G によるアフィン商という。環の自然な包含写像 $\mathbb{C}[X]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[X]$ はアフィン多様体の間の写像 $\pi_G : X \twoheadrightarrow X//G$ を引き起こすが、π_G をアフィン商写像という。π_G は任意の軌道を 1 点に写すが、次が成り立つ。

定理 2.0. π_G の任意のファイバーは唯 1 つの閉 G-軌道を含む。従って、写像

$$X^{G\text{-cl}}/G \to X//G, \quad G \cdot x \mapsto \pi_G(x)$$

は全単射である。これによって、アフィン商 $X//G$ は閉軌道の集合 $X^{G\text{-cl}}/G$ と同一視される。□

2.1 射影商と閉軌道

$G \curvearrowright L$ を簡約代数群のベクトル空間 L への線型作用とし、次を仮定する

(A1) 1 パラメーター群 $\rho : \mathbb{C}^\times \to G$ と $p \geq 1$ が存在して、次が成り立つ

$$\rho(t) \cdot v = t^p v \quad (t \in \mathbb{C}^\times, v \in L). \square$$

$X(G)$ を G の指標群とし、$X(G, L) := \{\chi \in X(G) \setminus \{\mathbf{1}\} \mid \mathbb{C}[L]^G_\chi \neq \{0\}\}$ とおく。

注意 2.1. この状況で、容易に次がみられる。

(1) $\mathbb{C}[L]^G = \mathbb{C}$

(2) $\mathbb{C}[L]^G_{\chi_1}\mathbb{C}[L]^G_{\chi_1} \subset \mathbb{C}[L]^G_{\chi_1\chi_2}$ $(\chi_1, \chi_2 \in X(G, L))$

(3) 任意の $\chi \in X(G, L)$ に対して、$d_\chi > 0$ が存在して、 $\mathbb{C}[L]^G_\chi \subset \mathbb{C}[L]_{d_\chi}$ (同次 d_χ-次式のなす部分空間) □

$\chi \in X(G, L)$ に対して、

$$\mathbb{C}^G_\chi[L] := \oplus_{m \geq 0}\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}, \quad K_\chi := \mathrm{Ker}(\chi : G \to \mathbb{C}^\times),$$

とおく。このとき、GIT の一般論より（例えば向井 [M1]）、次が成り立つ。

命題 2.2. $\mathbb{C}^G_\chi[L] = \mathbb{C}[L]^{K_\chi}$ □

L の G-安定な開部分多様体 $L^{\chi\text{-ss}}$ を

$$L^{\chi\text{-ss}} := \{v \in L \mid \exists m > 0, \exists f \in \mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}, f(v) \neq 0\}$$

により定め、 $L^{\chi\text{-ss}}$ に含まれる点を χ-半安定点という。作用 $K_\chi \curvearrowright L$ の零錐を $\mathcal{N}(K_\chi; L)$ と書けば、容易に

$$L^{\chi\text{-ss}} = L \setminus \mathcal{N}(K_\chi; L)$$

がみられる。 この状況で、$L^{\chi\text{-ss}}$ の G-軌道と K_χ-軌道の対応を考えたいのであるが、議論をすっきりさせるために、$\chi \in X(G, L)$ に対する次の仮定をおく。

(A2) $\mathbb{C}[L]^G_\chi$ は $\mathbb{C}$-代数として $\mathbb{C}^G_\chi[L] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}$ を生成する。□

次の事実は容易に確かめられる。

補題 2.3. **(A2)** の仮定のもとに、$L^{\chi\text{-ss}} := \{v \in L \mid \exists f \in \mathbb{C}[L]^G_\chi, f(v) \neq 0\}$ が成り立つ。□

以下、**(A2)** を満たす $\chi \in X(G, L)$ を1つとり、固定する。$K = K_\chi$ とおく。
$x \in L^{\chi\text{-ss}}$ とするとき、半安定軌道 $G \cdot x$ において、相対不変式の値を指定すれば、K-軌道 $K \cdot x$ を切り出すことができる。

命題 2.4. $x \in L^{\chi\text{-ss}}$ に対して、$f \in \mathbb{C}[L]^G_\chi$ を $f(x) \neq 0$ にとる。(これは補題2.3により可能) このとき、$(G \cdot x) \cap L_{f=f(x)} = K \cdot x$ が成り立つ。ここに、
$L_{f=f(x)} := \{y \in L \mid f(y) = f(x)\}$ である。□

開集合 $L^{\chi\text{-ss}}$ は $L^{\chi\text{-ss}} = \cup_{f\in\mathbb{C}[L]^G_\chi} L_f$ と G-安定な主アフィン開集合の和に書けるが、$f \in \mathbb{C}[L]^G_\chi \setminus \{0\}$ に対して、包含関係

$$\mathbb{C}[L_f]^G = \{g/f^m \mid m \geq 0, g \in \mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}\} \subset \mathbb{C}[L_f]^K = (\mathbb{C}[L]^K)_f = \{g/f^m \mid m \geq 0, g \in \mathbb{C}[L]^K\}$$

が成り立つ。また、包含写像 $\mathbb{C}[L_f]^G \hookrightarrow \mathbb{C}[L_f]^K$ は、アフィン商の間の射
$\alpha : L_f//K \to L_f//G$ を定め、次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} L_f & \xrightarrow{\pi_{(K;L_f)}} & L_f//K \\ & \searrow & \downarrow \alpha \\ & \pi_{(G;L_f)} & L_f//G \end{array} \tag{2.1}$$

この局所的な2つのアフィン商写像 $\pi_G = \pi_{(G;L_f)}$, $\pi_K = \pi_{(K;L_f)}$ によるファイバーには、次の関係がある。

命題 2.5. 任意の $x \in L_f$ に対して、次が成り立つ。
(1) $\pi_G^{-1}(\pi_G(x)) = G \cdot \pi_K^{-1}(\pi_K(x))$
(2) $\pi_G^{-1}(\pi_G(x)) \cap L_{f=f(x)} = \pi_K^{-1}(\pi_K(x))$ □

補題 2.6. $K\cdot x$ ($x\in L\setminus\{0\}$) を L の $\{0\}$ でない閉 K-軌道とする。このとき、$f(x)\neq 0$ をみたす任意の $f\in\mathbb{C}[L]^G_\chi$ に対して、$G\cdot x\subset L_f$ は L_f の閉集合である。(x は零錘 $\mathcal{N}(K_\chi;L)$ に含まれないから、$G\cdot x\subset L^{\chi\text{-ss}}$ であって、このような f は存在する。) □

さらに、$L^{\chi\text{-ss}}$ における閉 G-軌道と、L における閉 K-軌道には次の関係がある。

命題 2.7. $x\in L^{\chi\text{-ss}}$ に対して、$G\cdot x$ が $L^{\chi\text{-ss}}$ で閉であることと、$K\cdot x$ が L で閉であることは、同値である。□

さて、群作用 $G\curvearrowright L$ の指標 χ に関する射影商 $L^{\chi\text{-ss}}//G$ を定義しよう。これは次数付き環 $\mathbb{C}^G_\chi[L]$ の斉次極大イデアルの集合

$$L^{\chi\text{-ss}}//G=\mathrm{Proj}\left(\mathbb{C}^G_\chi[L]\right)=\cup_{f\in\mathbb{C}[L]^G_\chi\setminus\{0\}}\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[L_f]^G)$$

として定義される。以下に、仮定 **(A1)**, **(A2)** が成り立つ状況で、 $L^{\chi\text{-ss}}//G$ の具体的な記述を与える。

$f_0,f_1,\dots,f_r\in\mathbb{C}[L]^G_\chi$ を、環 $\mathbb{C}^G_\chi[L]=\mathbb{C}[L]^K$ の生成系とする。写像 $\pi_K:L\to\mathbb{C}^{r+1}$ を $\pi_K(x)=(f_0(x),\dots,f_r(x))$ により定めると、アフィン商の一般論より、像 $\pi_K(L)$ は $\mathbb{C}^{r+1}$ の閉集合であって、アフィン商 $L//K$ と同一視される：

$$L\xrightarrow{\pi_K}L//K=\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[L]^K)\simeq\pi_K(L)\overset{\text{closed}}{\hookrightarrow}\mathbb{C}^{r+1}.$$

また、$f_0,f_1,\dots,f_r$ は同じ指標に属する相対不変式であるから、 $\pi_K(L)$ は $\mathbb{C}^\times$-作用で安定である。従って、$\pi_K(L)$ は $\mathbb{C}^{r+1}$ の閉錘である。写像 π_K を $L^{\chi\text{-ss}}=L\setminus\mathcal{N}(K_\chi;L)$ に制限し、射影 $\alpha:\mathbb{C}^{r+1}\to\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$, $(y_0,y_1,\dots,y_r)\mapsto[y_0,y_1,\dots,y_r]$ との合成をとることにより、写像

$$\pi_G:L^{\chi\text{-ss}}\to\mathbb{P}^r(\mathbb{C}),\quad \pi_G(x)=[f_0(x),\dots,f_r(x)]$$

を得る。$\pi_K(L)$ が $\mathbb{C}^{r+1}$ の閉錘であるから、$\pi_G(L^{\chi\text{-ss}})=[\pi_K(L)\setminus\{0\}]$ は $\mathbb{P}^r(\mathbb{C})$ の閉部分多様体である。射影多様体 $\pi_G(L^{\chi\text{-ss}})$ は自然に射影商 $L^{\chi\text{-ss}}//G$ と同一視される。以下、この同一視をする：$L^{\chi\text{-ss}}//G=\pi_G(L^{\chi\text{-ss}})$. これで次の図式が得られた。

$$\begin{tikzcd}
L^{\chi\text{-ss}} \arrow[r, "\pi_K"] \arrow[dr, "\pi_G"'] & L//K\setminus\{0\} \arrow[r, hook, "\text{closed}"] \arrow[d] & \mathbb{C}^{r+1}\setminus\{0\} \arrow[d, "\alpha"] \\
 & L^{\chi\text{-ss}}//G \arrow[r, hook, "\text{closed}"] & \mathbb{P}^r(\mathbb{C})
\end{tikzcd}$$

この図式は、局所的な図式 (2.1) を貼り合わせて得られる図式である。

定理 2.8. (1) 任意の $x\in L^{\chi\text{-ss}}$ に対して、$\pi_G^{-1}(\pi_G(x))$ は $L^{\chi\text{-ss}}$ における閉 G-軌道を唯 1 つ含む。従って写像

$$(L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G\to L^{\chi\text{-ss}}//G,\quad G\cdot x\mapsto\pi_G(x)$$

は全単射であって、射影商 $L^{\chi\text{-ss}}//G$ は閉軌道の集合 $(L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G$ と同一視される：$(L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G\simeq L^{\chi\text{-ss}}//G.$

(2) 写像 $\pi_G : L^{\chi\text{-ss}} \to L^{\chi\text{-ss}}//G$ はアフィンでない多様体への作用 $G \curvearrowright L^{\chi\text{-ss}}$ のカテゴリー商である。 □

開集合 $L^{\chi\text{-ss}}$ は、指標 $\chi \in X(G,L)$ を代えれば変化する。しかし、次の仮定 (A3) の状況では、$L^{\chi\text{-ss}}$ は最大の半安定点の集合となる。

(A3) 任意の G-相対不変式 $f \in \mathbb{C}[L]$ は $\mathbb{C}^G_\chi[L] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m}$ 上、整である。□

Kronecker 作用では、χ を §1 のようにとれば、この仮定が満たされていることに注意する。

補題 2.9. **(A3)** の仮定のもとに、次が成り立つ。

$L^{\chi\text{-ss}} = L^{\mathrm{ss}} := \{x \in L \mid$ 定数でない G-相対不変式 f が存在して $f(x) \neq 0$ となる $\}$. □

2.2 Chevally section の射影商版

前小節 **2.1** の群作用を考え、**(A1)**, **(A2)** を仮定する。**2.1** の記号をそのまま用いる。[L], [LR] の結果を我々の設定で適用して、次が成り立つ。

定理 2.10.([L], [LR]) K-閉軌道に含まれる点 $x \in L^{K\text{-cl}}$ の stabilizer K_x たちの族 $\mathrm{SC}(K;L) := \{K_x \mid x \in L^{K\text{-cl}}\}$ の包含関係に関する極小元 $T = K_{x_0} \in \mathrm{SC}(K;L)$ $(x_0 \in L^{K\text{-cl}})$ を 1 つ固定する。
(1) $\mathrm{SC}(K;L)$ の任意の極小元 T' は T に K-共役である。($\exists g \in K$, $T' = gTg^{-1}$: これを $T' \overset{K}{\sim} T$ と表す。)
(2) $(L//K)^{\mathrm{pr}} := \{\xi \in L//K \mid K_x \overset{K}{\sim} T\ (\forall x \in \pi_K^{-1}(\xi) \cap L^{K\text{-cl}})\}$ は $L//K$ の空でない開集合である。 □

$x_0 \in L^{K\text{-cl}}$, $T = K_{x_0}$ を上の定理のようにとり、固定する。

$$\mathfrak{c} := L^T = \{x \in L \mid g \cdot x = x\ (\forall g \in T)\}$$

とおけば、容易に

$$T = K_{x_0} = G_{x_0} = Z_K(\mathfrak{c}) = Z_G(\mathfrak{c}),\ \ N_K(T) = N_K(\mathfrak{c}) \subset N_G(T) = N_G(\mathfrak{c})$$

がみられる。$\mathrm{GL}(\mathfrak{c})$ の部分群 $W_K, W_G \subset \mathrm{GL}(\mathfrak{c})$ を

$$W_K = W_K(\mathfrak{c}) := N_K(\mathfrak{c})/T \subset W_G = W_G(\mathfrak{c}) := N_G(\mathfrak{c})/T$$

により定める。群作用 $(K;L)$ に対して、群作用 $(W_K, \mathfrak{c})$ を Luna, Richardson の構成による Chevally section と呼び、群 W_K を Chevally section の Weyl 群と呼ぶ。このとき、簡約リー環の随伴商における Chevally の制限写像定理の次の一般化が成り立つ。

定理 2.11. ([LR]) (1) 制限写像 $\gamma^* : \mathbb{C}[L]^K \to \mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{W_K}$, $\gamma^*(f) = f|_{\mathfrak{c}}$ は同型である。

(2) 任意の $\mathcal{O} \in L^{K\text{-cl}}/K$ に対して、$\mathfrak{c} \cap \mathcal{O} \neq \emptyset$ が成り立つ。
(3) $\mathcal{O}_{\mathfrak{c}} \in \mathfrak{c}/W_K$ に対して、$\mathcal{O}_{\mathfrak{c}}$ が $\mathfrak{c}$ で閉であることと、$K \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{c}}$ が L で閉であることは同値である。さらにこの対応は次の全単射を与える。

$$\mathfrak{c}^{W_K\text{-cl}}/W_K \to L^{K\text{-cl}}/K, \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{c}} \mapsto K \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{c}} \quad \square$$

Chevally の制限写像定理の状況では、Weyl 群は有限群であるから、カルタン部分環の Weyl 群軌道は閉軌道であるが、今の一般化の状況では、W_K は有限群とは限らず、$\mathfrak{c}$ の W_K-軌道も閉軌道とは限らないことに注意する。

さて、$T \subset K$ より $\chi(T) = \{1\}$ であるから、指標 χ は商群 $W_G = N_G(T)/T$ の指標 χ_w を定める。$\rho(\mathbb{C}^\times)$ は $N_G(T)$ に含まれ、T には含まれないから、χ は W_G の自明でない指標であって、$\chi_w(\rho(\mathbb{C}^\times)) = \mathbb{C}^\times$ が成り立ち、群作用 $(W_G, \mathfrak{c})$ は仮定 **(A1)** を満たす。さらに、明らかに $W_K = \mathrm{Ker}(\chi_w : W_G \to \mathbb{C}^\times)$ である。命題 2.2 より

$$\mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{W_K} = \mathbb{C}_{\chi_w}^{W_G}[\mathfrak{c}] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[\mathfrak{c}]_{\chi_w^m}^{W_G}$$

であって、次を得る。

命題 2.12. 定理 2.11 の制限写像 γ^* は次数付き環の同型

$$\mathbb{C}_\chi^G[L] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[L]_\chi^G \overset{\gamma^*}{\xrightarrow{\sim}} \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[\mathfrak{c}]_{\chi_w^m}^{W_G} = \mathbb{C}_{\chi_w}^{W_G}[\mathfrak{c}]$$

を引き起こす。従って、γ^* は射影商の間の同型

$$\gamma : \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/\!/W_G \xrightarrow{\sim} L^{\chi\text{-ss}}/\!/G$$

を引き起こす。さらに写像 γ は閉軌道集合の間の次の全単射と同一視される。

$$(\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}})^{W_G\text{-cl}}/W_G \xrightarrow{\sim} (L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G, \quad \mathcal{O}_{\mathfrak{c}} \mapsto G \cdot \mathcal{O}_{\mathfrak{c}}. \quad \square$$

従って、群作用 $(G; L)$ が自明でない Chevally section をもち、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ の閉 W_G-軌道を定めることができるならば、$L^{\chi\text{-ss}}$ の閉 W_G-軌道の分類が得られる。

§3 Kronecker 作用 $\mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright (\mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n)^{\mathrm{ss}}$ の 閉軌道

Kronecker 作用

$$G := \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright L := \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n, \ (g,h)\cdot(X,Y) = (gXh^{-1}, gYh^{-1}) \ ((g,h) \in G, \ (X,Y) \in L)$$

を考える。変数 x, y の n 次 binary form のなす $n+1$ 次元ベクトル空間を $\mathcal{B}_n$ で表す。$(A, B) \in L$ に対して、$\Phi_{(A,B)} \in \mathcal{B}_n$ および $f_j \in \mathbb{C}[M]$ を

$$\Phi_{(A,B)} := \det(xA - yB) = f_0(A,B)x^n + f_1(A,B)x^{n-1}y + \cdots + f_n(A,B)y^n \tag{3.1}$$

により定めると、f_j たちは指標

$$\chi : G \to \mathbb{C}^\times, \quad \chi(g,h) := \det(g)\det(h)^{-1}$$

に属する相対不変式であって、§1 で述べた事実を含めて、以下の (3.2)-(3.7) が成り立つ。

(3.2)　写像 $L \to \mathbb{C}^{n+1}$, $x \mapsto (f_0(x), \ldots, f_n(x))$ は全射である。

(3.3)　$\mathbb{C}[L]^K = \mathbb{C}_\chi^G[L] = \oplus_{m\geq 0}\mathbb{C}[L]^G_{\chi^m} = \mathbb{C}[f_0, f_1, \ldots, f_n] \quad (K = \mathrm{Ker}(\chi))$

(3.4)　作用 $(G; L)$ の任意の相対不変式は $\mathbb{C}[f_0, f_1, \ldots, f_n]$ に含まれる。

これによって、作用 $(G; L)$ は §2 の仮定 **(A1)**, **(A2)** を満たすことがわかる。

(3.5) $\Phi : L \to \mathcal{B}_n$, $(A, B) \mapsto \Phi_{(A,B)}$ は作用 $(K; L)$ のアフィン商写像である; $L//K = \mathcal{B}_n$

(3.6)　$L^{\chi\text{-ss}} = \{(A, B) \in L \mid \Phi_{(A,B)} \neq 0\}$

(3.7) $[\Phi] : L^{\chi\text{-ss}} \to \mathbb{P}(\mathcal{B}_n)$, $(A, B) \mapsto [\Phi_{(A,B)}]$ は作用 $(G; L)$ の射影商写像である:
$L^{\chi\text{-ss}}//G = \mathbb{P}(\mathcal{B}_n) \simeq \mathbb{P}^n$.

3.1 Chevally section と閉軌道

さて、Chevally section を用いて、閉軌道集合 $L^{\chi\text{-ss}}//G$ の記述を与える。先ず、次の記号を用意する。

$$\mathrm{D}_n := \{\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) \in \mathrm{M}_n \mid a_j \in \mathbb{C}\}, \quad \mathrm{T}_n := \mathrm{D}_n \cap \mathrm{GL}_n \supset \mathrm{T}'_n := \{t \in \mathrm{T}_n \mid \det(t) = 1\}$$

$$T = \Delta(\mathrm{T}_n) := \{(t, t) \mid t \in \mathrm{T}_n\} \subset G$$

$z = (A, B) \in L^{\chi\text{-ss}}$ を $f_0(z) = \det(A) \neq 0$ かつ、$A^{-1}B \in \mathrm{M}_n$ が異なる固有値をもつようにとれば、容易に $K_z \overset{K}{\sim} T$ が見られ、T は $\mathrm{SC}(K; L) = \{K_z \mid z \in L^{K\text{-cl}}\}$ の極小元であることが分かる。容易な計算により、$L^T = \mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n$ が見られ、

$$\mathfrak{c} := L^T = \mathrm{D}_n \times \mathrm{D}_n$$

は $K \curvearrowright L$ の Chevally section である。このとき、Weyl 群は

$$W_K = \mathrm{T}'_n \rtimes \mathrm{S}_n \triangleleft W_G = \mathrm{T}_n \rtimes \mathrm{S}_n$$

となり、W_G の $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n), \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)) \in \mathfrak{c}$ への作用は

$$\sigma \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathrm{diag}(a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}, \mathrm{diag}(b_{\sigma(1)}, \ldots, b_{\sigma(n)})) \ (\sigma \in \mathrm{S}_n)$$

$$t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathrm{diag}(t_1a_1, \ldots, t_na_n), \mathrm{diag}(t_1b_1, \ldots, t_nb_n) \ (t = \mathrm{diag}(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{T}_n)$$

で与えられる。さらに $\chi \in X(G)$ が定める W_G の指標 χ_w は $t\sigma \in W_G$ に対して
$\chi_w(t\sigma) = t_1t_2\cdots t_n$ で与えられる。$s_j := f_j|_\mathfrak{c}$ とおけば、命題 2.11 により、

$$\mathbb{C}^{W_G}_{\chi_w}[\mathfrak{c}] = \mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{W_K} = \mathbb{C}[s_0, s_1, \ldots, s_n]$$

であるが、$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n), \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_n)) \in \mathfrak{c}$ に対して、

$$\Phi_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} = \det(x\mathbf{a} - y\mathbf{b}) = (a_1x - b_1y)\cdots(a_nx - b_ny) = s_0(\mathbf{a}, \mathbf{b})x^n + s_1(\mathbf{a}, \mathbf{b})x^{n-1}y + \cdots + s_n(\mathbf{a}, \mathbf{b})y^n$$

であるから、この展開式の係数関数が群作用 W_K(resp. W_G) $\curvearrowright \mathfrak{c}$ の不変式環 (resp. 相対不変式の環) の代数的に独立な生成系を与える。

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \iff \Phi_{(\mathbf{a},\mathbf{b})} \neq 0 \iff (\mathbf{a},\mathbf{b}) \in L^{\chi\text{-ss}}$$

であるから、次が判る。

$$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} = L^{\chi\text{-ss}} \cap \mathfrak{c} = \{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathfrak{c} \mid a_i = b_i = 0 \text{ となる } i \text{ が存在しない}\}$$

が成り立つ。さらに、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ の W_K-軌道はすべて閉軌道 ($\iff$ $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ の W_G-軌道はすべて $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ で閉) であることが判る。

命題 3.1. (1) $\mathfrak{c}^{W_K\text{-cl}} = \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \cup \{(\mathbf{0},\mathbf{0})\}$ が成り立つ。従って $\mathfrak{c}$ の W_K 軌道には、閉軌道と冪零軌道しか現れない。

(2) $(\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}})^{W_G\text{-cl}} = \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ が成り立つ。換言すれば、作用 $W_G \curvearrowright \mathfrak{c}$ の χ_w-半安定軌道はすべて閉軌道である。特に、射影商 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G$ は幾何学商である。(以後、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G = \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G$ と記す。) $\square$

射影商 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G$ が幾何学商であるのに対して、アフィン商 $\mathfrak{c}//W_K$ は $\{0\}$ でない冪零軌道が存在するから、幾何学商ではない。

定理 3.2. (1) 半安定軌道 $\mathcal{O} \in L^{\chi\text{-ss}}/G$ が $L^{\chi\text{-ss}}$ の閉 G-軌道であるための必要十分条件は $\mathcal{O} \cap \mathfrak{c} \neq \emptyset$ となることである。

(2) 同型 $\mathbb{C}^G_\chi[L] \overset{\text{rest}}{\xrightarrow{\sim}} \mathbb{C}^{W_G}_{\chi_w}[\mathfrak{c}]$ によって、射影商の同型 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G \to L^{\chi\text{-ss}}//G$ を得る。結果として、軌道の対応 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G \to (L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G,\ \mathcal{O} \mapsto G \cdot \mathcal{O}$ は全単射である。$\square$

これは、簡約代数群の随伴作用 $G \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{g}$ と Cartan 部分環 $\mathfrak{t}$ に関して成り立つ事実を $\mathfrak{g} \to L^{\chi\text{-ss}}$, $\mathfrak{t} \to \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ と置き換え、アフィン商を射影商に置き換えて成り立つ類似と考えられる。

3.2 有限射 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n/\mathrm{S}_n$ のコンパクト化

射影商写像

$$\pi_{W_G} : \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \to \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G = \mathbb{P}(\mathcal{B}_n) \simeq \mathbb{P}^n,\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \mapsto [\Pi_{i=1}^n(a_i x - b_i y)] = [\textstyle\sum_{k=0}^n s_k(\mathbf{a},\mathbf{b}) x^{n-k} y^k]$$

を考える。これは $W_G = \mathrm{T}_n \rtimes \mathrm{S}_n$ の単位元の連結成分 $W_G^\circ = \mathrm{T}_n$ による商 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ$ (これも射影商で幾何学商) を経由して

$$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \to \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ \xrightarrow{\sigma} \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G = \mathbb{P}^n(\mathbb{C})$$

と分解するが、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n$ には W_G が作用し、W_G° は自明に作用するから、商群 $W_G/W_G^\circ = \mathrm{S}_n$ が作用する。ここで、σ は

$$\sigma : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{C}),\ \sigma([a_1 : b_1], \ldots, [a_n : b_n]) = [s_0(\mathbf{a},\mathbf{b}) : s_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \cdots : s_n(\mathbf{a},\mathbf{b})]$$

により定まる有限射であって、商群 S_n による商写像と考えられる。これにより、次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^n = \mathfrak{c}_0/W_G^\circ & \hookrightarrow & \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ & = & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n \\ \sigma_0 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \sigma \quad /\mathrm{S}_n = W_G/W_G^\circ \\ \mathbb{C}^n = \mathfrak{c}_0/W_G & \hookrightarrow & \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G & = & \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \end{array}$$

ここに、$\mathfrak{c}_0$ は $\mathfrak{c}$ の W_G-安定な開部分集合 $\mathfrak{c}_0 = \{(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \in \mathfrak{c} \mid a_1 \cdots a_n \neq 0\}$ であって、σ の開集合 $\mathfrak{c}_0/W_G^\circ$ への制限 σ_0 は基本対称式が定める有限射 $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ と同一視される。よって、$\sigma : \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ \to \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G$ は基本対称式が定める有限射の自然な拡張（compact 化）になっている[3]。 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/\mathrm{T}_n = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n$ は **4.1** で述べる閉軌道の固有値の順序列の集合と考えられる。

3.3 Binary forms の不変式環と作用 $W_K \curvearrowright \mathfrak{c}$

以下、$\mathfrak{c}$ を $(n, 2)$ 行列の空間 $\mathfrak{c} = \mathrm{M}_{n\times 2}(\mathbb{C})$ と同一視する。$\mathfrak{c}$ には $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ が

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = (\mathbf{a}p + \mathbf{b}r, \mathbf{a}q + \mathbf{b}s)$$

によって右から作用し、$W_K = \mathrm{T}_n' \rtimes \mathrm{S}_n$ の左作用と可換となる。

$$\Phi : \mathfrak{c} \to \mathcal{B}_n,\ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = (a_1 x - b_1 y)(a_2 x - b_2 y) \cdots (a_n x - b_n y)$$

は作用 $W_K \curvearrowright \mathfrak{c}$ アフィン商写像であって、

$$\mathfrak{c}/\!/W_K = \mathcal{B}_n, \quad \mathbb{C}[\mathcal{B}_n] = \mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{W_K}$$

が成り立つ。$d_{ij} \in \mathbb{C}[\mathfrak{c}]$ を $d_{ij}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_i b_j - a_j b_i$ により定めると、SL_n の FFT によって、$\mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{C}[d_{ij}]$ であり、

$$\mathbb{C}[\mathcal{B}_n]^{\mathrm{SL}_2} = \mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{\mathrm{SL}_2 \times (\mathrm{S}_n \ltimes \mathrm{T}_n')} = (\mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{\mathrm{SL}_2})^{\mathrm{S}_n \ltimes \mathrm{T}_n'} = (\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n'})^{\mathrm{S}_n}$$

となる。T_n の指標 χ を $\chi(t_1, t_2, \ldots, t_n) = t_1 t_2 \ldots t_n$ (これは **3.1** の $\chi_w \in X(W_G)$ の T_n への制限) とおくと、

$$\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n'} = \oplus_{k \geq 0} \mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n}_{\chi^k} \quad (\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n}_{\chi^k} = \{f \in \mathbb{C}[d_{ij}] \mid f(t \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b})) = \chi(t)^k f(\mathbf{a}, \mathbf{b})\ (t \in \mathrm{T}_n)\})$$

であるが、Kempe によって、次のことが知られている。

定理 3.3. ([HMSV], [M2] 参照)
(1) n が偶数のとき、$\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n}_{\chi}$ は $\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n'}$ を生成する。
(2) n が奇数のとき、$\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n}_{\chi^2}$ は $\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n'}$ を生成する。□

---

[3] これをみると、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/\mathrm{T}_n = \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ$ が Cartan 部分環の対応物で、$W_G/W_G^\circ = S_n$ が Weyl 群の対応物であるかのようにも思える。

$n=2m$ が偶数のとき、$\mathbb{C}[d_{ij}]^{\mathrm{T}_n}_{\chi}$ は S_n-加群として ヤング図形 (m,m) に対応する既約 S_n-加群 $V(m,m)$ に同型であることが判る[4]:

$$\mathbb{C}[d_{ij}]^{T_n}_{\chi} \simeq V(m,m).$$

定理 3.3, (1) より、$V(m,m)$ の対称代数 $S(V(m,m))$ の不変式環からの全射

$$S(V(m,m))^{\mathrm{S}_n} \to (\mathbb{C}[d_{ij}]^{T'_n})^{\mathrm{S}_n} = \mathbb{C}[\mathcal{B}_n]^{\mathrm{SL}_2}$$

が存在する。従って、$S(V(m,m))^{\mathrm{S}_n}$ が決定できれば、$\mathrm{SL}_2 \curvearrowright \mathcal{B}_n$ の FFT が得られることになる。

§4 一般の半安定軌道の分類

引き続き、Kronecker 作用 $G=\mathrm{GL}_n\times\mathrm{GL}_n \curvearrowright L=\mathrm{M}_n\times\mathrm{M}_n$ を考える。

4.1 固有値とチャート

$(A,B)\in L^{\chi\text{-ss}}$ に対して、$\Phi_{(A,B)}(z,1)=\det(zA-B)=0$ の根 $\xi\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を (A,B) の固有値と呼ぶ。但し、(A,B) は $n-\deg\Phi_{(A,B)}(z,1)$ 個の ∞ を固有値にもつものと考える。$G\cdot(A,B)$ が $L^{\chi\text{-ss}}$ の閉 G-軌道ならば、$(\mathbf{a},\mathbf{b})\in\mathfrak{c}\cap(G\cdot(A,B))$ となる、
$(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathrm{diag}(a_1,\dots,a_n),\mathrm{diag}(b_1,\dots,b_n))\in\mathfrak{c}$ をとれば、$b_1/a_1,\dots,b_n/a_n$ が (A,B) の固有値である。§3 により、

$$L^{\chi\text{-ss}}/\!/G=(L^{\chi\text{-ss}})^{G\text{-cl}}/G\simeq\mathbb{P}^1(\mathbb{C})^n/\mathrm{S}_n$$

であって、n 個の固有値集合と $L^{\chi\text{-ss}}$ の閉 G-軌道が 1 対 1 に対応する。ここでは、$L^{\chi\text{-ss}}$ の一般軌道の分類を与える。

$\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して、相対不変式 $f_\alpha\in\mathbb{C}[L]^G_\chi$ を $(X,Y)\in L$ に対して

$$f_\alpha(X,Y):=\det(X-\alpha Y)\ (\alpha\in\mathbb{C}),\ \ f_\infty(X,Y):=\det(Y)$$

により定め、G-安定な開集合 $L_\alpha\subset L^{\chi\text{-ss}}$ を $L_\alpha:=\{(X,Y)\in L\mid f_\alpha(X,Y)\neq 0\}$ により定める。L_α は $\alpha^{-1}\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を固有値にもたない $L^{\chi\text{-ss}}$ の元全体の集合であって、容易に

$$L^{\chi\text{-ss}}=\cup_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}L_\alpha$$

が見られる。$\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{C}$ を異なる $n+1$ 個の値とすれば、$L^{\chi\text{-ss}}$ の元が異なる $n+1$ 個の値を固有値にもつことはないから、$L^{\chi\text{-ss}}=\cup_{0\le i\le n}L_{\alpha_i}$ であって、実際は $n+1$ 個の開集合で覆うことができる。特に、$L^{\chi\text{-ss}}=\cup_{\alpha\in\mathbb{C}}L_\alpha$ である。ここでの分類の方法は、チャート L_α の軌道を Jordan 標準形をパラメーターとして分類し、2つのチャートの交わりの上での、パラメーターの変換公式を与える、というものである。

[4] これについては、筆者も手作業で証明したが、GL_n の表現と S_n の表現の対応における zero weight space の理論から知られていたようである。

4.2 チャート L_α のファイバー束の構造

先ず、GL_n を G に対角的に $\mathrm{GL}_n \hookrightarrow G,\ g \mapsto (g,g)$ と埋め込んで、G の部分群とみる。次に、$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して、埋め込み $\varphi_\alpha : \mathfrak{gl}_n \hookrightarrow L$ を

$$\varphi_\alpha : \mathfrak{gl}_n \hookrightarrow L, \quad \varphi_\alpha(A) := (I + \alpha A, A)$$

により定める。GL_n を随伴作用で $\mathfrak{gl}_n$ に作用させるとき、φ_α は GL_n-同変である。さらに、次が判る。

補題 4.1. $\varphi_\alpha(\mathfrak{gl}_n) \subset L_\alpha$ かつ、$G \cdot \varphi_\alpha(\mathfrak{gl}_n) = L_\alpha$ が成り立つ。□

$\mathrm{GL}_n \subset G$ は右から G に作用し、左から $\mathfrak{gl}_n$ に作用するから等質ファイバー束 $G \times^{\mathrm{GL}_n} \mathfrak{gl}_n$ が定まる。上の補題より、全射

$$f : G \times^{\mathrm{GL}_n} \mathfrak{gl}_n \twoheadrightarrow L_\alpha, \quad [(g,h),A] \mapsto (g,h)\cdot\varphi_\alpha(A) \tag{4.1}$$

が定まる。

定理 4.2. 写像 (4.1) は G-同変なアフィン多様体の同型である。

$$G \times^{\mathrm{GL}_n} \mathfrak{gl}_n \simeq L_\alpha$$

特に、$\mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \simeq G \times^{\mathrm{GL}_n} \mathfrak{gl}_n/G \simeq L_\alpha/G$ であって、φ_α は軌道集合の間の、次の全単射を引き起こす。

$$\bar{\varphi_\alpha} : \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \to L_\alpha/G, \quad \mathrm{GL}_n \cdot A \mapsto G \cdot \varphi_\alpha(A) \qquad \square$$

$\pi_{\mathrm{GL}_n} : \mathfrak{gl}_n \to \mathfrak{gl}_n /\!/ \mathrm{GL}_n$ を随伴作用のアフィン商写像とし、$A \in \mathfrak{gl}_n$ の Jordan 分解を $A = S + N \in \mathfrak{gl}_n$ とすれば、次の「軌道の Jordan 分解」,「商写像のファイバーの Jordan 分解」,「軌道の閉包 Jordan 分解」が成り立つのであった：

(1) $\mathrm{GL}_n \cdot A \simeq \mathrm{GL}_n \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + Z_{\mathrm{GL}_n}(S)\cdot N)$
(2) $\pi_{\mathrm{GL}_n}^{-1}(\pi_{\mathrm{GL}_n}(A)) \simeq \mathrm{GL}_n \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + \mathcal{N}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}_n}(S)))$
(3) $\overline{\mathrm{GL}_n \cdot A} \simeq \mathrm{GL}_n \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + \overline{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)\cdot N})$

この類似として、射影商写像 $\pi_G : L^{\chi\text{-ss}} \to L^{\chi\text{-ss}}/\!/G$ に関して、次が成り立つ。

命題 4.3. $A \in \mathfrak{gl}_n$ の Jordan 分解を $A = S + N$ とする。このとき、次が成り立つ。

(1) $G \cdot \varphi_\alpha(A) \simeq G \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + Z_{\mathrm{GL}_n}(S)\cdot N)$
(2) $\pi_G^{-1}(\pi_G(\varphi_\alpha(A))) \simeq G \times^{\mathrm{GL}_n} \pi_{\mathrm{GL}_n}^{-1}(\pi_{\mathrm{GL}_n}(A)) \simeq G \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + \mathcal{N}(\mathfrak{z}_{\mathfrak{gl}_n}(S)))$
(3) $\overline{G \cdot \varphi_\alpha(A)} \simeq G \times^{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)} (S + \overline{Z_{\mathrm{GL}_n}(S)\cdot N})$

従って、$\bar{\varphi_\alpha} : \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \to L_\alpha/G$ は軌道の閉包の包含関係を保つ。即ち、$A, B \in \mathfrak{gl}_n$ に対して、次が成り立つ。

$$\mathrm{GL}_n \cdot A \subset \overline{\mathrm{GL}_n \cdot B} \iff G \cdot \varphi_\alpha(A) \subset \overline{G \cdot \varphi_\alpha(B)} \qquad \square$$

4.3 変換公式と大域的座標

軌道集合 $\mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n$ は Jordan 標準形で分類されるから、サイズ k, 固有値 a の Jordan 細胞を $J_k(a)$ で表すとき、 $\mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n$ はこれらの和でパラメーター付けされる：

$$\mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n = \{\ \textstyle\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i)\ \mid\ \sum_{i=1}^k n_i = n,\ \ a_i \in \mathbb{C}\}$$

ここでは、記号 $\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i)$ で、対応する GL_n-軌道を表すことにする。定理 4.2 の全単射 $\bar{\varphi}_\alpha : \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \xrightarrow{\sim} L_\alpha/G$ により、L_α/G の軌道は Jordan 細胞の和 $\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i)$ でラベル付けされるが、これが他のチャート L_β 上のラベル付けで、どのような Jordan 細胞の和に変換されるかを定めれば、$L^{\chi\text{-ss}} = \cup_{\alpha\in\mathbb{C}} L_\alpha$ の G-軌道は分類できたことになる。即ち、

$$\mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \supset \bar{\varphi}_\alpha^{-1}(L_\alpha \cap L_\beta/G) \overset{\bar{\varphi}_\alpha}{\xrightarrow{\sim}} L_\alpha \cap L_\beta/G \overset{\bar{\varphi}_\beta^{-1}}{\xrightarrow{\sim}} \bar{\varphi}_\beta^{-1}(L_\alpha \cap L_\beta/G) \subset \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n$$

において、$\bar{\varphi}_\beta^{-1} \circ \bar{\varphi}_\alpha(\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i))$ を定めればよい。

補題 4.4. $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $A, B \in \mathfrak{gl}_n$ に対して、次が成り立つ。

(1) $\varphi_\alpha(A) \in L_\beta$ となるための必要十分条件は A が $1/(\beta-\alpha)$ を固有値にもたないことである。従って、

$$\bar{\varphi}_\alpha^{-1}(L_\alpha \cap L_\beta/G) = \{\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i) \mid a_i \neq 1/(\beta-\alpha)\}$$

(2) $G \cdot \varphi_\beta(B) = G \cdot \varphi_\alpha(A) \iff \mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n) \cdot B = \mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n) \cdot [A\{I - (\beta-\alpha)A\}^{-1}]$

(3) 変換公式 $\quad \bar{\varphi}_\beta^{-1} \circ \bar{\varphi}_\alpha(\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i)) = \sum_{i=1}^k J_{n_i}\left(\dfrac{a_i}{1-(\beta-\alpha)a_i}\right)$ が成り立つ。

(4) A が（局所的）固有値 $a \in \mathbb{C}$ をもてば、$\varphi_\alpha(A) \in L^{\chi\text{-ss}}$ は $\dfrac{a}{1+\alpha a} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ を（大域的）固有値にもつ。□

補題 4.4, (3) の変換公式によって、Jordan 標準形の形は変化せず、固有値のみ α, β から定まる 1 次分数変換を受けることに注意する。これを用いて、軌道集合 $L^{\chi\text{-ss}}/G$ に、以下のように大域的座標を定めることができる。

$\xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ と 1 行のヤング図形の対

$$\Delta_l(\xi) = (\xi, \overbrace{\boxed{}\boxed{}\cdots\boxed{}\boxed{}}^{l}) \tag{4.2}$$

たちの和

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \Delta_{n_i}(\xi_i)$$

を $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に値をもつ固有値付きヤング図形（$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-YDE と略す）と呼ぶ。ヤング図形の $\square$ の総数が n 個の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-YDE 全体の集合を $\mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ で表す。

軌道 $\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i) \in \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n$ の $\bar{\varphi}_\alpha : \mathfrak{gl}_n/\mathrm{GL}_n \xrightarrow{\sim} L_\alpha/G$ による像 $\mathcal{O} = \bar{\varphi}_\alpha(\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i)) \in L_\alpha/G$ に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-YDE

$$\Delta(\mathcal{O}) = \Delta(\bar{\varphi}_\alpha(\sum_{i=1}^k J_{n_i}(a_i))) := \sum_{i=1}^k \Delta_{n_i}\left(\frac{a_i}{1+\alpha a_i}\right) \in \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$$

を対応させ、これを軌道 $\mathcal{O} \in L^{\chi\text{-ss}}/G$ の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-YDE と呼ぶ。補題4.4, (3) の変換公式によって、これは矛盾なく定義される。

定理 4.5. 写像 $L^{\chi\text{-ss}}/G \to \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$, $\mathcal{O} \mapsto \Delta(\mathcal{O})$ は全単射である。□

最後に $L^{\chi\text{-ss}}/G$ における閉包の包含関係の記述を与える。

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{n_i}(\xi_i) \in \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$$

に対して、Δ の固有値 $\xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ をもつ 1 行の $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-YDE((4.2) の形) の和から、固有値 ξ を取り除いてできる (固有値なしの) ヤング図形を

$$[\Delta]_\xi := \sum_{\xi_i=\xi} \overbrace{\boxed{}\boxed{}\boxed{\cdots}\boxed{}\boxed{}}^{n_i}$$

で表す。このとき、次が成り立つ。

定理 4.6. $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ に対応する 2 つの軌道 $\mathcal{O}(\Delta_1), \mathcal{O}(\Delta_2) \in L^{\chi\text{-ss}}/G$ に対して、$\mathcal{O}(\Delta_1) \subset \overline{\mathcal{O}(\Delta_2)}$ となるための必要十分条件は、次の (1), (2) が成り立つことである。

(1) Δ_1 と Δ_2 の固有値は、重複度を込めて一致する。

(2) Δ_1, Δ_2 の共通の各固有値 $\xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対して、ヤング図形の大小関係 $[\Delta_1]_\xi \leq [\Delta_2]_\xi$ が成り立つ。□

4.4 GL_2 作用による G-軌道の変換

$(X, Y) \in L$, $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2$ に対して、

$$(X, Y) \cdot g = (X, Y) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (Xa + Yc, Xb + Yd)$$

とおくことにより、GL_2 は L に右から作用する。この GL_2-作用は明らかに G の L への左作用と可換である[5]。一方、GL_2 は

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[x, y] = y/x \mid (x, y) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}\}$$

にも、右から

$$[x, y] \cdot g = [x, y] \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = [xa + yc, xb + yd]$$

によって作用する。全単射 $L^{\chi\text{-ss}}/G \simeq \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ によって、

$$\Delta = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{n_i}\left(\frac{b_i}{a_i}\right) = \sum_{i=1}^{k} \Delta_{n_i}([a_i, b_i]) \in \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$$

[5]Kronecker 作用が定める表現を $\rho : G \to \mathrm{GL}(L)$ とかけば、$Z_{\mathrm{GL}(L)}(\rho(G)) = \mathrm{GL}_2$ が判る。

に対応する軌道を $\mathcal{O}(\Delta) \in L^{\chi\text{-ss}}/G$ で表す。このとき、次が成り立つ。

命題 4.7. $g \in \mathrm{GL}_2$ とするとき、次が成り立つ。

$$\mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{k} \Delta_{n_i}([a_i, b_i])\right) \cdot g = \mathcal{O}\left(\sum_{i=1}^{k} \Delta_{n_i}([a_i, b_i] \cdot g)\right) \square$$

§5 作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n$ (n: even)

ここでは、Kronecker 作用を有限位数の自己同型で切り出すことによって得られる部分作用 (θ-部分作用) の例として、群作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n$ について述べる。

5.1 θ-部分作用

$\rho : \tilde{G} \to \mathrm{GL}(\tilde{L})$ を代数群 $\tilde{G}$ の表現とし、$\theta : \tilde{G} \to \tilde{G}$ を $\tilde{G}$ の有限位数の自己同型とする。$G := \tilde{G}^{\theta} = \{g \in \tilde{G} \mid \theta(g) = g\}$ とおく。$s \in N_{\mathrm{GL}(\tilde{L})}(\rho(\tilde{G}))$ が条件

$$s\rho(g)s^{-1} = \rho(\theta(g)) \quad (\forall g \in \tilde{G})$$

を満たすとき、s は θ と compatible であるという。$\alpha \in Z_{\mathrm{GL}(\tilde{L})}(\rho(\tilde{G}))$ を $\varphi := \alpha^{-1}s \in \mathrm{GL}(\tilde{L})$ が有限位数となるようにとり、

$$L := \{v \in \tilde{L} \mid sv = \alpha v\}$$

とおけば、G は L を安定にし、部分作用 $(G; L) \hookrightarrow (\tilde{G}; \tilde{L})$ が得られる。群作用 $(G; L)$ を $(\tilde{G}; \tilde{L})$ の自己同型 $\theta : \tilde{G} \to \tilde{G}$ に属する θ-部分作用と呼ぶ。

5.2 Kronecker 作用の θ-部分作用

以下、Kronecker 作用を

$$\tilde{G} := \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright \tilde{L} := \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n,\ \ \rho(g,h)\cdot(X,Y) = (gXh^{-1}, gYh^{-1})\ ((g,h) \in \tilde{G},\ (X,Y) \in \tilde{L})$$

で表し、指標

$$\tilde{\chi} : \tilde{G} \to \mathbb{C}^{\times}, \quad \tilde{\chi}(g,h) := \det(g)\det(h)^{-1}$$

を考える。Kronecker 作用の θ-部分作用は、古典型 θ-群に対応して豊富に存在するが、位数 2 の自己同型 $\theta : \tilde{G} \to \tilde{G},\ \theta(g,h) = ({}^t h^{-1}, {}^t g^{-1})$ と、$s : \tilde{L} \to \tilde{L},\ s(X,Y) := ({}^t Y, {}^t X)$ により定まる $s \in N_{\mathrm{GL}(\tilde{L})}(\rho(\tilde{G}))$ に対応するものを考える。このとき、

$$G = \tilde{G}^{\theta} = \{(g, {}^t g^{-1}) \mid g \in \mathrm{GL}_n\} \simeq \mathrm{GL}_n$$

となるが、$\alpha \in Z_{\mathrm{GL}(\tilde{L})}(\rho(\tilde{G}))$ を順に $\alpha(X,Y) = (-Y, X),\ (Y, X),\ (-Y, -X)$ により定めると、Kronecker 作用 $(\tilde{G}; \tilde{L})$ の次の 3 つの θ-部分作用が得られる。

(III) $$G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n, \quad g \cdot (A, B) := (gA{}^t g, gB{}^t g)$$

(IV) $G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Sym}_n, \quad g\cdot(A,B) := (gA^tg, gB^tg)$

(V) $G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{Alt}_n \times \mathrm{Alt}_n, \quad g\cdot(A,B) := (gA^tg, gB^tg)$

これらの群作用については、[O] により、次の軌道の埋め込みが成立する。

命題 5.1. 上記の部分作用 $(G;L) \hookrightarrow (\tilde{G};\tilde{L})$ に対して、軌道の対応 $L/G \to \tilde{L}/\tilde{G}$, $\mathcal{O} \mapsto \tilde{G}\cdot\mathcal{O}$ は単射である。□

これらの群作用に関しては、概ね Kronecker 作用と並行した議論ができるが、(III) の作用で、n が偶数の場合が特に面白いように思われるので、結果の概略を報告したい。

5.3 作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n$ の Chevally section

以下、$n = 2m$ 作用は偶数とし、作用

$$G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n$$

を考える。$\tilde{\chi} \in X(\tilde{G})$ の G への制限を $\chi := \tilde{\chi}|_G$, $\chi(g) = \det(g)^2$ $(g \in G)$ で表し、$\tilde{K} = \mathrm{Ker}(\tilde{\chi}) \subset \tilde{G}$, $K = \mathrm{Ker}(\chi) = \mathrm{SL}_n^{\pm} \subset G$ とおく。このとき、以下が成り立つ。

(i) **不変式** $\mathbb{C}_\chi^G[L] = \mathbb{C}[L]^K = \mathbb{C}[\tilde{L}]^{\tilde{K}}|_L = \mathbb{C}_{\tilde{\chi}}^{\tilde{G}}[\tilde{L}]|_L = \mathbb{C}[f_0|_L, f_2|_L, \ldots, f_n|_L]$

(ii) Chevally section, Wely 群は次の通りである。

$$W_G = \mathrm{T}_m \rtimes (\mathbb{Z}_2^m \rtimes \mathrm{S}_m) \triangleright W_K = \{(t,\epsilon,\sigma) \mid \epsilon_1\cdots\epsilon_m \det(t) = \pm 1\}, \quad \mathfrak{c} = \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m$$

ここに、$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1,\ldots,a_m,b_1,\ldots,b_m) \in \mathfrak{c}$ への

$$\sigma \in \mathrm{S}_m,\ \epsilon = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_m) \in \mathbb{Z}_2^m,\ t = (t_1,\ldots,t_m) \in \mathrm{T}_m$$

の作用は次の通りである。

$$\sigma\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_{\sigma(1)},\ldots,a_{\sigma(m)},b_{\sigma(1)},\ldots,b_{\sigma(m)}),$$
$$\epsilon\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (a_1,\ldots,a_m,\epsilon_1 b_1,\ldots,\epsilon_m b_m)$$
$$t\cdot(\mathbf{a},\mathbf{b}) = (t_1a_1,\ldots,t_ma_m,t_1b_1,\ldots,t_mb_m)$$

(iii) $(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathfrak{c}$ に対して、

$$(a_1^2x^2 - b_1^2y^2)\cdots(a_m^2x^2 - b_m^2y^2) = s_0(\mathbf{a},\mathbf{b})(x^2)^m + s_1(\mathbf{a},\mathbf{b})(x^2)^{m-1}y^2 + \cdots + s_m(\mathbf{a},\mathbf{b})(y^2)^m$$

により $s_j \in \mathbb{C}[\mathfrak{c}] (0 \le j \le m)$ を定めれば、これらが不変式環 $\mathbb{C}[\mathfrak{c}]^{W_K} = \mathbb{C}_{\chi_w}^{W_G}[\mathfrak{c}]$ の代数独立な生成系を与える。

(iv) 半安定点のなす開部分多様体 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}$ の W_G-軌道はすべて閉軌道であって、射影商写像

$$\pi_{W_G} : \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) = \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/\!/W_G, \quad \pi_{W_G}(\mathbf{a},\mathbf{b}) = [s_0(\mathbf{a},\mathbf{b}),\ldots,s_m(\mathbf{a},\mathbf{b})]$$

は幾何学商である。

(v) π_{W_G} は $W_G^\circ = \mathrm{T}_m$ による商 $\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ$ (これも射影商で幾何学商) を経由して

$$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}} \to \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ \xrightarrow{\psi} \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}//W_G$$

と分解するが、$\mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ = \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^m$ には商群

$$W_G/W_G^\circ = \mathbb{Z}_2^m \rtimes \mathrm{S}_m = W(\mathrm{O}_{2m}) = W(\mathrm{Sp}_{2m})$$

が作用する。ψ はこの商群 W_G/W_G° による商写像と考えられる。図式

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{C}^m = \mathfrak{c}_0/W_G^\circ & \hookrightarrow & \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G^\circ & = & \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \psi \quad /W_G/W_G^\circ, \\ \mathbb{C}^m = \mathfrak{c}_0/W_G & \hookrightarrow & \mathfrak{c}^{\chi_w\text{-ss}}/W_G & = & \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \end{array} \quad (\mathfrak{c}_0 = \{(\mathbf{a},\mathbf{b}) \in \mathfrak{c} \mid a_1 \cdots a_m \neq 0\})$$

において、$\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^m \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ は $([a_1 : b_1], \ldots, [a_n : b_n]) \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})^m$ に対して、$\psi([a_1 : b_1], \ldots, [a_n : b_n]) = [s_0(\mathbf{a},\mathbf{b}) : s_1(\mathbf{a},\mathbf{b}) : \cdots : s_n(\mathbf{a},\mathbf{b})]$ により定まる有限射であって、直交群、斜交群の Wely 群による Cartan 部分環のアフィン商写像の自然な拡張 (compact 化) になっている。

5.4 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright (\mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n)^{\chi\text{-ss}}$ の一般軌道

Kronecker 作用 $\tilde{G} := \mathrm{GL}_n \times \mathrm{GL}_n \curvearrowright \tilde{L} := \mathrm{M}_n \times \mathrm{M}_n$ に対しては、$Z_{\mathrm{GL}(\tilde{L})}(\tilde{G}) = \mathrm{GL}_2$ であって、GL_2 の右作用ですべてのチャート L_α ($\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$) たちは、この作用で移りあえるのであったが、作用 $G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright L = \mathrm{Sym}_n \times \mathrm{Alt}_n$ については、$Z_{\mathrm{GL}(L)}(G) = \mathrm{T}_2 \subset \mathrm{GL}_2$ となる。T_2 の固有値集合への作用 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \curvearrowleft \mathrm{T}_2$ に関して、$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ は 3 つの軌道に $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{0\} \cup \{\infty\} \cup \mathbb{C}^\times$ と分解するが、$L_\alpha = \tilde{L}_\alpha \cap L$ とおけば、$L^{\chi\text{-ss}} = \cup_{\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} L_\alpha$ かつ

$$L_\alpha = L_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \in \mathbb{C}^\times) \tag{5.1}$$

であって、generic チャート L_α ($\alpha \in \mathbb{C}^\times$) たちはすべて G-同変に同型である。

5.5 generic チャート L_α の軌道集合

群作用 $\mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{M}_n$, $g \cdot X = gX^tg$ を考える。同一視

$$\mathrm{M}_n = M := \{({}^tX, X) \in \tilde{L} \mid X \in \mathrm{M}_n\},\ \mathrm{GL}_n = G = \{(g, {}^tg^{-1}) \in \tilde{G} \mid g \in \mathrm{GL}_n\}$$

によって、部分作用 $(G, M) \hookrightarrow (\tilde{G}, \tilde{L})$ を得るが、これも θ-部分作用であって、軌道の埋め込み $M/G \hookrightarrow \tilde{L}/\tilde{G} \simeq \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ が成り立つ。$M_0 := \tilde{L}_0 \cap M$, $g_0 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおけば、次が成り立つ。

$$M \cdot g_0 = L, \quad M_0 \cdot g_0 = L_1, \quad M_0/G \simeq L_1/G \ (\mathcal{O} \mapsto \mathcal{O} \cdot g_0)$$

ここに、行列の右作用は **4.4** の GL_2 の右作用である。よって、$M_0/G \hookrightarrow \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の像を定めれば、g_0 で変換することにより、L_1/G に対応する $\mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の部分集

合が定まる。さらに (5.1) による変換で generic チャートの軌道集合 L_α/G に対応する $\mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の部分集合が定まる。そこで、$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n = M_0/G \hookrightarrow \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ の像を特定する方法を述べる。

$G = \mathrm{GL}_n$ は $\mathfrak{sl}_n$ の自己同型群 $\mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n) = \mathrm{Int}(\mathfrak{sl}_n) \cup \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n)$ に

$$G = \mathrm{GL}_n \curvearrowright \mathrm{Aut}(\mathfrak{sl}_n), \quad g\cdot\sigma = \mathrm{Ad}\,(g)\cdot\sigma\cdot\mathrm{Ad}\,(g^{-1})$$

によって作用する。

$$\sigma_0 \in \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n) \text{ を } \sigma_0(A) = -{}^tA \ (A\in\mathfrak{sl}_n)$$

によって定め、$x \in (\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}$ に対して

$$\tau_x := \mathrm{Ad}\,(x)\cdot\sigma_0 \in \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n) = \mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n)\cdot\sigma_0$$

とおけば、$g\cdot\tau_x = \tau_{gx^tg}$ $(g\in G)$ がなりたち、G-同変な全射

$$\tau : (\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0} \twoheadrightarrow \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n)$$

を得るが、これは軌道集合の間の全単射

$$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n \xrightarrow{\sim} \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n)/\,\mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n)$$

を誘導する。よって、$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n$ の分類問題は、外部自己同型の集合 $\mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n)$ の $\mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n)$ による軌道の分類問題と同値である。外部自己同型の２乗は内部自己同型となるから、２乗する写像を加えて、写像の列

$$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0} \xrightarrow{\tau} \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n) \xrightarrow{(\ )^2} \mathrm{Int}(\mathfrak{sl}_n) = \mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n), \quad x \mapsto \tau_x = \mathrm{Ad}\,(x)\cdot\sigma_0 \mapsto \mathrm{Ad}\,(x^tx^{-1})$$

を得る。これより、軌道集合の間の写像の列

$$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n \simeq \mathrm{Out}(\mathfrak{sl}_n)/\,\mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n) \hookrightarrow \mathrm{Int}(\mathfrak{sl}_n)/\,\mathrm{Ad}\,(\mathrm{GL}_n)$$

が得られる。さらに、軌道 $G\cdot x \in (\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n$ の $(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ による像は、x^tx^{-1} の Jordan 標準形 $(= \mathrm{YDE}^n(\mathbb{C}) \subset \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C})))$ に一致することが分る。$x \in (\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}$ に対する x^tx^{-1} の Jordan 標準形を定めることにより、$(\mathrm{M}_n)_{\det\neq 0}/\mathrm{GL}_n \hookrightarrow \mathrm{YDE}^n(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}))$ による像を決定して、次を得る。

命題5.2. (1) $M_0/G \simeq \{\Delta_p(a)+\Delta_p(a^{-1})(a\in\mathbb{C}^\times),\ \Delta_p(1)\ (p\text{: odd}),\ \Delta_p(-1)\ (p\text{: even})$ の和$\}$

(2) $L_1/G \simeq \{\Delta_p(\xi)+\Delta_p(-\xi)(\xi\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{\pm1\}),\ \Delta_p(0)\ (p\text{: odd}),\ \Delta_p(\infty)\ (p\text{: even})$ の和$\}$

(3) $L^{\chi\text{-ss}}/G \simeq \{\Delta_p(\xi)+\Delta_p(-\xi)(\xi\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})),\ \Delta_p(0)\ (p\text{: odd}),\ \Delta_p(\infty)\ (p\text{: even})$ の和$\}$ □

§5.4 特異チャート L_0, L_∞ の軌道集合

特異チャート L_0, L_∞ は次の同変ファイバー束の構造をもつことが分る。

$$G\times^{\mathrm{O}_n}\mathfrak{o}_n \simeq L_0 \overset{open}{\hookrightarrow} L^{\chi\text{-ss}} \overset{open}{\hookleftarrow} L_\infty \simeq G\times^{\mathrm{Sp}_n}\mathfrak{sp}_n$$

これより

$$\mathfrak{o}_n/\operatorname{Ad}(\mathrm{O}_n) \simeq L_0/G \hookrightarrow L^{\chi\text{-ss}}/G \hookleftarrow L_\infty/G \simeq \mathfrak{sp}_n/\operatorname{Ad}(\mathrm{Sp}_n)$$

であるが、この埋め込みの像を求めて、次を得る。

命題 5.3.(1) $\mathfrak{o}_n/\operatorname{Ad}(\mathrm{O}_n) \simeq L_0/G = \{\Delta_p(\xi) + \Delta_p(-\xi)(\xi \in \mathbb{C}),\ \Delta_p(0)\ (p\text{: odd})$ の和 $\}$

(2) $\mathfrak{sp}_n/\operatorname{Ad}(\mathrm{Sp}_n) \simeq L_\infty/G = \{\{\Delta_p(\xi) + \Delta_p(-\xi)(\xi \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0\}),\ \Delta_p(\infty)\ (p\text{: even})$ の和 $\}_\square$

文献

[ARS] M. Auslander, I. Reiten, S. Smalo: Representation Theory of Artin Algebras.Cambridge University Press (1995).

[DSZ] D. Doković, J. Sekiguchi and K. Zhao, On the geometry of unimodular congruence classes of bilinear forms, preprint.

[HMSV] B. Howard, J. Millson, A. Snowden, R. Vakil, The projective invariants of ordered points on the line, arXiv:math/0505096v7(2006)

[L] D. Luna, Adherences d'orbte et invariants. Invent. Math. 29(1975), 231-238.

[LR] D. Luna and R. W. Richardson, A generalization of the Chevalley restriction theorem, Duke Math. J. 46 (1979), no. 3, 487-496.

[M1] 向井茂, モジュライ理論２, 岩波講座, 現代数学の展開, 岩波書店

[M2] 向井茂, 不変式の話, 数学セミナー, 第２回 (2006)

[O] T. Ohta, An inclusion between sets of orbits and surjectivity of the restriction map of rings of invariants, Hokkaido Math. J. 37(2008),437–454.

[R] C. M. Ringel ,The Rational Invariants of the Tame Quivers, Invent. Math. 58, 217-239 (1980)