数理解析研究所講究録
第 1770 巻 2011 年 174-186

Boundary value problems for various boundaries of a Riemannian symmetric space of the noncompact type

関西学院大学 理工学部　示野　信一 (Nobukazu Shimeno)
School of Science & Technology,
Kwansei Gakuin University

Abstract

We characterize the image of the Poisson transform from any distinguished boundary of a Riemannian symmetric space of the noncompact type by a system of differential equations. The system comes from a generator system of a two-sided ideal of the universal enveloping algebra. This is a joint work with Toshio Oshima.

1 問題の背景

単位円周上の関数の古典的な Poisson 積分は，Riemann 対称空間の Furstenberg 境界に付随した球主系列表現からの Poisson 変換に一般化され，Helgason-岡本予想が成立する．

また，対称空間の佐武コンパクト化には，一般に Furstenberg 境界とは異なるコンパクトな境界成分が現れ，それらに付随した退化系列表現からの Poisson 変換が定義される．特に有界対称領域の Shilov 境界上の関数の Poisson 積分について古くからの研究がある．Poisson 積分は Hua 方程式と呼ばれる 2 階の微分方程式系を満たすことが知られている．

1.1 単位円板上の Poisson 積分

単位円板上の調和関数は Poisson 積分で表される．D を複素平面内の単位円板

$$D=\{z=x+iy\in\mathbb{C}\,:\,|z|<1\},$$

T をその境界

$$T=\{z\in\mathbb{C}\,:\,|z|=1\}$$

とする．$\mathcal{H}(D)$ を D 上の調和関数の空間

$$\mathcal{H}(D)=\{u\in C^{\infty}(D)\,:\,\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0\}$$

とする．T 上の関数 f の Poisson 積分は

$$\mathcal{P}f(z) = \int_T f(t)\frac{1-|z|^2}{|z-t|^2}dt$$

により定義される（$T = \{e^{i\theta} : 0 \le \theta < 2\pi\}$ 上の正規化された不変測度は $dt = \dfrac{d\theta}{2\pi}$ により与えられる）．$\mathcal{P}f(z)$ は D 上の調和関数であり，$\mathcal{P}f(z)$ の境界値（適当な意味での境界への極限値）が $f(t)$ になっている．Poisson 変換 $\mathcal{P}$ と境界値をとる操作は佐藤超関数 $f \in \mathcal{B}(T)$ に対して意味を持ち，互いに逆写像を与え，同型 $\mathcal{B}(T) \simeq \mathcal{H}(D)$ が成立する．ここで T 上の佐藤超関数の空間は

$$\mathcal{B}(T) = \mathcal{O}(\mathbb{C} \setminus T)/\mathcal{O}(\mathbb{C})$$

により定義される（$\mathcal{O}$ は正則関数を表す）．$\mathcal{B}(T)$ は解析汎関数の空間 $\mathcal{A}'(T)$ と同一視することができる．(境界値として様々な関数のクラス $\mathcal{A}$, C^∞, C^m, $\mathcal{D}'$, $L^p \subset \mathcal{B}$ を設定することもできる．その場合 Poisson 積分は $\mathcal{H}(D)$ の部分空間をなし，その特徴づけが知られている.)

Poisson 核の複素ベキを考えることにより，単位円板上の Poisson 積分は次のように一般化される．$\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\mathcal{P}_\lambda f(z) = \int_T f(t)\left(\frac{1-|z|^2}{|z-t|^2}\right)^{\frac{\lambda+1}{2}} dt \quad (f \in \mathcal{B}(T))$$

と定めると，$u = \mathcal{P}_\lambda f$ は階数 1 の Riemann 対称空間 $D \simeq SU(1,1)/SO(2)$ 上の Laplace-Beltrami 作用素 Δ の固有関数になる．

$$\Delta u = \frac{1}{4}(\lambda^2-1)u, \quad \Delta = (1-x^2-y^2)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right).$$

Helgason [4] は，Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ が $\mathcal{B}(T)$ から

$$\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda) = \{u \in C^\infty(D) : \Delta u = \frac{1}{4}(\lambda^2-1)u\}$$

の上への全単射を与えるための必要十分条件は $\lambda \neq -1, -3, -5, \ldots$ であることを示した．$\mathcal{A}(D;\mathcal{M}_\lambda) = \mathcal{A}(D;\mathcal{M}_{-\lambda})$ であり，$\mathrm{Re}\,\lambda \ge 0$ ならば条件が満たされるから，Δ の任意の固有関数は Poisson 積分表示を持つことがわかる．

1.2 Helgason -岡本予想

Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は一般の非コンパクト型 Riemann 対称空間の Furstenberg 境界上の関数に対して定義される．対称空間 G/K 上の G 不変微分作用素の全体 $\mathbb{D}(G/K)$ は可換な代数をなし，Poisson 変換の像は不変微分作用素の同時固有空間に含まれる．対称空間の

階数が1のとき，$\mathbb{D}(G/K)$ は Laplace-Beltrami 作用素により生成される．単位円板の場合に得られていた同時固有関数の Poisson 積分表示の一般化は Helgason-岡本予想（または Helgason 予想）と呼ばれるが，実と複素の双曲型空間の場合（[3, 15, 16]），対称空間は一般だが K 有限な同時固有関数に限った場合（[5]）の結果を経て，一般の場合には Kashiwara et al. [11] により，確定特異点型の微分方程式系の境界値問題 (cf. [12]) として定式化することにより解決された．

G を有限な中心を持つ連結非コンパクト実半単純 Lie 群，K を G の極大コンパクト部分群，$G = KAN$ を岩澤分解，$P = MAN$ を G の極小放物型部分群とする．等質空間 G/K は非コンパクト型の Riemann 対称空間，G/P はその Furstenberg 境界である．たとえば，$G = SL(n, \mathbb{R})$（行列式が1の n 次実正方行列の全体）のとき，$K = SO(n)$（回転群），M, A, N はそれぞれ，成分が ± 1 の対角行列，成分が正の対角行列，対角成分がすべて1の上三角行列全体のなす G の部分群である．(半単純リー群 $SL(n, \mathbb{R})$, $SU(p, q)$ ではなく $GL(n, \mathbb{R})$, $U(p, q)$ で考える方が便利なこともあり，実際後でそうする.）

G のリー環 $\mathfrak{g}$ の複素化 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の元 X は，

$$X\varphi(x) = \frac{d}{dt}\varphi(xe^{tX})\Big|_{t=0}$$

により G 上の微分作用素とみなすことができる．(たとえば，$G = SL(n, \mathbb{R})$ のとき $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \{X \in M(n, \mathbb{C}) : \operatorname{tr} X = 0\}$.）$X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の作用は G の作用

$$\pi(g)\varphi(x) = \varphi(g^{-1}x)$$

と可換だから，X は G 上の（左）G 不変な微分作用素であるという．微分を繰り返すことにより $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ が生成する G 上の不変微分作用素環を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環と呼び $U(\mathfrak{g})$ と書く．$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ 上の G の随伴作用を Ad で表す（$G = SL(n, \mathbb{R})$ の場合，$\operatorname{Ad}(g)X = gXg^{-1}$）．随伴作用は $U(\mathfrak{g})$ 上に拡張される．

対称空間 G/K 上の関数は，G 上の関数で右からの K の作用で不変なものと同一視される．したがって K による随伴作用で不変な普遍包絡環の元全体 $U(\mathfrak{g})^K$ から G/K 上の不変微分作用素環 $\mathbb{D}(G/K)$ の上への全射がある．G, K, A, N の Lie 環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{n}$ とおく．$G = SL(n, \mathbb{R})$ のとき $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ はトレースがゼロの実対角行列全体である．

$\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ を G/K の制限ルート系，W を $\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ の Weyl 群，$\Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^+$ を $\mathfrak{n}$ に対応する正ルート系，m_α を $\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ の重複度，$\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^+} m_\alpha \alpha$ とする．

リー環の岩澤分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} + \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} + \mathfrak{n}$ により $U(\mathfrak{g})$ から $U(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})$ への写像 $D \mapsto D_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}}$ が $D - D_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} \in \mathfrak{n}U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ により定義される．Harish-Chandra 写像 γ を $\gamma(D) = e^{-\rho} \circ D_{\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}} \circ e^{\rho}$ により定める．G/K 上の不変微分作用素環

$$\mathbb{D}(G/K) \simeq U(\mathfrak{g})^K / (U(\mathfrak{g})^K \cap U(\mathfrak{g})\mathfrak{k})$$

は Harish-Chandra 写像 γ により $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ の複素化上の対称代数の Weyl 群不変元の全体 $S(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}})^W$ と代数として同型になる（Harish-Chandra 同型）．特に $\mathbb{D}(G/K)$ は可換な代数である．

$G=SL(n,\mathbb{R})$ の場合，W は n 次対称群，$S(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})^W$ は $e_1,\dots,e_n$ の対称式の全体である（ただし，1次の対称式 $e_1+\cdots+e_n$ は $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ 上ゼロである）．

$\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p},\mathbb{C}}^*$ に対して，

$$\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)=\{f\in\mathcal{B}(G)\,:\,f(gman)=e^{(\lambda-\rho)(\log a)}f(g)\quad(g\in G,\,m\in M,\,a\in A,\,n\in N)\}\tag{1}$$

とおく．これは G の球主系列表現の佐藤超関数値切断の空間である．$G/P\simeq K/M$ により $\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)\simeq\mathcal{B}(K/M)$ である．1.1 節の単位円板の例では，

$$G=SU(1,1),\quad G/K\simeq D,\quad G/P\simeq T$$

となっている．$f\in\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)$ の Poisson 積分は

$$\mathcal{P}_\lambda f(x)=\int_K f(xk)dk$$

により定義される．定義より Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ は左からの G の作用 $\pi(g)f(x)=f(g^{-1}x)$ $(g,\,x\in G)$ と可換である．$\mathcal{P}_\lambda$ は $P_\lambda(nak)=e^{(\lambda+\rho)(\log a)}$ $(n\in N,\,a\in A,\,k\in K)$ により定義される Poisson 核 P_λ を用いて

$$\mathcal{P}_\lambda f(x)=\int_K f(k)P_\lambda(k^{-1}x)dk$$

と表すこともできる．$\mathcal{P}_\lambda$ の像は $\mathbb{D}(G/K)$ の同時固有空間

$$\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)=\{u\in\mathcal{A}(G/K)\,:\,Du=\gamma(D)(\lambda)u\quad(D\in\mathbb{D}(G/K))\}$$

に含まれる．

Harish-Chandra の c-関数の分母を $e(\lambda)$ とする．$G=SL(n,\mathbb{R})$ のとき，

$$X=\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\quad(x_1+\cdots+x_n=0)$$

に対して $\lambda(X)=\sum_{j=1}^n\lambda_jx_j$ により $\lambda\in\mathfrak{a}_{\mathfrak{p},\mathbb{C}}^*$ と $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^n$ (ただし $\lambda_1+\cdots+\lambda_n=0$) を対応させると，

$$e(\lambda)=\prod_{1\le i<j\le n}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}(\lambda_i-\lambda_j+1)\right)^{-1}$$

である．

定理 1 ([11]) $\mathcal{P}_\lambda$ が $\mathcal{B}(G/P;L_\lambda)$ から $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ の上への全単射であるための必要十分条件は $e(\lambda)\neq 0$ となることである．

特に $\mathrm{Re}\langle\lambda,\alpha\rangle \geq 0$ ($^\forall\alpha \in \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})^+$) ならば $e(\lambda) \neq 0$ が満たされ，任意の $w \in W$ に対して

$$\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_{w\lambda}) = \mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$$

だから，$\mathbb{D}(G/K)$ の任意の同時固有関数は Poisson 積分表示を持つことがわかる．($G = SL(n,\mathbb{R})$ の場合でいえば，$\mathrm{Re}\,\lambda_1 \leq \mathrm{Re}\,\lambda_2 \leq \cdots \leq \mathrm{Re}\,\lambda_n$ ならば $e(\lambda) \neq 0$ であり，$\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\lambda)$ は Harish-Chandra 同型により Weyl 群の作用で $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ を並べ替えても変わらない.)

Helgason-岡本予想は，不変微分方程式系の固有値問題を対称空間 G/K の Furstenberg 境界 G/P に沿った確定特異点型の境界値問題として定式化し ([12])，Poisson 変換の逆写像を境界値写像として構成することにより証明された.

[26] では，Hermite 対称空間の等質直線束の場合に Helgason-岡本予想を証明した.

1.3 Hua 方程式

階数が高い Riemann 対称空間の種々の実現には，一般に Furstenberg 境界より退化したコンパクトな境界成分が現れ，その上の関数の Poisson 積分が定義される．特に有界対称領域に対しては，Shilov 境界が考察されてきた．たとえば有界対称領域

$$D = \{Z \in M(n,\mathbb{C}) : I_n - {}^tZ\bar{Z} > 0 \quad (\text{正定値})\}$$

は，対称空間 $G/K = SU(n,n)/S(U(n)\times U(n))$ と同型である．D の Shilov 境界

$$S = \{Z \in M(n,\mathbb{C}) : Z^*Z = I_n\} = U(n)$$

上の関数 f の Poisson 積分は，

$$\mathcal{P}f(Z) = \int_{U(n)} f(U)\frac{\det(I_n - Z^*Z)^n}{|\det(I_n - U^*Z)|^{2n}}dU \tag{2}$$

により定義される．$n = 1$ のとき，これは単位円周上の関数の Poisson 積分にほかならない．$P \subset P_S$ を満たす G の極大放物型部分群 P_S ($G = SU(n,n)$ を田の字型に区切ったとき，左下の部分がゼロであるような行列全体) があって，$S \simeq G/P_S$ となっており，$f \in \mathcal{B}(G/P_S) \subset \mathcal{B}(G/P)$ の Poisson 積分 $\mathcal{P}f(Z)$ は，$\mathcal{B}(G/P) = \mathcal{B}(G/P;L_\rho)$ からの Poisson 変換の像 $\mathcal{P}_\rho f$ に他ならない．したがって，$\mathcal{B}(G/P_S)$ の像は $\mathcal{A}(G/K;\mathcal{M}_\rho)$ ($D \simeq G/K$ 上の調和関数の空間) の部分空間である．この部分空間を特徴づける問題が E. Stein により提起された.

tube type の Hermite 対称空間の Shilov 境界の場合，Stein の問題は [13, 7, 10] らによって解決された．Poisson 変換の像は Hua 方程式と呼ばれる 2 階の微分方程式系により特徴づけられるというのが Stein の問題の答えである．古典型の場合にはこの方程式は Hua [6] が定義し，Shilov 境界上の関数の Poisson 積分が方程式を満たすことを示していたもので

ある．Hua 方程式が実際に Poisson 変換の像を特徴づけることは，Helgason-岡本予想を用いて，Hua 方程式の解の G/P 上の境界値が P_S 不変性を持つことを示すことにより証明された．

Helgason-岡本予想を念頭に置けば，上の結果は G/P_S に直線束のパラメータを付けた場合，すなわち (2) で Poisson 核の複素ベキを考えた場合に拡張されると考えられる．これは [27] で証明された．方程式系は Laplace-Beltrami 作用素および [10] と同様の方法で K の表現を用いて構成した 2 階の作用素から成る．

tube type でない Hermite 対称空間の Shilov 境界の場合に，不変微分作用素とともに 3 階の作用素が Poisson 変換の像を特徴づけることが [2] (調和関数の場合)，[14]（G/P_S の直線束の場合）により示されている．また $G = SU(p,q)$ $(p > q)$ の場合は，$p = q$（tube type の場合）と同じく 2 階の作用素で Poisson 変換の像が特徴づけられることが示されている（2.3 節を参照）．

2　種々の境界からの Poisson 変換の像

一般の対称空間の Furstenberg 境界の場合（1.2 節），tube type の Hermite 対称空間の Shilov 境界の場合（1.3 節）に Poisson 変換の像が微分方程式系により特徴づけられる例を見た．より一般に，Riemann 対称空間の種々の境界に対する Poisson 変換の像を特徴付ける問題を考えることができる．これは（一般化された）Stein の問題であり，Helgason-岡本予想が解決された直後に [18] でも提起されていた．

以下では，この問題の解決と既知の結果との関連，例について論じる．

2.1　対称空間の種々の境界

非コンパクト型の Riemann 対称空間 G/K の佐武コンパクト化 ([Sa]) に現れるコンパクトな G 軌道は G/P_Ξ（P_Ξ は G の放物型部分群）の形をしている．(固定された) 極小放物型部分群 P を含む放物型部分群は，制限ルート系の単純ルートの集合 $\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \subset \Sigma(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})^+$ の部分集合によりパラメーター付けられる．$\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ の部分集合 Ξ に対して，P を含む G の放物型部分群 $P_\Xi = M_\Xi A_\Xi N_\Xi$ $(M_\Xi \supset M,\ A_\Xi \subset A,\ N_\Xi \subset N)$ が定まる．$\Xi = \emptyset$ のとき $P_\Xi = P$，$\Xi = \Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ のとき $P_\Xi = G$ である．

$G = SL(n,\mathbb{R})$ の場合，(i,i) 成分が 1 でその他の成分がすべてゼロの対角行列を E_i とし，$e_j(E_i) = \delta_{ij}$ により e_j を定めると，A の Lie 環 $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ は $E_i - E_{i+1}$ $(1 \le i \le n-1)$ を基底とする実ベクトル空間で，

$$\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) = \{e_i - e_{i+1} : (1 \le i \le n-1)\}$$

である．$\Xi = \Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \setminus \{e_1 - e_2\}$ のとき，P_Ξ は $2 \le i \le n$ に対して $(i,1)$ 成分がゼロであるような行列全体，$M_\Xi A_\Xi$ は対角線に沿ってサイズが $1, n-1$ の正方ブロックが並び

それ以外の成分はゼロの行列全体からなる G の部分群である．また，$e_i - e_{i+1} \in \Xi$ のとき i と $i+1$ はつながっているとみなすと，$\Xi \subset \Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ は正整数の組 $(n'_1, \ldots, n'_L)$ で $n'_1 + \cdots + n'_L = n$ を満たすものと対応し，$M_\Xi A_\Xi$ は対角線上にサイズが $n'_1, \ldots, n'_L$ の正方ブロックが並び，それ以外の成分はゼロの部分群で，P_Ξ はブロックの左下の部分がすべてゼロの部分群である．

$\mathfrak{a}_\Xi$ を A_Ξ の Lie 環とし，$\mu \in \mathfrak{a}^*_{\Xi,\mathbb{C}}$ に対して，退化系列表現の空間とその上の Poisson 変換を

$$\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu}) = \{f \in \mathcal{B}(G) \,:\, f(gm_\Xi a_\Xi n_\Xi) = a_\Xi^{\mu-\rho} f(g)\},$$

$$\mathcal{P}_{\Xi,\mu} f(g) = \int_K f(gk)dk$$

により定める．$\mathfrak{a}^*_{\Xi,\mathbb{C}}$ の元を Killing 形式に関する直交補空間 $\mathfrak{a}_\Xi^\perp \subset \mathfrak{a}$ 上ゼロとして $\mathfrak{a}^*_{\mathfrak{p},\mathbb{C}}$ の元とみなす．$\rho(\Xi) = \rho - \rho|_{\mathfrak{a}_\Xi}$ とすると，fibration $G/P \to G/P_\Xi$ と直線束のパラメーターが整合して

$$\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu}) \subset \mathcal{B}(G/P; L_{\mu+\rho(\Xi)})$$

となる．したがって，$\mathcal{P}_{\Xi,\mu}$ の像は $\mathcal{P}_{\mu+\rho(\Xi)}(\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu}))$ であり，$\mathcal{A}(G/K; \mathcal{M}_{\mu+\rho(\Xi)})$ の部分空間になる．また，次が成り立つ．

補題 1 ([24]) i) $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{\Xi,\mu} = \mathrm{Im}\,\mathcal{P}_{\mu-\rho(\Xi)}$
ii) $\mathrm{Im}\,\mathcal{P}_\lambda = \{u \in \mathcal{A}(G/K) \,:\, Du = 0\,(\forall D \in I_\lambda)\}$,

$$I_\lambda = \{D \in U(\mathfrak{g}) \,:\, \gamma(\mathrm{Ad}(k)D)(\lambda) = 0 \ (\forall k \in K)\}$$

ここで $U(\mathfrak{g})$ は G のリー環の複素化の普遍包絡環、γ は 1.2 節で定義した Harish-Chandra 写像である．補題より，境界 G/P_Ξ からの Poisson 変換の像は，ある微分方程式系の解空間として特徴づけられることがわかる．これは Furstenberg 境界からのパラメーター $\lambda = \mu - \rho(\Xi)$ の Poisson 変換の像であるが，Helgason-岡本予想の仮定を満たさない（つまり $\mathcal{P}_\lambda$ が全単射でない）パラメーターになっており，像は不変微分作用素の同時固有関数であるだけでなく，より多くの微分方程式を満たす．そこで，像を特徴づける微分方程式系を具体的に記述することが問題となる．

2.2 微分作用素の構成

例外的な場合を除いて Harish-Chandra 写像 γ は普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の中心 $Z(\mathfrak{g})\,(\subset U(\mathfrak{g})^K)$ から $\mathbb{D}(G/K)$ への全射になる（G が古典型，特に $G = SL(n,\mathbb{R})$ ならば成立）．そうでない場合にも一般のパラメーター λ に対しては，Poisson 変換 $\mathcal{P}_\lambda$ の像は $Z(\mathfrak{g})$ の同時固有空間になる（[17] 参照）．$D - \gamma(D)(\lambda)\,(D \in Z(\mathfrak{g}))$ により生成される $U(\mathfrak{g})$ のイデアルは両側イデアルである．1.2 節で見た Furstenberg 境界からの Poisson 変換の像を特徴づけ

る微分方程式系はこの両側イデアルに対応しているとみなすことができる．$Z(\mathfrak{g})$ の生成元の具体的な記述に関しては，Capelli 恒等式とその一般化の研究がある．

一般の境界 G/P_Ξ の場合にも同様の意味で $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル（の生成系）としてPoisson 変換の像を特徴づける微分方程式系が与えられるのである．$\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu})$ と $\mathcal{B}(G/P; L_{\mu+\rho(\Xi)})$ の定義に現れる，G への右からの P および P_Ξ の作用による同変性を特徴づける G 上の微分作用素はそれぞれ P と P_Ξ のリー環の作用により書けるが，これに対応する $U(\mathfrak{g})$ の左イデアルの差を埋める $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル I が存在すれば，I は π の微分表現の作用により，部分空間 $\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu}) \subset \mathcal{B}(G/P; L_{\mu+\rho(\Xi)})$ を特徴づけることがわかる．Poisson 変換は π の作用と可換だから，$\mathcal{P}_{\mu+\rho(\Xi)}$ が単射であるという条件（Helgason-岡本予想（定理 1）の仮定）の下で，両側イデアル I が Poisson 変換による $\mathcal{B}(G/P_\Xi; L_{\Xi,\mu})$ の像を特徴づけることが従う．普遍包絡環の両側イデアルを用いたこの議論では，1.3 節で述べた研究で用いられていた，微分方程式系が Furstenberg 境界上に誘導する方程式を計算する手法を用いる必要がない点に注意されたい．

上の条件を満たすような両側イデアル I が存在するためのパラメーターの条件と両側イデアルの生成元の具体的な記述は，大島 [20, 21, 22]，大島-織田 [23] により与えられた．これにより，任意の Riemann 対称空間 G/K の任意の境界 G/P_Ξ からの Poisson 変換の像を特徴づける微分方程式系が明示的に得られたことになる．

普遍包絡環の両側イデアルとその生成元は，複素リー環 $\mathfrak{g}$ のスカラー型の一般 Verma 加群に付随して与えられる．(対称空間 G/K に対して，$\mathfrak{g}$ を G の Lie 環の複素化として適用する．)

$\mathfrak{a}$ を $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分代数，$\mathfrak{b} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の Borel 部分代数，$\mathfrak{p}_\Theta \supset \mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の放物型部分代数とする．$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$ の場合，$\mathfrak{a}$ は対角行列全体，$\mathfrak{b}$ は対角線の左下の成分がゼロの行列全体，$\mathfrak{p}_\Theta$ は対角線に沿って並ぶ n の分割 Θ に対応したサイズのブロックの左下はゼロの行列全体である．$\mathfrak{p}_\Theta$ の指標 λ に対して $U(\mathfrak{g})$ の左イデアル $J_\Theta(\lambda)$, $J(\lambda)$ を

$$J_\Theta(\lambda) = \sum_{X \in \mathfrak{p}_\Theta} (X - \lambda(X))$$

$$J(\lambda) = \sum_{X \in \mathfrak{b}} (X - \lambda(X))$$

により定義する．$\mathfrak{g}$ の放物型部分リー環 $\mathfrak{p}_\Theta$ の指標 λ に対してスカラー型の一般 Verma 加群 $M_\Theta(\lambda) = U(\mathfrak{g})/J_\Theta(\lambda)$ と Verma 加群 $M(\lambda) = U(\mathfrak{g})/J(\lambda)$ が定義される．$U(\mathfrak{g})$ のイデアル $J_\Theta(\lambda)$, $J(\lambda)$ に対して条件

$$J_\Theta(\lambda) = I_\Theta(\lambda) + J(\lambda) \tag{3}$$

を満たす $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル $I_\Theta(\lambda)$ の存在とその生成元の記述が本質的に重要である．(Θ, λ は Ξ, μ に対応して定まる．) たとえば，$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$, $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{l}_\Theta + \mathfrak{n}_\Theta$,

$\mathfrak{l}_\Theta = \mathfrak{gl}(n_1) \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}(n_L)$ $(n_1 + \cdots + n_L = n)$ のとき，最小多項式 $q_\Theta(t, \lambda)$ が

$$q_\Theta(t, \lambda) = \prod_{j=1}^{L}(t - \lambda_j - n_1 - \cdots - n_{j-1})$$

により定義され，$M_\Theta(\lambda)$ の無限小指標が正則ならば，(3) を満たす $U(\mathfrak{g})$ の両側イデアル $I_\Theta(\lambda)$ が存在して，$I_\Theta(\lambda)$ は $q_\Theta(\mathbb{E}, \lambda)$ $(\mathbb{E} = (E_{ij}) \in M(n, \mathfrak{g}))$ の成分により生成される．

定理 2 2条件

1) $e(\mu + \rho(\Xi)) \neq 0$

2) $M_\Theta(\lambda)$ の無限小指標が正則

が成り立つとき，$D - \gamma(D)(\mu + \rho(\Xi))$ $(D \in Z(\mathfrak{g}))$ と $q_\Theta(\mathbb{F}, \lambda)$ で定義される微分方程式系が $\mathcal{P}_{\Xi,\mu}$ の像を特徴づける．

定理2の仮定 1) は Helgason-岡本予想（定理 1）が成り立つための条件，2) は条件 (3) が成り立ち $I_\Theta(\lambda)$ が $q_\Theta(\mathbb{F}, \lambda)_{ij}$ により生成されるための十分条件である（後者はもっと精密に述べることができる [20, 21, 22, 23]）．

上の定理は，Hermite 対称空間の等質直線束の場合にも拡張される ([24, Theorem 3.2])．

2.3 $U(p, q)$ の場合

p, q を $p \geq q$ を満たす 2 以上の整数とする．σ を

$$\sigma(X) = I_{p,q} X I_{p,q} \quad I_{p,q} := \begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{pmatrix}$$

により定義される複素 Lie 環 $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{C})$ の involution とし，

$$G = U(p, q) = \{g \in GL(p + q, \mathbb{C}) \, : \, g = I_{p,q} \overline{{}^t g^{-1}} I_{p,q}\},$$

$K = U(p, q) \cap U(p + q) = U(p) \times U(q)$ とする．($SU(p, q)$ の場合の結果は $U(p, q)$ の場合から容易に従う．) G/K は階数 q の Hermite 対称空間で，単純ルートの集合は $\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) = \{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q\}$，$|\alpha_1| = \cdots = |\alpha_{q-1}|$，$|\alpha_1| < |\alpha_q|$ $(p = q$ のとき$)$，$|\alpha_1| > |\alpha_q|$ $(p > q$ のとき$)$ の形をしている．$\Xi = \Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}) \setminus \{\alpha_q\}$ のとき G/P_Ξ は G/K の Shilov 境界である．対応する $\mathfrak{g}$ の放物型部分リー環は，$\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環に関する単純ルートの部分集合 $\Theta = \{\tilde{\alpha}_1, \ldots, \tilde{\alpha}_{p+q-1}\} \setminus \{\tilde{\alpha}_q, \tilde{\alpha}_p\}$ に対応し，最小多項式は

$$q_\Theta(t, \lambda) = \begin{cases} (t - \lambda)(t - q)(t + \lambda - p) & (p > q) \\ (t - \lambda)(t + \lambda - p) & (p = q) \end{cases}$$

により与えられる．したがって，$p = q$ (tube type) のとき 2 階，$p > q$ (non-tube type) のとき 3 階の微分作用素（と 2 階の不変微分作用素）により Shilov 境界からの Poisson 積

分の像が特徴づけられる．実は $p>q$ のときにも以下のように $(t-\lambda)(t+\lambda-p)$ に対応する作用素を $U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ を法にして K の作用で分解することにより，Poisson 変換の像を特徴づける 2 階の作用素を得ることができる．今

$$\mathbb{E}=\begin{pmatrix}K_1 & P\\ Q & K_2\end{pmatrix}\in M\big(p+q,U(\mathfrak{g})\big)$$

のように $K_1=(E_{i,j})_{1\le i,j\le p}$ など p と q にブロック分けすると，

$$\big(\mathbb{E}-\lambda\big)\big(\mathbb{E}+\lambda-p\big)\equiv\begin{pmatrix}PQ & 0\\ (q-p)Q & QP\end{pmatrix}-\lambda(\lambda-p)\mod U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$$

が成り立つ．サイズ q のブロックに対応する方程式系

$$(QP)_{i,j}u=\delta_{i,j}\lambda(\lambda-p)u\quad(1\le i,j\le q)$$

により Poisson 変換の像が特徴づけられる．これは，$\lambda=p$ のとき [2]，一般の λ のとき [14] により得られていた結果に他ならないが，さらに次の 2 つの方向で一般化することができる．

i) Ξ が $\Psi(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})\setminus\{\alpha_q\}$ の任意の部分集合の場合
ii) K の 1 次元表現に付随した G/K 上の等質直線束の場合

i) については，$0=n_0<n_1<\cdots<n_L=q$ を満たす整数 $n_0,\dots,n_L$ に対して $\Xi=\{\alpha_i : i\in\{1,\dots,q\}\setminus\{n_1,\dots,n_L\}\}$ であるとき，対応する最小多項式は $p=q$ のとき $2L$ 次，$p>q$ のとき $2L+1$ 次である．$p>q$ の場合，$L=1$ の場合と同様に $U(\mathfrak{g})\mathfrak{k}$ を法にして K の作用で分解することにより得られる $2L$ 階の微分作用素と $2L-2$ 階以下の不変微分作用素を用いて $\mathcal{P}_{\Xi,\lambda}$ の像が特徴づけられる．

ii) については，Shilov 境界の場合を含む i) の設定の下で，K の 1 次元表現に付随した G/K 上の等質直線束の場合に Poisson 変換を定義し，像を特徴づける微分方程式系を記述することができる．($G=SU(p,q)$ としても $K=S(U(p)\times U(q))$ は 1 次元の中心を持ち，ii) は i) に含まれない非自明な結果である．)

注意 1 $1<k<q$ に対して，$\Xi=\{\alpha_i : k\le i\le q\}$ の場合には，$U(p,q)$ だけでなく一般の Hermite 対称空間に対して，Poisson 変換の像を特徴づける微分方程式系を [29] で構成した．

2.4 $Sp(n,\mathbb{R})$ の場合

$2K_{ij}=E_{ij}-E_{j+n,i+n}$, $2P_{ij}=E_{i,j+n}+E_{j,i+n}$, $2Q_{ij}=E_{i+n,j}+E_{j+n,i}$ として

$$\mathbb{F}=\begin{pmatrix}K & P\\ Q & -{}^tK\end{pmatrix}$$

とおくと，$\sum_{1\leq i,j\leq 2n}\mathbb{C}F_{ij}\simeq \mathfrak{sp}_n$ である．Shilov 境界に対応する $\mathfrak{sp}_n$ の極大放物型部分リー環の場合の最小多項式は，

$$q_\Theta(t,\lambda)=(t-\lambda)\big(t+\lambda-\tfrac{n+1}{2}\big)$$

であり，

$$(\mathbb{E}-\lambda)\big(\mathbb{E}+\lambda-\tfrac{n+1}{2}\big)\equiv\begin{pmatrix}PQ & 0\\ 0 & QP\end{pmatrix}-\lambda\big(\lambda-\tfrac{n+1}{2}\big).$$

Shilov 境界からの Poisson 変換の像は上式の右辺の成分からなる微分方程式系により特徴づけられる．これは $\lambda=(n+1)/2$ のときには [13, 7] で，一般の λ に対しては [25] で得られていた結果である．K の 1 次元表現に付随した等質直線束の場合にも，上と同様に最小多項式から 2 階の方程式系が得られ，これは [28] の結果と同等である．

注意 2 i) $G=GL(n,\mathbb{R})$ の場合には，$\mathcal{P}_{\Xi,\lambda}$ の像を特徴づける微分方程式系の生成系には，最小多項式によるものの他に Capelli 要素 [19] がある．

ii) 調和関数の場合（1.2 節で $\lambda=\rho$ の場合），Johnson [8, 9] が一般の境界成分からの Poisson 変換の像を特徴づける微分方程式系の別の記述を与えている．

iii) 境界値として様々な関数のクラス $\mathcal{A}$, C^∞, C^m, $\mathcal{D}'$, $L^p\subset\mathcal{B}$ を設定することもできる．その場合 Poisson 積分は $\mathcal{H}(D)$ の部分空間をなし，その特徴づけが知られている（種々の境界の場合を含む L^p の場合は [1]).

References

[1] S. B. Said, T. Oshima and N. Shimeno, *Fatou's theorems and Hardy-type spaces for eigenfunctions of the invariant differential operators on symmetric spaces*, Int. Math. Res. Not. **16** (2003), 915–931.

[2] N. Berline and M. Vergne, *Equations de Hua et noyau de Poisson*, Lect. Notes in Math. **880** (1981), 1–51, Springer.

[3] M. Hashizume,K. Minemura, and K. Okamoto, *Harmonic functions on hermitian hyperbolic spaces*, Hiroshima Math. J. **3** (1973), 81–108.

[4] S. Helgason, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations*, Advances in Math. **5** (1970), 1–154.

[5] ———, *A duality for symmetric spaces with applications to group representations II, Differential equations and Eigenspace representations*, Advances in Math. **22** (1976), 187–219.

[6] L. K. Hua, *Harmonic Analysis of Functions of Several Complex Variables in Classical Domains*, Vol. 6, Transactions of Math. Monographs, A.M.S., Providence, 1963.

[7] K. D. Johnson, *Differential equations and the Bergman–Šhilov boundary on the Siegel upper half plane*, Ark. Math. **16** (1978), 95–108.

[8] ———, *Generalized Hua operators and parabolic subgroups, The case of* $SL(n, \mathbb{C})$ *and* $SL(n, \mathbb{R})$, Trans. A. M. S. **281** (1984), 417–429.

[9] ———, *Generalized Hua operators and parabolic subgroups*, Ann. of Math. **120** (1984), 477–495.

[10] K. Johnson and A. Korányi, *The Hua operators and bounded symmetric domains of tube type*, Ann. of Math. **111** (1980), 589–608.

[11] M. Kashiwara, A. Kowata, K. Minemura, K. Okamoto, T. Oshima and M. Tanaka, *Eigenfunctions of invariant differential operators on a symmetric space*, Ann. of Math. **107** (1978), 1–39.

[12] M. Kashiwara and T. Oshima, *System of differential equations with regular singularities and their boundary value problems*, Ann. of Math. **106** (1977), 145–200.

[13] A. Korányi and P. Malliavin, *Poisson formula and compound diffusion associated to an overdetermined elliptic system on the Siegel half plane of rank two*, Acta Math. **134** (1975), 185–209.

[14] K. Koufany and G. Zhang, *Hua operators and Poisson transform for bounded symmetric domains*, J. of Funct. Anal. **1236** (2006), 546–580.

[15] K. Minemura, *Eigenfunctions of the laplacian on a real hyperbolic space*, J. Math. Soc. Japan **27** (1975), 82–105.

[16] ———, *Eigenfunctions of the Laplacian on a hermitian hyperbolic space*, Hiroshima Math. J. **4**, (1974), 441–457.

[17] H. Ochiai, 半単純対象空間の不変微分作用素環と普遍包絡環の中心, 数理解析研究所考究録 **1346** (2003), 80–90.

[18] T. Oshima, 対称空間上の種々の境界に対する境界値問題, 数理解析研究所考究録 **281** (1976), 211–226.

[19] ———, *Generalized Capelli identities and boundary value problems for* $GL(n)$, Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, 307–335.

[20] ———, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, Advances in Math. **196** (2005), 124–126.

[21] ———, 線形代数の量子化と積分幾何, 数理解析研究所考究録 **1421** (2005), 12–25.

[22] ———, *Annihilators of generalized Verma modules of the scalar type for classical Lie algebras*, "Harmonic Analysis, Group Representations, Automorphic forms and Invariant Theory", in honor of Roger Howe, Vol. 12 (2007), Lecture Notes Series, Institute of Mathematical Sciences, National University of Singapore, 277–319.

[23] H. Oda and T. Oshima, *Minimal polynomials and annihilators of generalized Verma modules of the scalar type*, J. Lie Theory, **16** (2006), 155–219.

[24] T. Oshima and N. Shimeno, *Boundary value problems on Riemannian symmetric spaces of the noncompact type*, preprint, arXiv:1011.1314.

[Sa] I. Satake, *On representations and compactifications of symmetric Riemannian spaces*, Ann. of Math. **71** (1960), 77–110.

[25] J. Sekiguchi, *Invariant system of differential equations on Siegel's upper half-plane*, Seminar reports on unitary representations, Vol. VII (1987), 97–126.

[26] N. Shimeno, *Eigenspaces of invariant differential operators on a homogeneous line bundle on a Riemannian symmetric space*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. 1A, **37** (1990), 201–234.

[27] ———, *Boundary value problems for the Shilov boundary of a bounded symmetric domain of tube type*, J. of Funct. Anal. **140** (1996), 124–141.

[28] ———, *Boundary value problems for the Shilov boundary of the Siegel upper half plane*, Bull. Okayama Univ. Sci., **33** A (1997), 53–60.

[29] ———, *Boundary value problems for various boundaries of Hermitian symmetric spaces*, J. of Funct. Anal. **170** (1996), 265–285.