数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 162-173



# 曲面の写像類群に付随するJohnson余核のSp-加群構造について

佐藤隆夫氏（東京理科大）との共同研究

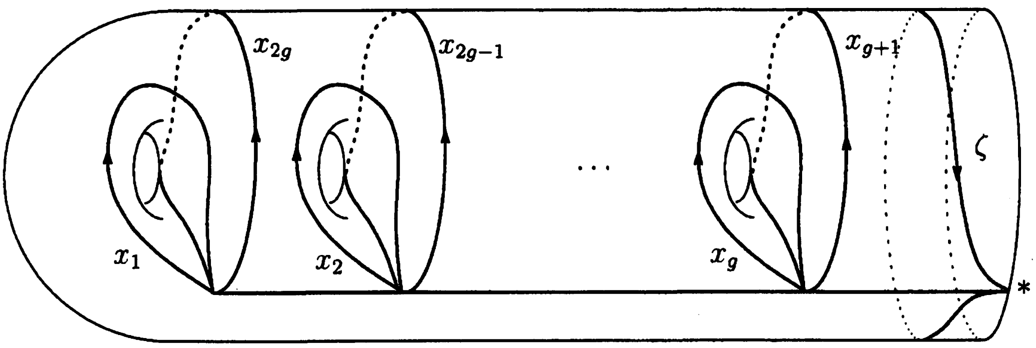
京都大学・理学研究科・数学教室　榎本 直也* (Naoya Enomoto)
Department of Mathematics, Kyoto University

**概要**

筆者と佐藤隆夫氏は，境界成分を 1 個持つ向き付けられたコンパクト Riemann 面 $\Sigma_{g,1}$ の写像類群に付随して得られる Johnson 準同型の余核について，その $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-加群の構造を調べた．その結果，$\mathrm{Aut}(F_{2g})$ に対する Johnson 準同型の余核を用いて detect できる新しいクラスを見出し，その中に $[1^k]_{\mathrm{Sp}}$ $(2 \leq k \equiv 1 \pmod 4)$ という Sp-既約表現が重複度 1 で含まれるという明示的な結果を得た．本稿は，これらの結果をまとめた論文 [ES2]（と [ES1] の一部）についての概説である．なお，本稿では，先行研究に対する文献についてはあまり詳しく書かなかった．詳細な内容や参考文献については [ES1],[ES2] を参照していただきたい．

## 1. 自由群の自己同型群と曲面の写像類群

境界成分を 1 つ持つ種数 $g$ の向き付けられたコンパクト Riemann 面 $\Sigma_{g,1}$ を考える．




この曲面の基本群 $\pi_1(\Sigma_{g,1},*)$ は階数 $2g$ の自由群 $F_{2g}$ となり，その生成元は上図 $x_1,\ldots,x_{2g}$ となる．$H_1(\Sigma_{g,1},\mathbb{Z})$ は $F_{2g}$ のアーベル化 $F_{2g}^{\mathrm{ab}}$ となり，$e_i := [x_i]$ から定まるシンプレクティック基底 $\{e_1,\ldots,e_g,e_{g+1},\ldots,e_{2g}\}$ を持つ．本稿では，以下 $H := H_1(\Sigma_{g,1},\mathbb{Z}) = F_{2g}^{\mathrm{ab}}$ とかく．この曲面の**写像類群** $\mathcal{M}_{g,1}$ とは，境界成分を各点毎に固定するような向きを保つ微分同相写像の isotopy 類である．$\mathcal{M}_{g,1}$ の基本群への作用から誘導される $\varphi : \mathcal{M}_{g,1} \to \mathrm{Aut}(F_{2g})$

*enomoto@math.kyoto-u.ac.jp

は，Dehn-Nielsen の古典的な結果により単射であることが知られており，その像は $\{\sigma \in \mathrm{Aut}(F_{2g}) \mid \zeta^\sigma = \zeta\}$ となる．

$F_{2g}$ の交換子群 $[F_{2g}, F_{2g}]$ は特性部分群なので，$\mu : \mathrm{Aut}(F_{2g}) \to \mathrm{Aut}(H) = GL(2g, \mathbb{Z})$ が定まる．Nielsen によりこれは全射であることが知られている．この核 $\mathrm{Ker}\,\mu$ を $\mathrm{IA}_{2g}$ とかき，**IA-自己同型群**と呼ぶ．これは $H = F_{2g}^{\mathrm{ab}}$ 上に自明に作用するような $\mathrm{Aut}(F_{2g})$ の部分群を与えている．次に，写像類群 $M_{g,1}$ の $H = H_1(\Sigma_{g,1}, \mathbb{Z})$ への作用から誘導される $\mu_M : M_{g,1} \to \mathrm{Aut}(H)$ の像は，$\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Z})$ となることが知られている．この核 $\mathrm{Ker}\,\mu_M$ を $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ とかいて，**Torelli 群**と呼ぶ．これは $H$ 上に自明に作用するような $M_{g,1}$ の部分群である．

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[r] & \mathrm{IA}_{2g} \arrow[r] & \mathrm{Aut}\,F_{2g} \arrow[r, "\mu"] & \mathrm{GL}(2g, \mathbf{Z}) \arrow[r] & 1 \\
1 \arrow[r] & \mathrm{Torelli}_{g,1} \arrow[r] \arrow[u, hook, "\varphi|_{\mathrm{Torelli}_{g,1}}"] & M_{g,1} \arrow[r, "\mu_M"] \arrow[u, hook, "\varphi"] & \mathrm{Sp}(2g, \mathbf{Z}) \arrow[r] \arrow[u, hook] & 1
\end{tikzcd}
$$

## 2. $\mathrm{IA}_n$ に対する Johnson 準同型

われわれの目標は，$\mathrm{IA}_n$ や $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ の構造を理解したいという点にある．そのための手法として“**Lie 代数化**”を考える．すなわち，$\mathrm{IA}_n$ や $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ に群の中心列を入れ，それに関する次数商を考えることで Lie 代数を作り出す．こうして得られた Lie 代数を，自由 Lie 代数の微分代数の中に実現するのが **Johnson 準同型**である．

### 2.1. 自由群から自由 Lie 代数へ

まず自由 Lie 代数が登場することを見るために，Magnus に始まる自由群から自由 Lie 代数を作り出す方法について述べる．

$F_n$ を階数 $n$ の自由群とする．その降中心列とは

$$\Gamma_n(1) := F_n,\ \Gamma_n(k) = [\Gamma_n(k-1), F_n]\ (k \geq 2)$$

で帰納的に定義される $F_n$ の特性部分群の減少列である．このとき，

$$\Gamma_n(k) \times \Gamma_n(\ell) \ni (g, h) \mapsto [g, h] \in \Gamma_n(k+\ell)$$

が定義される．交換子に関する Hall 恒等式

$$[[a,b],c][[b,c],a][[c,a],b] \equiv 1 \bmod \Gamma_n(k+\ell+m+1) \quad (a \in \Gamma_n(k), b \in \Gamma_n(\ell), c \in \Gamma_n(m))$$

に注意すると

$$\mathcal{L}_n := \bigoplus_{k\geq 1} \mathcal{L}_n(k) = \bigoplus_{k \geq 1} \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$$

上に次数付き Lie 代数の構造が定まる．特に，いま $\mathcal{L}_n(1) = \Gamma_n(1)/\Gamma_n(2) = F_n/[F_n, F_n] = F_n^{\mathrm{ab}} = H$ である．

**定理 2.1** (Magnus, Witt, Hall). $\mathcal{L}_n(k)$ は有限階数の自由アーベル群であり，$\mathcal{L}_n$ は $\mathcal{L}_n(1) = H$ から生成される自由 Lie 代数に Lie 代数として同型である．

## 2.2. $\mathrm{Aut}(F_n)$ の Andreadakis filtration

$\Gamma_n(k)$ が $F_n$ の特性部分群であったことに注意すると,

$$N_{n,k} := F_n/\Gamma_n(k+1)$$

上に $\mathrm{Aut}(F_n)$ が作用する. $N_{n,k}$ は階数 $n$ クラス $k$ の自由冪零群と呼ばれている. 特に, $N_{n,1} = F_n/\Gamma_n(2) = F_n/[F_n, F_n] = F_n^{\mathrm{ab}} = H$ となっている.

ここで $\mathrm{Aut}(F_n)$ の正規部分群

$$\mathcal{A}_n(k) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Aut}(F_n) \to \mathrm{Aut}(N_{n,k}))$$

を考える. これは, $\mathrm{Aut}(F_n)$ 中の正規部分群の減少列 $\mathrm{Aut}(F_n) \supset \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \cdots$ を与える. これを $\mathrm{Aut}(F_n)$ の Andreadakis filtration という. 特に $\mathcal{A}_n(1)$ は $N_{n,1}$ すなわち $H$ に自明に作用する $\mathrm{IA}_n$ そのものであることに注意する. 次の定理が基本的である.

**定理 2.2** (Andreadakis 1965).

(1) $\phi \in \mathcal{A}_n(k), x \in \Gamma_n(\ell)$ に対して, $\phi(x)x^{-1} \in \Gamma_n(k+\ell)$. 特に, $\phi \in \mathrm{IA}_n, x \in \Gamma_n(\ell)$ ならば, $\phi(x)x^{-1} \in \Gamma_n(\ell+1)$.

(2) $[\mathcal{A}_n(k), \mathcal{A}_n(\ell)] \subset \mathcal{A}_n(k+\ell)$. 特に, $[\mathcal{A}_n(k), \mathrm{IA}_n] \subset \mathcal{A}_n(k+1)$ なので, $IA_n = \mathcal{A}_n(1) \supset \mathcal{A}_n(2) \supset \cdots$ は, $\mathrm{IA}_n$ の中心列を与える.

(3) $\mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n) := \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1)$ は階数有限の自由アーベル群であり, さらに, $\bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{gr}^k(\mathcal{A}_n)$ 上に次数付き Lie 代数の構造が入る.

## 2.3. $\mathrm{IA}_n$ に対する Johnson 準同型

もともと Johnson 準同型は写像類群に対して 1980 年代に Johnson によって導入されたものであり, ここで述べる $\mathrm{Aut}(F_n)$ あるいは $\mathrm{IA}_n$ に対するものは森田茂之氏によって後に導入されたものである. 次のようなアーベル群の準同型を考える.

$$\tau_k : \mathcal{A}_n(k) \ni \phi \mapsto [x\Gamma_n(2) \mapsto \phi(x)x^{-1}\Gamma_n(k+2)] \in \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

ここで, $H = \Gamma_n(1)/\Gamma_n(2), \mathcal{L}_n(k+1) = \Gamma_n(k+1)/\Gamma_n(k+2)$ であったことに注意する.

$\phi \in \mathcal{A}_n(k+1) \Leftrightarrow \phi(x)x^{-1} \in \Gamma_n(k+2)$ $(\forall x \in F_n)$ であることに注意すれば, 次の補題が従う.

**補題 2.3.** $\mathrm{Ker}\,\tau_k = \mathcal{A}_n(k+1)$.

これにより, つぎの単射

$$\tau_k : \mathrm{gr}^k \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n(k)/\mathcal{A}_n(k+1) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

が誘導される. これを **$\mathrm{IA}_n$ に対する $k$ 次 Johnson 準同型**と呼ぶ. 右辺は, $H^* \otimes_{\mathbf{Z}} \mathcal{L}_n(k+1) = \mathrm{Der}(\mathcal{L}_n)(k)$ と見ることで, $\mathcal{L}_n$ の微分代数の次数 $k$ 部分であるとみなせる.

$$\bigoplus_{k\geq 1} \mathrm{gr}^k \mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathrm{Der}(\mathcal{L}_n)$$

は次数付き Lie 代数の準同型であり, total Johnson 準同型と呼ばれている.

### 2.4. $\mathrm{IA}_n$ の降中心列

Andreadakis filtration とは別に $\mathrm{IA}_n$ 自身の降中心列を考えることができる．すなわち，$\mathcal{A}'_n(1) := \mathrm{IA}_n$，$\mathcal{A}'_n(k) = [\mathcal{A}'_n(k-1), \mathrm{IA}_n]$ $(k \geq 2)$ と定義する．$\mathcal{A}_n$ が $\mathrm{IA}_n$ の中心列であったことに注意すると，降中心列の性質から，$\mathcal{A}'_n(k) \subset \mathcal{A}_n(k)$ が成り立つことがわかる．従って，$\tau_k$ を制限することにより，

$$\tau'_k : \mathrm{gr}^k \mathcal{A}'_n \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

が得られ，$\bigoplus_{k \geq 1} \tau_k$ は次数付き Lie 代数の準同型になる．但し，これは単射とは限らない．

$\mathcal{A}_n(k) = \mathcal{A}'_n(k)$ $(k \geq 1)$ が成り立つであろうと予想されている（Andreadakis 予想）が，そもそも $\mathrm{Im}\,\tau_k = \mathrm{Im}\,\tau'_k$ であるかどうかや，さらに弱い $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ で $\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}} = \mathrm{Im}\,\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ であるかどうかさえ，低い次数の場合を除いてわかっていない．

## 3. Torelli 群に対する Johnson 準同型

単射 $\varphi : M_{g,1} \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F_{2g})$ に注意して，$\mathcal{M}_{g,1}(k) := M_{g,1} \cap \mathcal{A}_{2g}(k)$ と定義する．これは，IA の場合と同様に，$\mathrm{Torelli}_{g,1}$ の中心列与えることがわかり，$\tau_k$ を制限することで，アーベル群の単射準同型

$$\tau_k^{\mathcal{M}} : \mathrm{gr}^k \mathcal{M}_{g,1} \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

が得られる．これを $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ **に対する** $k$ **次 Johnson 準同型**と呼ぶ．$\bigoplus_{k \geq 1} \tau_k^{\mathcal{M}}$ も同様に次数付き Lie 代数の準同型を与える．

IA の場合と同様に，$\mathrm{Torelli}_{g,1}$ にもそれ自身の降中心列が取れる．すなわち，$\mathcal{M}'_{g,1}(1) := \mathrm{Torelli}_{g,1}$，$\mathcal{M}'_{g,1}(k) := [\mathcal{M}'_{g,1}(k-1), \mathrm{Torelli}_{g,1}]$ $(k \geq 2)$ と定義する．$\tau_k^{\mathcal{M}}$ を制限することで

$$\tau_k'^{\mathcal{M}} : \mathrm{gr}^k \mathcal{M}' \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n(k+1))$$

が得られる．IA の場合と違うことは，$\mathrm{Torelli}_{g,1}$ の場合，一般には $\mathcal{M}_{g,1}(k) \neq \mathcal{M}'_{g,1}(k)$ であることがわかっている一方で，$\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ 上では $\tau_k^{\mathcal{M}}$ と $\tau_k'^{\mathcal{M}}$ の像の一致が示されていることである．

**定理 3.1** (Hain 1997).

(1) $\bigoplus_{k \geq 1} \mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}}$ は，$\mathrm{Im}\,\tau_{1,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}}$ によって，次数付き Lie 代数として生成される．

(2) $\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}\,\tau'^{\mathcal{M}}_{k,\mathbb{Q}}$ $(k \geq 1)$.

## 4. GL あるいは Sp-加群構造

IA に対する Johnson 準同型，$\mathrm{Torelli}_{g,1}$ に対する Johnson 準同型に GL, Sp の表現論を使うため，GL, Sp の作用を導入する．

まず，$\Gamma_n(k)$ が $F_n$ の特性部分群であったことに注意すると，$\mathrm{Aut}(F_n)$ は自然に次数商 $\mathcal{L}_n(k) = \Gamma_n(k)/\Gamma_n(k+1)$ に作用する．次に Andreadakis の定理 2.2(1) を思い出すと，$\phi \in$

$\mathrm{IA}_n$，$x \in \Gamma_n(\ell)$ ならば，$\phi(x)\Gamma_n(\ell+1) = x\Gamma_n(\ell+1)$ が成り立つ．従って，$\mathrm{Aut}(F_n)$ の $\mathcal{L}_n(k)$ への作用を $\mathrm{IA}_n$ に制限すると自明になっていることがわかり，$\mathcal{L}_n(k)$ 上に $\mathrm{Aut}(F_n)/\mathrm{IA}_n$ すなわち $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の作用が定まる．

$\mathcal{A}_n(k)$ は $\mathrm{Aut}(F_n)$ の正規部分群であったから，$\mathrm{Aut}(F_n)$ が共役で作用する．よって $\mathrm{Aut}(F_n)$ は各次数商 $\mathrm{gr}^k\mathcal{A}_n$ に作用する．ここで Andreadakis の定理2.2(2) を思い出すと，$[\mathcal{A}_n(k), \mathrm{IA}_n] \subset \mathcal{A}_n(k+1)$ だった．つまり，$\phi \in \mathcal{A}_n(k), \psi \in \mathrm{IA}_n$ とすると，$\psi\phi\psi^{-1}\mathcal{A}_n(k+1) = \phi\mathcal{A}_n(k+1)$ が成り立つ．従って，$\mathrm{Aut}(F_n)$ の $\mathrm{gr}^k\mathcal{A}_n$ への作用を $\mathrm{IA}_n$ に制限すると自明になっていることがわかり，$\mathrm{gr}^k\mathcal{A}_n$ 上に $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の作用が定まる．

こうして $\mathrm{gr}^k\mathcal{A}_n$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(H, \mathcal{L}_n k+1)$ に $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$ の作用が定まった．

**命題 4.1.** $\mathrm{IA}_n$ に対する Johnson 準同型 $\tau_k, \tau'_k$ はいずれも $\mathrm{GL}(n,\mathbb{Z})$-加群の準同型になる．

全く同様に次がわかる．

**命題 4.2.** $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ に対する Johnson 準同型 $\tau_k^{\mathcal{M}}, \tau_k'^{\mathcal{M}}$ はいずれも $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$-加群の準同型になる．

こうして Johnson 準同型の像や余核に表現論を適用する準備が整った．

# 5. 森田障害＆佐藤障害

以下ではすべて $\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ で考えることにする．

## 5.1. Torelli 群に対する Johnson 余核と森田障害

Torelii 群に対する Johnson 準同型は $\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}'^{\mathcal{M}}$ であり（定理3.1），$H_{\mathbb{Q}}^* \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1)$ に埋め込まれていた．$\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q})$-加群として $H_{\mathbb{Q}}^* \cong H_{\mathbb{Q}}$ であることに注意すると，$\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}'^{\mathcal{M}} \hookrightarrow H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1)$ となっている．

森田茂之氏は，$\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}'^{\mathcal{M}}$ が $H_{\mathbb{Q}}^{\otimes} \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1)$ 中のさらに小さな空間に含まれることを示した（1993）．それは，Lie bracket を取る全射 $\pi_k : H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1) \ni X \otimes Y \mapsto [X,Y]\mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+2)$ の核である．それを $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ とかく．

$$\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = \mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbb{Q}}'^{\mathcal{M}} \hookrightarrow \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k) := \mathrm{Ker}\,\pi_k \hookrightarrow H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1) \stackrel{\pi_k}{\twoheadrightarrow} \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+2)$$

ここで，$\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}} := \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ を写像類群 $M_{g,1}$ あるいは **Torelli 群に対する $k$ 次 Johnson 余核と呼ぶ**．Johnson 像 $\mathrm{Im}\,\tau_k^{\mathcal{M}}$ や Johnson 余核の Sp-加群構造を調べるのが目標である．重要な結果として森田障害が挙げられる．

**定理 5.1** (森田 1993（-中村）)**.** $k$ を 3 以上の奇数とするとき，Sp-既約表現 $[k]_{\mathrm{Sp}}$ が重複度 1 で $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ に現れる．これを **Johnson 準同型の全射性に関する森田障害**と呼ぶ．

森田氏は $[k]_{\mathrm{Sp}}$ が少なくとも 1 つ $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ に現れることを示し，中村博昭氏が $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ に $[k]_{\mathrm{Sp}}$ が重複度 1 で現れることを示すことで，余核にも重複度 1 で現れることを示した．また，中村-角皆によって，$1 \leq k \leq 14$ の場合の $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ の Sp-既約成分が完全に決定されてい

る.

また，朝田-中村 (1995) により，$[k,2]_{\mathrm{Sp}}$ ($k$ は偶数)，$[k,1^2]_{\mathrm{Sp}}$ ($k$ は奇数) がいずれも Johnson 像 $\operatorname{Im}\tau^{\mathcal{M}}_{k,\mathbb{Q}}$ に含まれることが示されている.

$k=1,2,3,4$ の場合の既約分解の様子は次のようになっている.

| | $\operatorname{Im}\tau^{\mathcal{M}}_{k,\mathbb{Q}}$ | $\operatorname{Coker}^{\mathcal{M}}_k$ |
|---|---|---|
| $k=1$ | $[1^3]_{\mathrm{Sp}}\oplus[1]_{\mathrm{Sp}}$ | 0 |
| $k=2$ | $[2^2]_{\mathrm{Sp}}\oplus[1^2]_{\mathrm{Sp}}\ominus[0]_{\mathrm{Sp}}$ | 0 |
| $k=3$ | $[3,1^2]_{\mathrm{Sp}}\oplus[2,1]_{\mathrm{Sp}}$ | $[3]_{\mathrm{Sp}}$ |
| $k=4$ | $[4,2]_{\mathrm{Sp}}\oplus[3,1^3]_{\mathrm{Sp}}\oplus[2^3]_{\mathrm{Sp}}\oplus 2[3,1]_{\mathrm{Sp}}\oplus[2,1^2]_{\mathrm{Sp}}\oplus 2[2]_{\mathrm{Sp}}$ | $[2,1^2]_{\mathrm{Sp}}\oplus[2]_{\mathrm{Sp}}$ |

### 5.2. IA に対する Johnson 余核の構造

$\mathrm{Aut}(F_n)$ あるいは $\mathrm{IA}_n$ に対する Johnson 準同型に対する結果をまとめてみると次のようになる.

$\operatorname{Im}\tau'_{k,\mathbb{Q}}\hookrightarrow H^*_{\mathbb{Q}}\otimes\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_n(k+1)$ の余核 $\operatorname{Coker}_k := H^*_{\mathbb{Q}}\otimes\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_n(k+1)/\operatorname{Im}\tau'_{k,\mathbb{Q}}$ の構造について，まず 2000 年前後に森田氏によって，GL-既約表現 $(k)_{\mathrm{GL}}\in\operatorname{Coker}_k$ $(k\geq 2)$ となっていることが示された.

その後，佐藤隆夫氏により（$n\gg k$ なる stable range での）$\operatorname{Coker}_k$ の構造を調べる研究が続けられた．佐藤氏は，$H^{\otimes k}$ に成分の入れ替えで右から作用する $k$ 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の $k$ 次巡回部分群 $\mathrm{Cyc}_k$ を考え，その作用による商空間

$$\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k) := H^{\otimes k}_{\mathbb{Q}}/\langle v_1\otimes v_2\otimes\cdots\otimes v_k - v_k\otimes v_1\otimes\cdots\otimes v_{k-1}\ (v_i\in H_{\mathbb{Q}})\rangle$$

を導入した (2006)．$H^*_{\mathbb{Q}}\otimes\mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_n(k+1)$ の第 1 成分と第 2 成分を contraction し，$\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ へ落とすことで $\pi: H^{\otimes k}_{\mathbb{Q}}\to\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ が得られる．佐藤氏は，$\pi(\operatorname{Im}\tau'_{k,\mathbb{Q}})=0$ となること，したがって，$\operatorname{Coker}_k\twoheadrightarrow\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ となっていることを示した．さらに，2 つの GL-既約表現 $(1^k)_{\mathrm{GL}}$ ($k$ は 3 以上の奇数) および $(2,1^k)$ ($k$ は 2 以上の偶数) が $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ に含まれることを示した．その後，2009 年に $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ が余核そのものであること，すなわち次の定理を示した.

**定理 5.2** (佐藤 (2009)). $k\geq 2,\ n\geq k+2$ のとき，$\operatorname{Coker}_k\cong\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$.

これらをまとめて，**IA-自己同型群の Johnson 準同型 $\tau'_k$ の全射性に対する佐藤障害**と呼ぶ．なお $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ は，$\tau_k$ に対する Johnson 余核の上からの評価を与えていることにもなる.

## 6. 主定理

### 6.1. $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ の GL-加群構造

筆者と佐藤氏の共同研究の中では，まず $\mathcal{C}^{\mathbb{Q}}_n(k)$ の GL-加群構造を決定した．前章と同様に，$\mathfrak{S}_k$ を $k$ 次対称群とし，長さ $k$ の巡回置換で生成される $k$ 次巡回部分群を $\mathrm{Cyc}_k$ とかく.

**定理 6.1** (榎本-佐藤 [ES1]). $n \geq k+2$ のとき, $\mathcal{C}_n^{\mathbf{Q}}(k)$ における, 最高ウェイト $\lambda$ の GL-既約表現 $L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}$ の重複度 $[\mathcal{C}_n^{\mathbf{Q}}(k) : L_{\mathrm{GL}}^{\lambda}]$ は, 分割 $\lambda$ に対応する $\mathfrak{S}_k$-既約表現 $S^{\lambda}$ を $\mathrm{Cyc}_k$ に制限して得られる表現における, $\mathrm{Cyc}_k$ の自明表現 $\mathbf{triv}_k$ の重複度 $[\mathrm{Res}_{\mathrm{Cyc}_k}^{\mathfrak{S}_k} S^{\lambda} : \mathbf{triv}_k]$ に一致する.

この定理を使うことで, $\mathrm{IA}_n$ に対する森田障害 $(k)_{\mathrm{GL}}$ の余核における重複度が 1 であること, 佐藤氏の得た $(1^k)$ ($k$ は 3 以上の奇数), $(2, 1^{k-2})$ ($k$ は 2 以上の偶数) の余核における重複度も 1 であることがわかる. $1 \leq k \leq 7$ における $\mathcal{C}_n^{\mathbf{Q}}(k)$ の GL-既約分解は次のようになる.

| | $\mathcal{C}_n^{\mathbf{Q}}(k) = \mathrm{Coker}(\tau'_{k,\mathbf{Q}}), \quad n \geq k+2$ |
|---|---|
| $k=1$ | $0$ |
| $k=2$ | $(2)_{\mathrm{GL}}$ |
| $k=3$ | $(3)_{\mathrm{GL}} \oplus (1^3)_{\mathrm{GL}}$ |
| $k=4$ | $(4)_{\mathrm{GL}} \oplus (2,2)_{\mathrm{GL}} \oplus (2,1^2)_{\mathrm{GL}}$ |
| $k=5$ | $(5)_{\mathrm{GL}} \oplus (3,2)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(3,1^2)_{\mathrm{GL}} \oplus (2^2,1)_{\mathrm{GL}} \oplus (1^5)_{\mathrm{GL}}$ |
| $k=6$ | $(6)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(4,2)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(4,1^2)_{\mathrm{GL}} \oplus (3^2)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(3,2,1)_{\mathrm{GL}}$ $\ominus(3,1^3)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(2^3)_{\mathrm{GL}} \ominus (2^2,1^2)_{\mathrm{GL}} \oplus (2,1^4)_{\mathrm{GL}}$ |
| $k=7$ | $(7)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(5,2)_{\mathrm{GL}} \oplus 3(5,1^2)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(4,3)_{\mathrm{GL}} \oplus 5(4,2,1)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(4,1^3)_{\mathrm{GL}} \oplus 3(3^2,1)_{\mathrm{GL}}$ $\oplus 3(3,2^2)_{\mathrm{GL}} \oplus 5(3,2,1^2)_{\mathrm{GL}} \ominus 3(3,1^4)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(2^3,1)_{\mathrm{GL}} \oplus 2(2^2,1^3)_{\mathrm{GL}} \oplus (1^7)_{\mathrm{GL}}$ |

## 6.2. $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ の Sp-加群構造

筆者と佐藤氏は共同研究の中で, Torelli 群に対する Johnson 余核 $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ の Sp-加群構造について調べ, 次の明示的な Sp-既約成分を得た.

**定理 6.2** (榎本-佐藤 [ES2]). $g \geq k+2$ かつ $2 \leq k \equiv 1 \pmod 4$ のとき, Sp-既約表現 $[1^k]_{\mathrm{Sp}}$ が $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ に重複度 1 で現れる.

証明の概略は次の通りである. まず, $\mathrm{IA}_{2g}$ の Johnson 準同型と $\mathrm{Torelli}_{g,1}$ の Johnson 準同型とをまとめて, Sp-加群の間の次のような図式が得られていたことを思い出す.

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{Im}\,\tau'_{k,\mathbf{Q}} \arrow[rr, hook] & & H_{\mathbf{Q}}^{*} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{L}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k+1) \arrow[r, two heads] & H_{\mathbf{Q}}^{\otimes k} \arrow[r, two heads] & \mathcal{C}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k) \\
\mathrm{Im}\,\tau_{k,\mathbf{Q}}^{\mathcal{M}} \arrow[r, equal] & \mathrm{Im}\,\tau'^{\mathcal{M}}_{k,\mathbf{Q}} \arrow[r, hook] \arrow[u, hook] & \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k) \arrow[r, hook] \arrow[urrr, dotted, "c_k"] & H_{\mathbf{Q}} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathcal{L}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k+1) \arrow[rr, two heads] \arrow[u, "\wr"] & & \mathcal{L}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k+1)
\end{tikzcd}
$$

ここで第 1 成分と第 2 成分に関する contraction と $\mathcal{C}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k)$ への全射を合成することで得られる $\mathrm{Sp}(2g, \mathbb{Q})$-加群の射 $c_k : \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k) \to \mathcal{C}_{2g}^{\mathbf{Q}}(k)$ を考えることができる.

われわれは次の 2 つのことを示すことで, 上記の定理を得た.

(i) $[1^k]_{\mathrm{Sp}}$ の $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbf{Q}}(k)$ における重複度が 1 であること.

(ii) $c_k([1^k]_{\mathrm{Sp}}) \neq 0$ であること.

(i) は $\mathcal{L}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ の GL-既約分解を組合せ論的に記述する公式，(GL, Sp)-表現分岐則を用いて証明できる．(ii) は $[1^k]_{\mathrm{Sp}}$ の極大ベクトルを具体的に構成し，それが $c_k$ で消えないことを直接証明する．この2つの結果と上の図式から $c_k(\operatorname{Im}\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}})=0$ であることに注意すれば，定理の主張が得られる．

**Remark 6.3.** 中村博昭氏は，1996年に森田氏との私信の中で，中村-角皆による $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ $(1\leq k\leq 14)$ の Sp-既約分解の具体的記述に言及しながら，$[1^{4m+1}]_{\mathrm{Sp}}$ $(m=1,2,3)$ が $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ $(k=5,9,13)$ にそれぞれ重複度1で現れることを述べ，これが Johnson 余核においても生き残るという予想を述べていた．

## 7. Discussions -余核の新しいクラス $\operatorname{Ker} c_k$-

今回，筆者と佐藤氏は，$\mathrm{Torelli}_{g,1}$ に対する Johnson 余核 $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ 中に $\operatorname{Ker} c_k$ という $\mathrm{IA}_{2g}$ に対する Johnson 余核から detect できる新しいクラスを導入したと言える．

$$\operatorname{Im}\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}}\subset \operatorname{Ker} c_k\subset \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$$

われわれの主定理は $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)/\operatorname{Ker} c_k$ に $[1^k]_{\mathrm{Sp}}$ $(2\ lek\equiv 1 \pmod 4)$ が重複度1で含まれることを示したことになるが，[ES2] で森田障害 $[k]_{\mathrm{Sp}}$ ($k$ は奇数) も $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)/\operatorname{Ker} c_k$ に含まれていることを全く同様の手法で示した（森田-中村の結果の別証明）．

他方，Johnson 余核の Sp-自明部分 $(\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}})^{\mathrm{Sp}}$ の中には，数論的基本群に対する絶対ガロア群の外作用を考えることにより得られる成分（ガロア障害）が含まれることが知られている．森田氏により自明表現の記述や重複度が調べられており，特に $k=6$ のとき，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(6)$ には5個の Sp-自明表現 $[0]_{\mathrm{Sp}}$ が含まれ，そのうち3個が $\mathrm{Coker}_k^{\mathcal{M}}$ に残る．他方，$\mathcal{C}_{2g}^{\mathbb{Q}}(6)$ と $\mathrm{GL}-\mathrm{Sp}$-表現分岐則をあわせると，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)/\operatorname{Ker} c_k$ には高々2個の Sp-自明表現しか含まれないことがわかる．従って，$k=6$ では，$\operatorname{Im}\tau_{6,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}}\neq \operatorname{Ker} c_6$ である．

Johnson 余核の構造に関してもうひとつ重要なクラスとして，$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}$ の Lie 代数としてのアーベル化の核があげられる．$\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}=\bigoplus_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ は $\mathrm{Der}(\mathcal{L}_{2g})$ の中の次数付き部分 Lie 代数となる．そのアーベル化の核 $[\mathfrak{h}_{g,1},\mathfrak{h}_{g,1}]$ の次数 $k$ 部分を $\mathrm{Ker}^{\mathrm{ab}}(k)$ とかくことにする．

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{Ker} c_k \arrow[dr, hook] & \\
\operatorname{Im}\tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & & \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k) \\
 & \mathrm{Ker}^{\mathrm{ab}}(k) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

森田氏は $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)/\mathrm{Ker}^{\mathrm{ab}}(k)$ に森田障害 $[k]_{\mathrm{Sp}}$ ($k$ は奇数) が含まれていることを示し，これ以外はすべてアーベル化の核に属しているのではないかと予想されていた．しかし，ごく最近 Conant-Kassabov-Vogtmann [CKV] により，無限個の $k$ で森田障害以外にアーベル化で消えない元が存在することがわかった．

これらを踏まえて考えられる問題をいくつか列挙してみると次のようになる．

**問題 7.1.** $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)/\operatorname{Ker} c_k$ の Sp-既約分解則を組合せ論的に記述せよ.

**問題 7.2.** $\operatorname{Ker} c_k$ の構造.

(i) $[1^k]$ ($k \equiv 2 \pmod 4$) も $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ に重複度 1 で現れる. しかしこれは $\operatorname{Ker} c_k$ に含まれる. この既約成分は Johnson 像に入るか？mod 4 による違いの意味は何か？

(ii) ガロア障害と $\operatorname{Ker} c_k$ の関係を明らかにせよ. それらはすべて $\operatorname{Ker} c_k$ に含まれているか?

(iii) $\operatorname{Ker} c_k$ に含まれる Sp-既約表現であって, $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}$ のアーベル化で生き残るようなものはあるか？特に, Conant-Kassabov-Vogtmann 障害と $\operatorname{Ker} c_k$ の関係を明らかにせよ.

**問題 7.3.** Lie 代数の構造の表現論的理解.

(i) $\bigoplus_{k\geq 1} \operatorname{Im} \tau_{k,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}}$ は次数 1 部分 $\operatorname{Im} \tau_{1,\mathbb{Q}}^{\mathcal{M}} = [1^3]_{\mathrm{Sp}} \oplus [1]_{\mathrm{Sp}}$ で Lie 代数として生成されている. この Lie 代数の構造の表現論的意味づけを与えよ.

(ii) $\mathfrak{h}_{g,1} = \bigoplus_{k\geq 1} \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ や $\bigoplus_{g\geq 1} \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$, あるいは $\bigoplus_{g\geq 1} \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}$ 全体に作用する代数（「大域的対称性」）はあるか？

**問題 7.4.** 一般の曲面 $\Sigma_{g,r}$ に対する Johnson 余核の構造はどうなっているか？($\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ に相当する対象についての $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Q}) \times \mathfrak{S}_r$-既約分解則は朝田-中村, 中村-角皆らの結果がある.)

**問題 7.5.** この話の「量子化」は何か?写像類群, Torelli 群, $\mathrm{Aut}(F_n)$, $\mathrm{IA}_n$ あるいは Johnson 準同型の「量子化」と呼ぶべき対象はあるか？

# 8. 主定理 6.2 の証明のもう少し詳しい概略

## 8.1. $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ における重複度の組合せ論的記述

$k$ 次対称群 $\mathfrak{S}_k$ の $k$ 次巡回部分群を $\mathrm{Cyc}_k$ とかいて, その生成元を $\sigma_k$ とかく. このとき, 1 の原始 $k$-乗根 $\zeta_k$ に対し, $\mathrm{Cyc}_k$ の 1 次元表現 $\chi_k : \mathrm{Cyc}_k \to \mathbb{C}^\times; \sigma_k \to \zeta_k$ が定まる. これを用いて, 自由 Lie 代数の GL-既約分解を $\mathfrak{S}_k$ の表現論で記述できる. (先ほどの定理 6.1 はこれの $\mathcal{C}_n^{\mathbb{Q}}(k)$ に対する類似物である.)

**定理 8.1** (Klyachko 1970). $[\mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k) : (\lambda)_{\mathrm{GL}}] = [\mathrm{Res}_{\mathrm{Cyc}_k}^{\mathfrak{S}_k} S^\lambda : \chi_k]$.

次に, この定理の右辺の Young 盤の組合せ論による記述が知られている. Young 図形 $\lambda$ に対して, $\lambda$ 上の標準盤の全体を $\mathrm{Stab}(\lambda)$ とかく. $\lambda$ 上の標準盤 $T$ に対して, その major index $\mathrm{maj}(T)$ とは, $T$ 上で $\boxed{i+1}$ が $\boxed{i}$ よりも下側にあるような $i$ たちの総和と定義する. このとき, 次の定理が成り立つ.

**定理 8.2** (Kraskiewicz-Weymann). $[\mathrm{Res}_{\mathrm{Cyc}_k}^{\mathfrak{S}_k} S^\lambda : \chi_k] = \sharp\{T \in \mathrm{Stab}(\lambda) \mid \mathrm{maj}(T) \equiv 1 \pmod k\}$.

この定理は，任意の $\lambda$ に対して，$[\mathrm{Res}^{\mathfrak{S}_k}_{\mathrm{Cyc}_k} S^\lambda : \chi_k]$ を計算するのに優れているとは限らない．例えば中村-角皆による $1 \le k \le 14$ における $\mathfrak{h}^{\mathbb{Q}}_{g,1}(k)$ の Sp-既約分解の完全な決定をこの方法でチェックするのは大変で，手計算では難しいと思われる．しかし，$\lambda$ が特別な形であれば，手でも計算できる組合せ論的な記述である．例えば次のようなことは直ぐにわかる．

| $\lambda$ | $T$ | major index | mult. of $\mathbf{triv}_m$ | mult. of $\chi^1_m$ |
|---|---|---|---|---|
| $(m)$ | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & \cdots & m \\ \hline\end{array}$ | $0$ | $1$ | $0$ |
| $(m-1,1)$ | $\begin{array}{\|c\|c\|c\|c\|}\hline 1 & 2 & \cdots & m \\ \hline p \\ \cline{1-1}\end{array}$ $(2 \le p \le m)$ | $p-1$ | $0$ | $1$ |
| $(1^m)$ | $\begin{array}{\|c\|}\hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \vdots \\ \hline m \\ \hline\end{array}$ | $\frac{m(m-1)}{2} \equiv \begin{cases} 0, & m: \text{odd} \\ -\frac{m}{2}, & m: \text{even} \end{cases}$ | $\begin{cases} 1, & m: \text{odd} \\ 0, & m: \text{even} \end{cases}$ | $\begin{cases} 1, & m = 2 \\ 0, & m \neq 2 \end{cases}$ |
| $(2,1^{m-2})$ | $\begin{array}{\|c\|c\|}\hline 1 & p \\ \hline 2 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} m \\ \cline{1-1}\end{array}$ $(2 \le p \le m)$ | $\frac{m(m-1)}{2} - (p-1) \equiv \begin{cases} 1-p, & m: \text{odd} \\ 1-p-\frac{m}{2}, & m: \text{even} \end{cases}$ | $\begin{cases} 1, & m: \text{even} \\ 0, & m: \text{odd} \end{cases}$ | $\begin{cases} 1, & m \neq 2 \\ 0, & m = 2 \end{cases}$ |

これ以外にも，$(k-2,1^2)$ や $(2^2,1^{k-4})$ などでも手で容易に計算できる．この記述と，Pieri 則，$(\mathrm{GL},\mathrm{Sp})$-分岐則を使うことで，次が得られる．

**定理 8.3** (榎本-佐藤). $[\mathfrak{h}^{\mathbb{Q}}_{g,1}(k) : [k]_{\mathrm{Sp}}] = \delta_{k,\mathrm{odd}}$, $\quad [\mathfrak{h}^{\mathbb{Q}}_{g,1}(k) : [1^k]_{\mathrm{Sp}}] = \delta_{k \equiv 1,2 \pmod 4}$.

## 8.2. Dynkin-Specht-Wever 冪等元

自由 Lie 代数を対称群の冪等元を用いて特徴付けることができる．$\mathfrak{S}_k$ の生成元である隣接互換を $s_1, s_2, \ldots, s_{k-1}$ とする．このとき，群環 $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_k$ の元 $\theta_k := (1-s_1)(1-s_2s_1)\cdots(1-s_{k-1}\cdots s_2s_1)$ を考える．$H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ への $\mathbb{Q}\mathfrak{S}_k$ の（右）作用を使って次の定理を得る．

**定理 8.4** (Dynkin-Specht-Wever).

(1) $\theta_k^2 = k\theta_k$.

(2) $v_1, \ldots, v_n \in H_{\mathbb{Q}}$ に対し，$(v_1 \otimes \cdots \otimes v_k) \cdot \theta_k = [\cdots[[v_1,v_2],v_3],\ldots,v_k] \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_{2g}(k)$．特にこれは $H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k} \stackrel{\cdot\theta_k}{\twoheadrightarrow} \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_{2g}(k)$ なる全射を与える．

(3) $v \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ に対し，$v \in \mathcal{L}^{\mathbb{Q}}_{2g}(k) \Leftrightarrow v \cdot \theta_k = kv$.

さらに進んで $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ を特徴付ける定理がある．そのために，$\mathfrak{S}_{k+2}$ の $k+2$ 次巡回部分群の生成元を $\sigma_{k+2}$ とかき，$\mathbb{Q}\mathfrak{S}_{k+2}$ の元 $\sigma = 1 + \sigma_{k+2} + \cdots + \sigma_{k+2}^{k+1}$ とおく．また，$\theta = (1-s_2)(1-s_3s_2)\cdots(1-s_{k+1}s_k\cdots s_3s_2)$ とおく．

**定理 8.5** (森田，榎本-佐藤).

(1) $v \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k+2}$ に対し，$v \in H_{\mathbb{Q}} \otimes \mathcal{L}_{2g}^{\mathbb{Q}}(k+1) \Leftrightarrow v \cdot \theta = (k+1)\theta$.

(2) $v \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k+2}$ に対し，$v \in \mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k) \Leftrightarrow v \cdot \theta = (k+1)\theta$ かつ $v\sigma_{k+2} = v$.

(3) $H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k+2}$ 上で，$\theta \cdot \sigma \cdot \theta = (k+1)\theta \cdot \sigma$.

(4) $v \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k+2}$ 中のウェイト $\lambda$ の Sp-極大ベクトルであって，$v \cdot \theta \cdot \sigma \neq 0$ ならば，$v \cdot \theta \cdot \sigma$ は $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ に属するウェイト $\lambda$ の Sp-極大ベクトルである.

## 8.3. Brauer-Schur-Weyl 双対性

$H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ の極大ベクトルは，対称群（あるいは Brauer 代数）を用いて記述できる．$H_{\mathbb{Q}}$ の自然なシンプレクティック基底を $e_1, \ldots, e_{2g}$ としていた．シンプレクティック形式を $\varpi \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes 2}$ とかく．また，Young 図形 $\lambda$ に対し，その各列の長さを $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ とかく.

**定理 8.6** (Brauer-Schur-Weyl 双対性). $g \geq k$ とする．$\lambda$ を $k-2j$ $(0 \leq j \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor)$ の分割とする．このとき，

$$v_\lambda := \varpi^{\otimes j} \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_1'}) \otimes (e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_{\lambda_2'}) \otimes \cdots \in H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$$

とおく．このとき，$H_{\mathbb{Q}}^{\otimes k}$ 中のウェイト $\lambda$ の極大ベクトルの全体は，$v_\lambda \cdot \mathbb{Q}\mathfrak{S}_k$ に一致する.

## 8.4. 定理 6.2 の証明

定理 8.3 で $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ における重複度が高々1 であることがわかっている．そこで，具体的にその極大ベクトルを見つければよい．次の命題が証明できる.

**命題 8.7.**

(1) $k$ が奇数のとき，$v_{(k)} \cdot \theta \cdot \sigma \neq 0$. 従って，これは $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ 中のウェイト $(k)$ の極大ベクトルを与える.

(2) $g \geq k+2$ とする．$k \equiv 1, 2 \pmod 4$ のとき，$v_{(1^k)} \cdot \theta \cdot \sigma \neq 0$. 従って，これは $\mathfrak{h}_{g,1}^{\mathbb{Q}}(k)$ 中のウェイト $(1^k)$ の極大ベクトルを与える.

これが Johnson 余核に残ることを言うには，$c_k$ で消えないことを言えばよかった．ここは直接の計算で示す.

**命題 8.8.** $k \geq 2$ とする.

(1) $k$ が奇数のとき，$c_k(v_{(k)} \cdot \theta \cdot \sigma) \neq 0$.

(2) $g \geq k+2$ とする．$k \equiv 1 \pmod 4$ のとき，$c_k(v_{(1^k)} \cdot \theta \cdot \sigma) \neq 0$.

これで定理 6.2 の証明ができたことになる．

*

**謝辞.** RIMS 研究集会「表現論と調和解析における諸問題」において講演の機会を与えていただいた研究代表者の織田寛氏に感謝致します．本研究は，京都大学のグローバル COE プログラム『数学のトップリーダーの育成–コア研究の深化と新領域の開拓』で同じ特定助教であった佐藤隆夫氏との邂逅なしには決してなしえないものでした．佐藤氏に感謝するとともに，グローバル COE プログラムにも感謝したいと思います．

## 参考文献

[ES1] **N. Enomoto** and **T. Satoh**, *On the derivation algebra of the free Lie algebra and trace maps*, arxiv.math.GR/1012.2169

[ES2] **N. Enomoto** and **T. Satoh**, *New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces*, arxiv:math.RT/1012.2157

[CKV] **J. Conant**, **M. Kassabov** and **K. Vogtmann**, *Hairy graphs and the unstable homology of* $\mathrm{Mod}(g, s)$*, Out*$(F_n)$ *and Aut*$(F_n)$, arXiv:math/AT.1107.4839