数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 150-161

不分岐 p-進ユニタリー群の special 表現に関する形式的次数 — semisimple stratum の場合

尾道大学 刈山和俊 (Kazutoshi Kariyama)
Onomichi University

0. 紹介

局所体 F 上定義された連結簡約代数群（の F-有理点のなす群）の discrete series 表現の形式的次数はその分類における 1 つの重要な不変量である. Harish-Chandra は連結実半単純 Lie 群の discrete series 表現の形式的次数を決定した. 他方, 非アルキメデス的局所体 F 上のその代数群の場合, その形式的次数が決定されている例は極めて限られている.

今後, F を非アルキメデス的局所体とする. 一般線形群 $GL_N(F)$ に関して, F が p-進数体でその p が N と互いに素の場合 (tame case) に, Corwin, Moy そして Sally が [3] において, Howe によって導入された F のある拡大体 E の sub-admissible 指標をパラメータとして, $GL_N(F)$ の discrete series 表現に関する形式的次数と F 上次元 N^2 の多元体 D_N に対して, 乗法群 $D_N^{\times}$ の既約スムース表現の次数を計算した. Silberger と Zink は, type の理論 ([2] を参照) に従って, [7] において, この結果を任意の F の剰余標数 p と F 上の中心的単純多元環の乗法群に拡張した. 筆者は [4] において, この方法を徹底して, $GL_N(F)$ に関する [7] と同じ値を得るとともに、F の標数が任意で, その剰余標数 p が奇数の場合, この方法を不分岐ユニタリー群 G のある special 表現に適用して得たその形式的次数を報告した. この論考では, それよりもう少し広い special 表現のクラスに関するその証明方法を概説する.

少し詳しく説明する. G をある非退化エルミート形式 (V, h) のユニタリー群とし, $A = \mathrm{End}_F(V)$ を V の F-自己準同型環とする. このとき, V のある lattice sequence $\Lambda(k) \supset \Lambda(k+1), k \in \mathbb{Z}$ とその元 β で可換半単純 F-多元環 $F[\beta]$ を生成するものの組 (Λ, β) に付随して, simple type と呼ばれる組 (J, λ) が具体的に構成される. これは G のある開コンパクト部分群 J とその既約スムース表現 λ からなる. Bushunell と Kutzko [1] の方法に従って, 筆者は宮内氏と共同で, [6] において, ある不分岐 2 次拡大体 K/K_0 と K/K_0-非退化エルミート形式のユニタリー群 $C^{\times}$ で, (J, λ) の Hecke 環が $C^{\times}$ の標準岩堀部分群 $\mathcal{I}$ とその自明な指標 $\mathbf{1}_{\mathcal{I}}$ がなす type $(C^{\times}, \mathbf{1}_{\mathcal{I}})$ の Hecke 環に同型となるものが存在することを示した (定理 1). この Hecke 環の同型を介して, $C^{\times}$ の Steinberg 表現 $St_{C^{\times}}$ が G のその simple type (J, λ) を含むある special 表現 $(\pi, \mathcal{V})$ に対応する (定理 2). G 上の Haar 測度 dx をその Steiberg 表現 St_G の形式的次数が 1 になるように正規化する. このとき, [1] に倣って, $\dim(\lambda)$ を含む dx に関する $(\pi, \mathcal{V})$ の形式的次数と $C^{\times}$ 上のある Haar 測度に関する $St_{C^{\times}}$ の形式的次数を関連付ける公式が得られる (定理 3). この公式に現れる因子を計算して $(\pi, \mathcal{V})$ の形式的次数が決定される (定理 4).

1. 準備.

今後の議論のため, われわれはBushunell-Kutzko [1] とStevens [8, 9] の概念を思い起こす.

F をinvolution $x \mapsto \overline{x}$ を備えた剰余標数が奇数の非アルキメデス的局所体, F_0 をその固定体とし、そして F/F_0 は不分岐2次拡大体と仮定する. $\mathfrak{o}_F$ を F の整数環, そして $\mathfrak{p}_F$ を素元 ϖ_F によって生成される $\mathfrak{o}_F$ の極大イデアルとする. また, $k_F = \mathfrak{o}_F/\mathfrak{p}_F$ を F の剰余体とし, $q = q_F = |k_F|$ をその位数とする. $|x|$ により, F の元 x の正規化された付値を表す.

V を F 上の次元 $N \geq 4$ のベクトル空間とし, h を V 上のある非退化エルミート形式で, そのanisotropic部分が (0) とする. ゆえに N は偶数である. $A = \mathrm{End}_F(V)$ を V の F-自己準同型環とし, $G = U(V, h)$ を (V, h) のユニタリー群とする. $x \mapsto \overline{x}$ をまたエルミート形式 h により定義される A 上のadjoint involutionとする.

整数の集合 $\mathbb{Z}$ から V の $\mathfrak{o}_F$-latticeの集合への写像 Λ が V における $\mathfrak{o}_F$-*lattice sequence* とは, 次の条件を満たすものとする.

(1) $\Lambda(k) \supset \Lambda(k+1), k \in \mathbb{Z}$;

(2) $\mathfrak{p}_F\Lambda(k) = \Lambda(k+e), k \in \mathbb{Z}$ を満たす正の整数 e が存在する.

この整数を $e = e_F(\Lambda)$ と表し, Λ の $\mathfrak{o}_F$-周期と呼ぶ.

V のある $\mathfrak{o}_F$-lattice L に対して, エルミート形式 h に関する L の双対 $L^\#$ を $L^\# = \{v \in V : h(v, L) \subset \mathfrak{p}_F\}$ により定義する. その Λ が *self-dual* とは, $\Lambda(k)^\# = \Lambda(d-k), k \in \mathbb{Z}$ を満たす整数 d が存在するものとする. 実際、以降の $\mathfrak{o}_F$-lattice sequenceはすべてself-dual, $d = 1$, そして $\mathfrak{o}_F$-周期が偶数となるようなものを扱う.

V の $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence Λ により, $A = \mathrm{End}_F(V)$ のフィルター付けを

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda) = \{x \in A : x\Lambda(n) \subset \Lambda(n+k), n \in \mathbb{Z}\},\ k \in \mathbb{Z}$$

で導入できる. このとき, A 上のある'付値' $\nu_\Lambda(x), x \in A$ を

$$\nu_\Lambda(x) = \max\{k \in \mathbb{Z} : x \in \mathfrak{a}_k(\Lambda)\}$$

により定義する. 今後, 簡単のため $\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_k(\Lambda)$ と表すこともある.

4つ組み $[\Lambda, n, r, b]$ が A における *stratum* とは, Λ が V のある $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence, $n, r \in \mathbb{Z}$ で $n \geq r \geq 0$, そして b は A のある元からなるものとする.

2つのstratum $[\Lambda, n, r, b_i], i = 1, 2$ が同値とは, $b_1 - b_2 \in \mathfrak{a}_{-r}(\Lambda)$ とする.

あるstratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ が *pure* とは, (1) F-多元環 $E = F[\beta]$ が体, (2) $E^\times$ が $\{\Lambda(k) : k \in \mathbb{Z}\}$ を正規化する, (3) $\nu_\Lambda(\beta) = -n$ の3つの条件を満たすものとする. このとき, B を A における E の中心化群とし, $\mathfrak{b}_k = B \cap \mathfrak{a}_k, k \in \mathbb{Z}$ とする. $\mathfrak{n}_k = \mathfrak{n}_k(\beta, \Lambda) = \{x \in \mathfrak{a}_0 : \beta x - x\beta \in \mathfrak{a}_k\}$ と定義し, そして

$$k_0(\beta, \Lambda) = \max\{-n, \max\{k \in \mathbb{Z} : n_k \subset \mathfrak{b}_0 + \mathfrak{a}_1\}\}$$

と定義する. $E=F$ の場合, $k_0(\beta,\Lambda)=-n$ となり [1, (1.4.5)] の定義と若干異なることを注意する.

ある stratum $[\Lambda,n,0,\beta]$ が *simple* とは, それが pure であり, $k_0(\beta,\Lambda)<-r$ を満たすものとする.

ある stratum $[\Lambda,n,0,\beta]$ が *skew* とは, Λ が self-dual で, $\overline{\beta}=-\beta$ とする.

もし $[\Lambda,n,0,\beta]$ が A における skew simple stratum ならば, $E_0=\{x\in E:\overline{x}=x\}$ とするとき, 非退化 E/E_0-エルミート形式 f で V の $\mathfrak{o}_E$-lattice に対する, 2 つの形式 h と f に関する双対が一致するようなものが存在することを注意する ([8] を参照).

2. Semisimple stratum

この章で, Stevens [8] により定義された semisimple stratum のうちからある特別なものを採り上げる.

記号と仮定は 1 章を保持する. 今, ある整数 $\ell\geq 0$ に対して, エルミート形式の空間 (V,h) が次のように直交分解されていると仮定する.

$$V=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}V^i,\ h=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}h^i,$$

そして Λ を V の $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence で, V のその分解に従って $\Lambda=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}\Lambda^i$ と分解すると仮定する. すなわち

$$\Lambda(k)=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}\Lambda^i(k),\ k\in\mathbb{Z}$$

とする.

各 i に対して, $A^i=\mathrm{End}_F(V^i)$ とし, $[\Lambda^i,q_i,0,\beta_i]$ を A^i における skew simple stratum とする. $E_i=F[\beta_i]$ とせよ. さらに, 次の条件を満たすと仮定する.

(1) $\beta_{\ell+1}\neq 0$ そして $E_{\ell+1}/E_{\ell+1,0}$ は不分岐 2 次拡大である;

(2) $\dim_{E_i}(V^i)$ は偶数である, $1\leq i\leq \ell+1$;

(3) $1\leq i\leq\ell$ に対して, $(L^i)^\#=L^i$ または $(L^i)^\#=\varpi_{E_i}L^i$ を満たす V^i における $\mathfrak{o}_{E_i}$-lattice L^i が存在し, そして Λ^i が $\mathfrak{a}_0(\Lambda^i)\cap\mathrm{End}_{E_i}(V^i)=\mathrm{End}_{\mathfrak{o}_{E_i}}(L^i)$ を満たす, すなわち, Λ^i の $\mathfrak{o}_{E_i}$-周期が 1 である.

このとき, A において, $\beta=\sum_{i=1}^{\ell+1}\beta_i$ とし, stratum $[\Lambda,n,0,\beta]$ が [8, Definition 3.2] の意味で *semisimple* と仮定する.

さらに以下の 3 つの仮定を課す.

(4) ある非負整数 m に対して, V の $E_{\ell+1}$-部分空間 $V^{\ell+1}$ と $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence $\Lambda^{\ell+1}$ が

$$V^{\ell+1} = W^{(0,\ell+1)} \oplus \bigoplus_{j=-m, j\neq 0}^{m} W^{(j)}, \ \Lambda^{\ell+1} = \Lambda^{(0,\ell+1)} \oplus \bigoplus_{j=-m, j\neq 0}^{m} \Lambda^{(j)}$$

と分解し, $\dim_{E_{\ell+1}}(W^{(j)})$ がすべての $j \neq 0$ に対して定数である.

このとき, $W^{(0)} = W^{(0,\ell+1)} \oplus \bigoplus_{j\neq 0} W^{(j)}$ とすると, V はもう 1 つの F-分解

$$V = \bigoplus_{j=-m}^{m} W^{(j)}$$

をもつ.

(5) エルミート形式 h に関する各 $W^{(j)}$ の直補部分空間が $\bigoplus_{k\neq -j} W^{(k)}$ に等しくなる.

(6) $\mathfrak{a}_0(\Lambda^{(0,\ell+1)}) \cap \mathrm{End}_{E_{\ell+1}}(V^{\ell+1}) = \mathrm{End}_{\mathfrak{o}_{E_{\ell+1}}}(L^{(0,\ell+1)})$ を満たす $W^{(0,\ell+1)}$ の self-dual $\mathfrak{o}_{E_{\ell+1}}$-lattice $L^{(0,\ell+1)}$ が存在する.

実際、以上の条件を満たす A における skew semisimple stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ が [5, §2.1] において具体的に構成される.

3. Simple type とその Hecke 環

2 章の仮定と概念を保持する. 2 章の stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ を good skew semisimple stratum と呼ぶ. [8, §3] において, この stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に付随して, $A = \mathrm{End}_F(V)$ の 2 つの $\mathfrak{o}_F$-order

$$\mathfrak{H}(\beta, \Lambda) \subset \mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$$

が定義される, そして, 非負整数 k に対して,

$$\mathfrak{H}^k = \mathfrak{H}^k(\beta, \Lambda) = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{H}(\beta, \Lambda), \ \mathfrak{J}^k = \mathfrak{J}^k(\beta, \Lambda) = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap \mathfrak{J}(\beta, \Lambda)$$

とする. これらから G の開コンパクト部分群を

$$J = J(\beta, \Lambda) = \mathfrak{J}(\beta, \Lambda) \cap G,$$

とし, そして,

$$H^1 = H^1(\beta, \Lambda) = (1 + \mathfrak{H}^1) \cap G, \ J^1 = J^1(\beta, \Lambda) = (1 + \mathfrak{J}^1) \cap G$$

とする.

また, A のフィルター $\mathfrak{a}_k(\Lambda), k \in \mathbb{Z}$ から, 別の G の開コンパクト部分群がつぎのように定義される.

$$P(\Lambda) = \mathfrak{a}_0(\Lambda) \cap G, \ P_k(\Lambda) = (1 + \mathfrak{a}_k(\Lambda)) \cap G, \ k \geq 1.$$

$E = F[\beta] = \bigoplus_{i=1}^{\ell+1} E[\beta_i]$, そして B を A における β の中心化群とせよ. 2章における good skew semisimple stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ の定義から, 群 $G_E = G \cap B$ のつぎの2つの開コンパクト部分群

$$P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P(\Lambda) \cap B^\times,\ P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) = P_1(\Lambda) \cap B^\times$$

を定義できる.

[8, Definition 3.13] において, good skew semisimple stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に付随して, *semisimple character* と呼ばれる $H^1(\beta, \Lambda)$ のある character が定義される. 今 θ を $H^1(\beta, \Lambda)$ のある semisimple character とせよ. このとき, [8, §3] で, $H^1(\beta, \Lambda)$ に制限すると θ を含む $J^1(\beta, \Lambda)$ の既約表現 $\eta = \eta(\theta)$ が唯一存在することが示されている. さらに, [9, §4.2] により, *β-extension* と呼ばれる η の $J = J(\beta, \Lambda)$ への拡大である既約表現 κ が存在する. これは必ずしも1通りではないことを注意する.

今, 非負整数 M, D を $\dim_F(\bigoplus_{j\neq 0} W^{(j)}) = 2M$, $\dim_F(W^{(0)}) = D$ で定義する. このとき, $N = \dim_F(V) = 2M + D$ であり, そして標準的な群同型

$$J/J^1 \simeq P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) \simeq \overline{G}^{(0)} \times \prod_{j=1}^{m} \overline{\overline{G}}^{(j)}$$

が存在する, ここで, $\overline{G}^{(0)}$ は $k_{E_{i,0}}$ 上の連結簡約群, $1 \leq i \leq \ell+1$, の直積に同型である, $\overline{\overline{G}}^{(j)} \simeq GL(f, k_{E_{\ell+1}})), 1 \leq j \leq m$, そして $f = \dim_{E_{\ell+1}}(W^{(j)})$ である ([5, §1.1] を参照). $\overline{\tau}$ を

$$\overline{\tau}^{(0)} \otimes \bigotimes_{j=1}^{m} \overline{\overline{\tau}}^{(j)}$$

となる形の J/J^1 の既約 cuspidal 表現とし, そして τ で $\overline{\tau}$ の J への持ち上げとせよ.

上で定義した表現 κ とこの表現 τ とから, $J = J(\beta, \Lambda)$ の既約スムース表現を

$$\lambda = \kappa \otimes \tau$$

で定義する. このとき, (J, λ) が G における *simpe type* とは,

$$\overline{\overline{\tau}}^{(1)} \simeq \cdots \simeq \overline{\overline{\tau}}^{(m)}$$

が成立することである.

各 $1 \leq j \leq m$ に対して, σ_j で [9, §6.3] において定義される $\widetilde{G}^{(j)} = \mathrm{Aut}_F(W^{(j)})$ 上の involution とせよ. これが $\overline{\overline{G}}^{(j)}$ 上の involution を導く. このとき, simple type (J, λ) が *self-dual* とは, $\overline{\overline{\tau}}^{(j)} \circ \sigma_j \simeq \tau, 1 \leq j \leq m$ が成立することである.

定理 1. ([*5, Proposition1.9*]) $[\Lambda, n, 0, \beta]$ を A における *good skew semisimple stratum* とし, (J, λ) をそれに付随する G における *self-dual simple type* とせよ. このとき, ある不分岐拡大体 $K/E_{\ell+1,0}$ に対して, ある非退化 K/K_0-エルミート形式の $\widetilde{C}_m$ 型の不分岐ユニタリー群 $C^\times$ とその標準岩堀部分群 $\mathcal{I}$ が存在して, G における (J, λ) の *Hecke* 環が $C^\times$ における $(\mathcal{I}, \mathbf{1}_{\mathcal{I}})$ の *Hecke* 環 $\mathcal{H}(C^\times, \mathbf{1}_{\mathcal{I}})$ に同型になる. 実際, それらはパラメータが

$$(q_1, q_2, q_3) = (q_{E_{\ell+1}}^f, q_{E_{\ell+1}}^{f/2}, q_{E_{\ell+1}}^{f/2}) = (q_K^f, q_K^{f/2}, q_K^{f/2})$$

である $\widetilde{C}_m$ 型の *affine Hecke* 環に同型である.

その同型を

$$\Psi : \mathcal{H}(G, \lambda) \simeq \mathcal{H}(C^\times, \mathbf{1}_{\mathcal{I}})$$

と表せ.

4. 形式的次数の公式

3 章の記号と仮定を保持する.

$\mathrm{Irr}^\lambda(G)$ と $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G, \lambda))$ で各々 λ を含む G の既約スムース表現の同値類の集合と既約（有限次元）左 $\mathcal{H}(G, \lambda)$-加群の同値類の集合を表せ. 同様に群 $C^\times$ に対して, $\mathrm{Irr}^{\mathbf{1}_{\mathcal{I}}}(C^\times)$ と $\mathrm{Irr}(\mathcal{H}(C^\times, \mathbf{1}_{\mathcal{I}}))$ を定義する. 同型 Ψ から自然に 1 対 1 対応

$$\Psi_* : \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G, \lambda)) \simeq \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(C^\times, \mathbf{1}_{\mathcal{I}}))$$

が得られる. $\mathcal{W}$ で表現 λ の表現空間とせよ. このとき, [1, §7] より, $(\pi, \mathcal{V}) \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{W}, \mathbb{C}) \otimes_{\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{W})} \mathcal{V}^\lambda$ が写像 $\mathrm{Irr}^\lambda(G) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(G, \lambda))$ を導く, ここで, $\mathcal{V}^\lambda$ は $\mathcal{V}$ の λ-isotypic part を表す. また $Z \mapsto Z^{\mathbf{1}_{\mathcal{I}}}$ が写像 $\mathrm{Irr}^\lambda(C^\times) \to \mathrm{Irr}(\mathcal{H}(C^\times, \mathbf{1}_{\mathcal{I}}))$ を導く.

定理 2. ([*1, Theorem*(7.7.1)], [*2*]) 上の写像を合成して自然な *1* 対 *1* 対応

$$\mathfrak{A}\mathfrak{d}_\Psi : \mathrm{Irr}(G) \simeq \mathrm{Irr}(C^\times)$$

が得られる, そして $\mathfrak{A}\mathfrak{d}_\Psi$ は G の *discrete series* を $C^\times$ の *discrete series* に移す.

dx, dy を各々 $G, C^\times$ の Haar measure とする.

定理 3. (J, λ) を *good skew semisimple stratum* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に付随する G における *self-dual simple type* とし, $(\pi, \mathcal{V})$ を (J, λ) を含む G の既約 *discrete series* 表現で, *1* 対 *1* 対応 $\mathfrak{A}\mathfrak{d}_\Psi$ のもと, その表現 π が $C^\times$ の *Steinberg* 表現 $St_{C^\times}$ に対応すると仮定せよ. このとき,

$$\mathrm{vol}(J, dx) \frac{\deg(\pi, dx)}{\dim(\lambda)} = \mathrm{vol}(\mathcal{I}, dy) \deg(St_{C^\times}, dy)$$

が成立する.

Proof. 定理2を用いて, [1, (7.7.11)] の証明と同様の方法でこの定理の公式を示せる ([5, Theorem 1.8] を見よ).

今後, G の Haar measure dx をその Steinberg 表現 St_G の形式的次数が 1 になるように正規化する. また, $e_i = e(E_i|F)$ で有限次拡大 E_i/F の分岐指数を表す.

系 1. 記号と仮定は定理 *3* の通りとする. $\mathcal{I}_G$ で G の標準岩堀部分群とせよ. このとき, $\deg(\pi, dx)$ は次のように表示される.

$$\frac{\widetilde{W}_{C_{N/2}}(q^{-1}, q^{-1/2}, q^{-1/2})}{\widetilde{W}_{C_m}(q^{-M/me_{\ell+1}}, q^{-M/2me_{\ell+1}}, q^{-M/2me_{\ell+1}})}(\mathcal{I}_G : P_1(\Lambda)) \times \frac{\dim(\sigma)}{(P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}) : P_1(\Lambda_{\mathfrak{o}_E}))}(P_1(\Lambda) : J^1)\dim(\eta),$$

ここで, 例えば $\widetilde{W}_{C_m}(q_1, q_2, q_3)$ は C_m 型の *Poincare* 級数を表し, $(\mathcal{I}_G : P_1(\Lambda))$ は群 $\mathcal{I}_G$ における部分群 $P_1(\Lambda)$ の指数を表す.

Proof. G と $C^\times$ の Steinberg 表現に関する, Macdonald の公式を定理 3 の公式に代入し, この系を得る.

$\dim(\pi, dx)$ を計算するために, 系 1 の右辺を計算すればよい. Poincare 級数の値, 商群 $\mathcal{I}_G/P_1(\lambda)$, $J/J_1 \simeq P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})/P(\Lambda_{\mathfrak{o}_E})$ の構造, そして $\dim(\sigma)$ の値から, $(P_1(\Lambda) : J^1)\dim(\eta)$ を除いた系 1 の右辺が具体的に計算される ([5, §2] を見よ).

5. $(P_1(\Lambda) : J^1)\dim(\eta)$ の計算

これを [4, 1.7] に倣って実行する. $A^- = \{x \in A : \overline{x} = -x\}$, そして $\mathfrak{a}_k^-(\Lambda) = \mathfrak{a}_k(\Lambda) \cap A^-$ とする. また, $\mathfrak{J}_-^1 = \mathfrak{J}^1 \cap A^-$, $\mathfrak{H}_-^1 = \mathfrak{H}^1 \cap A^-$ とする. このとき, Cayley map $C(x) = \frac{1}{2}(1-x)(1+x)^{-1}$ を通して同型 $J^1 \simeq 1 + \mathfrak{J}_-^1$, $H^1 \simeq 1 + \mathfrak{H}_-^1$ を得る. 同様に, $P_1(\Lambda) \simeq 1 + \mathfrak{a}_1^-(\Lambda)$.

命題 1. $(P_1(\Lambda) : J^1)\dim(\eta) = (\mathfrak{a}_1^-(\Lambda) : \mathfrak{J}_-^1)^{1/2}(\mathfrak{a}_1^-(\Lambda) : \mathfrak{H}_-^1)^{1/2}$.

Proof. [9, Proposition 3.5] より, $\dim(\eta) = (J^1 : H^1)^{1/2} = (\mathfrak{J}_-^1 : \mathfrak{H}_-^1)^{1/2}$ を得る. これから直ちにこの命題が示される.

A における good skew semisimple stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に付随して, [5] のように *approximation sequence* $\{[\Lambda, n, r_i, \gamma_i] : 0 \leq i \leq s\}$ を得る. ここで, $[\Lambda, n, r_i, \gamma_i]$ は skew swmisimle stratum, $0 \leq i \leq s$, であり, 以下の条件を満たす.

(1) $[\Lambda, n, r_0, \gamma_0] = [\Lambda, n, 0, \beta]$;

(2) $1 \leq i \leq s$ に対して, $r_i = -k_0(\gamma_{i-1}, \Lambda)$ であり, stratum $[\Lambda, n, r_i, \gamma_i]$ は semisimple で $[\Lambda, n, r_i, \gamma_{i-1}]$ に同値である;

(3) $[\Lambda, n, r_s, \gamma_s]$ は minimal i.e., $-k_0(\gamma_s, \Lambda) = n$,

ここで, 例えば semisimple stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に関して, $k_0(\beta, \Lambda)$ は [8, (3.6)] に従って

$$k_0(\beta, \Lambda) = -\min\{r \in \mathbb{Z} : [\Lambda, n, r, \beta] \text{ is not semisimple}\}$$

で定義される.

r_i は *jump* と呼ばれ, $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_s < n =: r_{s+1}$ を満たす.

各 $[\Lambda, n, r_i, \gamma_i]$ は semisimple stratum であるから, 正のある整数 n_i が存在して

$$V = \bigoplus_{j=1}^{n_i} V^{ij}, \ \gamma_i = \sum_{j=1}^{n_i} \gamma_{ij}$$

と分解する. 各 $F[\gamma_{ij}]$ は体であることを注意する. 実数 r に対して, $\lfloor r \rfloor$ で $n \leq r$ を満たす整数 n のうちの最大整数を表す.

命題 2. 命題 *1* の $(\mathfrak{a}_1^-(\Lambda) : \mathfrak{H}_-^1)$ と $(\mathfrak{a}_1^-(\Lambda) : \mathfrak{J}_-^1)$ は各々つぎのように計算される.

$$\prod_{i=0}^{s} \frac{\left(\mathfrak{a}_{\lfloor r_i/2 \rfloor+1}^-(\Lambda) : \mathfrak{a}_{\lfloor r_{i+1}/2 \rfloor+1}^-(\Lambda)\right)}{\left(\mathfrak{a}_{\lfloor r_i/2 \rfloor+1}^-(\Lambda_{\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}}) : \mathfrak{a}_{\lfloor r_{i+1}/2 \rfloor+1}^-(\Lambda_{\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}})\right)},$$

$$\prod_{i=0}^{s} \frac{\left(\mathfrak{a}_{\lfloor (r_i+1)/2 \rfloor+1}^-(\Lambda) : \mathfrak{a}_{\lfloor (r_{i+1}+1)/2 \rfloor+1}^-(\Lambda)\right)}{\left(\mathfrak{a}_{\lfloor (r_i+1)/2 \rfloor+1}^-(\Lambda_{\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}}) : \mathfrak{a}_{\lfloor (r_{i+1}+1)/2 \rfloor+1}^-(\Lambda_{\mathfrak{o}_{F[\gamma_i]}})\right)},$$

ここでは一時的に $r_0 = 1$ とする.

6. 主定理

命題 2 における項の計算は次数 $(\mathfrak{a}_k^-(\Lambda) : \mathfrak{a}_{k+1}^-(\Lambda))$ の計算に帰着される. 今, $i = 1, 2$, V^i を有限次元 F-ベクトル空間とし, Λ^i を V^i における任意の $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence とする. このとき, $k \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$\mathrm{Hom}_{\mathfrak{o}_F}^k(\Lambda^1, \Lambda^2) = \{x \in \mathrm{Hom}_F(V^1, V^2) : x\Lambda^1(n) \subset \Lambda^2(n+k), \ n \in \mathbb{Z}\}$$

とせよ.

F-分解 $V=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}V^i$ に対して,

$$A^{(ij)}=\mathrm{Hom}_F(V^j,V^i),\ \text{for } 1\le i\le \ell+1.$$

とせよ. このとき, 多元環 $A=\mathrm{End}_F(V)$ のブロック分解

$$A=\coprod_{1\le i,j\le \ell+1}A^{(ij)},$$

が得られ, $k\in\mathbb{Z}$ に対して, $\mathfrak{o}_F$-order $\mathfrak{a}_k(\Lambda)$ のブロック分解

$$\mathfrak{a}_k(\Lambda)=\coprod_{1\le i,j\le \ell+1}\left(\mathfrak{a}_k(\Lambda)\cap A^{(ij)}\right)=\coprod_{1\le i,j\le \ell+1}\mathrm{Hom}^k_{\mathfrak{o}_F}(\Lambda^j,\Lambda^i)$$

が得られる. さらに, F-分解 $V^{\ell+1}=W^{(0,\ell+1)}\oplus\bigoplus_{j\neq 0}W^{(j)}$ に従い $\mathfrak{o}_F$-lattice sequence $\Lambda^{\ell+1}$ を分解し, 少し長い計算により次数 $(\mathfrak{a}_k^-(\Lambda):\mathfrak{a}_{k+1}^-(\Lambda))$ を計算して, $(P_1(\Lambda):J^1)\dim(\eta)=(\mathfrak{a}_1^-(\Lambda):\mathfrak{J}_-^1)^{1/2}(\mathfrak{a}_1^-(\Lambda):\mathfrak{H}_-^1)^{1/2}$ の値を具体的に決定できる. これは極めて技術的であるから説明を略し, 詳細は [5, §3] に譲る. 結局, 以下の定理を得る.

分解 $V=\bigoplus_{i=1}^{\ell+1}V^i$ に関して, $N_i=\dim_F(V^i)$ とし, そして各 $0\le i\le s$ に対する分解 $V=\bigoplus_{j=1}^{n_i}V^{ij}$ に関して, $N_{ij}=\dim_F(V^{ij})$ とせよ. このとき,

$$N=\sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}$$

となる. とくに, $N_{01}=N_{\ell+1}=\dim_{E_{\ell+1}}(V^{\ell+1})$, そして $N_{0j}=N_{j-1}=\dim_{E_{j-1}}(V^{j-1})$, $2\le j\le \ell+1$ とする.

定理 4. 記号と仮定は上の通りとする. (J,λ) を *good skew semisimple stratum* $[\Lambda,n,0,\beta]$ に付随する G における *self-dual simple type* とし, $(\pi,\mathcal{V})$ を (J,λ) を含む G の既約 *discrete series* 表現で, *1* 対 *1* 対応 $\mathfrak{Ad}_\Psi$ のもと, その表現 π が $C^\times$ の *Steinberg* 表現 $St_{C^\times}$ に対応すると仮定せよ. $0\le i\le s, 1\le j\le n_i$ に対して,

$$\Delta_{ij}=\frac{1}{e_F(\Lambda)}\Big(1-\frac{1}{[F[\gamma_{ij}]:F]}\Big)(r_{i+1}-r_i)$$

とし,

$$\Theta_{\ell+1}=\frac{(2m+1)M^2-2mMN_{\ell+1}}{2me_{\ell+1}}\Big(1-\frac{1}{[E_{\ell+1}:F]}\Big),$$

とせよ, ただし, 元のように $r_0=0$ とする. さらに

$$\omega=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}^2\Delta_{ij}\Big)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell+1}\Big\{\frac{N_i^2}{e_i}\Big(1-\frac{1}{[E_i:F]}\Big)-N_i\Big(1-\frac{1}{e_i}\Big)\Big\}+\Theta_{\ell+1}$$

とせよ. このとき, $(\pi,\mathcal{V})$ の形式的次数 $\deg(\pi,dx)$ はつぎのように表示される.

$$\frac{q^{\omega}}{(q^{(N_{\ell+1}-2M)/2e_{\ell+1}}-\iota)\big(\prod_{i=1}^{\ell}(q^{N_i/2e_i}-1)\big)} \times\prod_{i=0}^{m-1}\frac{q^{(m+i)M/me_{\ell+1}}-1}{(q^{(i+1)M/me_{\ell+1}}-1)(q^{(i+1/2)M/me_{\ell+1}}+1)^2} \times\prod_{i=0}^{N/2-1}\frac{(q^{i+1}-1)(q^{i+1/2}+1)^2}{q^{N/2+i}-1},$$

ここで, もし $W^{(0,\ell+1)}=(0)$, すなわち, $N_{\ell+1}=2M$ ならば, $\iota=0$ とし, そしてそうでなければ, $\iota=1$ とする. また, $e_i=e(E_i|F), 1\le i\le\ell+1$ を思い起こせ.

定理 4 の状況で, $m=0$ の場合を考察する. この場合, その simple type はある semisimple stratum $[\Lambda^{\mathsf{M}},n,0,\beta]$ に付随する maximal simple type $(J_{\mathsf{M}},\lambda_{\mathsf{M}})$ である. [9, Theorem 7.14] より, G の既約 supercuspidal 表現 π はそのような maximal simple type $(J_{\mathsf{M}},\lambda_{\mathsf{M}})$ を含むことが示されている.

系 2. 記号と仮定は上の通りとせよ. $(\pi,\mathcal{V})$ を *semisimple stratum* $[\Lambda^{\mathsf{M}},n,0,\beta]$ に付随する *maximal simple type* $(J_{\mathsf{M}},\lambda_{\mathsf{M}})$ を含む G の既約 *supercuspidal* 表現とし,

$$\{(r_i,\gamma_i=\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_{ij},N=\sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}):0\le i\le s\}$$

を $[\Lambda^{\mathsf{M}},n,0,\beta]$ の *approximation sequence* から導かれるデータとせよ, ただし, $r_0=0$ とする. また, $0\le i\le s$, $1\le j\le n_i$ に対して,

$$\Delta_{ij}=\frac{1}{e_F(\Lambda^{\mathsf{M}})}\Big(1-\frac{1}{[F[\gamma_{ij}]:F]}\Big)(r_{i+1}-r_i)$$

とし,

$$\omega=\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{s}\Big(\sum_{j=1}^{n_i}N_{ij}^2\Delta_{ij}\Big)+\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{\ell+1}\Big\{\frac{N_i^2}{e_i}\Big(1-\frac{1}{[E_i:F]}\Big)-N_i\Big(1-\frac{1}{e_i}\Big)\Big\}$$

とせよ．このとき，

$$\deg(\pi, d\overline{x}) = \frac{q^{\omega}}{\prod_{i=1}^{\ell+1}(q^{N_i/2e_i} - 1)} \prod_{i=0}^{N/2-1} \frac{(q^{i+1}-1)(q^{i+1/2}+1)^2}{q^{N/2+i}-1}$$

を得る．

Proof. これは定理 4 から直ちに導かれる．

定理 4 の状況で，もし $\ell = 0$ ならば，その stratum $[\Lambda, n, 0, \beta]$ は simple stratum となる． さらに，$V = V^{\ell+1}, W^{(0,\ell+1)} = W^{(0)}, N = N_{\ell+1}$，そして $e_{\ell+1} = e = e(E|F)$ となる．この場合，定理 4 に適用してつぎの結果を得る．

系 3. $(\pi, \mathcal{V})$ を *good simple stratum* $[\Lambda, n, 0, \beta]$ に付随する *self-dual simple type* (J, λ) を含み，*1* 対 *1* 対応 $\mathfrak{Ad}_{\Psi}$ のもと $St_{C^\times}$ に対応する G の既約 *discrete series* 表現とせよ．また $\{[\Lambda, n, r_i, \gamma_i] : 0 \leq i \leq s\}$ を $[\Lambda, n, 0, \beta]$ の *approximation sequence* とし，そして

$$\Delta = \frac{1}{e_F(\Lambda)} \sum_{i=0}^{s} \left(1 - \frac{1}{[F[\gamma_i] : F]}\right)(r_{i+1} - r_i)$$

とせよ．このとき，

$$\begin{aligned} \deg(\pi, d\overline{x}) = & \frac{q^{\frac{1}{4}[N^2\Delta - N(1-1/e)]}}{q^{(N-2M)/2e} - \iota} \\ & \times \prod_{i=0}^{m-1} \frac{q^{(m+i)M/me} - 1}{(q^{(i+1)M/me}-1)(q^{(i+1/2)M/me}+1)^2} \\ & \times \prod_{i=0}^{N/2-1} \frac{(q^{i+1}-1)(q^{i+1/2}+1)^2}{q^{N/2+i}-1}, \end{aligned}$$

ここで，もし $W^{(0)} = (0)$，すなわち，$N = 2M$ ならば，$\iota = 0$ とし，そしてそうでなければ，$\iota = 1$ とする．

この結果は [4, Theorem 2.7] を含む．ただし，そこで $\Delta' = 0$ となること注意する．

References

[1] C. J. Bushnell and P. C. Kutzko, The admissible dual of GL(N) via compact open subgroups, Ann. Math. Stud. **129**, Princeton Univ. Press, 1993.

[2] Bushnell C. J. and Kutzko P.: Smooth representations of reductive p-adic groups: structure theory via types, Proc. London Math. Soc. (3) **77** (1998), 582-634.

[3] L. Corwin, A. Moy and P. J. Sally Jr., Degrees and formal degrees for division algebras and GL_n over a p-adic field, Pacific J. Math. **141** (1990), 21-45.

[4] Kariyama K.: The formal degree of discrete series representations of GL_N, RIMS Kōkyūroku, **1722** (2010), 97-109.

[5] Kariyama K.: Formal degree for discrete series of p-adic classical groups, preprint, 2011.

[6] Kariyama K. and Miyauchi. M: Hecke algebras of self-dual simple types for p-adic classical groups, preprint, submitted, 2011.

[7] A. J. Silberger and E.-W. Zink, The formal degree of discrete series representations of central simple algebras over p-adic fields, Max-Plank-Institut für Math. MPI 96-154, 1996.

[8] Stevens S.: Semisimple characters for p-adic classical groups, Duke Math. J. **127** no.1 (2005), 123-173.

[9] Stevens S.: The supercuspidal representations of p-adic classical groups, Invent. Math. **172** (2) (2008), 289-352.